Livros de Luís Lopes
http://www.escolademestres.com/qedtexte

Meu próximo livro - Manual de Construção de Triângulos - Volume 1 - deverá ser publicado no começo de 2016. Seu conteúdo, além de uma parte teórica, terá 371 exercícios e apêndices.

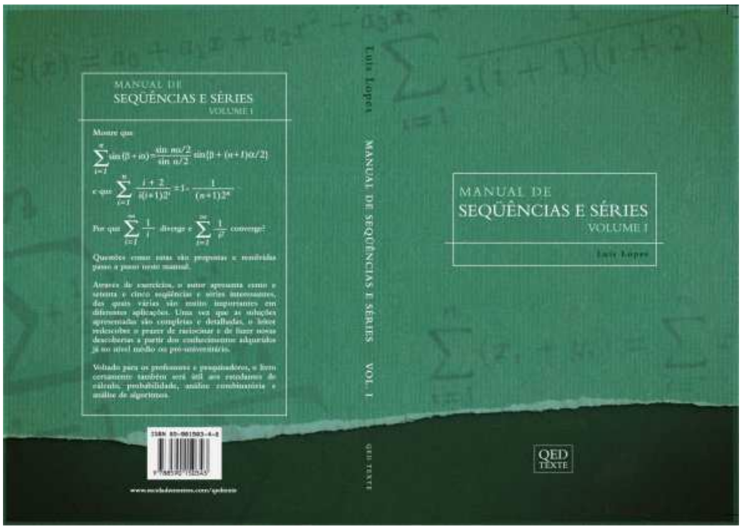
No momento (05/2015) disponibilizo 2 arquivos (partes 7 e 8) com as construções geométricas - acompanhadas de suas figuras - e soluções algébricas dos exercícios 301 ao 371. A parte 6, com os exercícios 251 ao 300, ficará disponível no começo de julho/2015. Os arquivos seguintes serão distribuídos mensalmente, sendo que aquele correspondente à parte 1, com os exercícios 1 ao 50, poderá ser consultado no começo de dezembro 2015.

Todos os oito arquivos poderão ser impressos, mas desejaria que isso não ocorresse. Não só por razões ecológicas, poupando água, árvores e a Natureza de modo geral, mas também para evitar desperdícios e facilitar a divulgação deste conhecimento entre os amantes da Matemática.

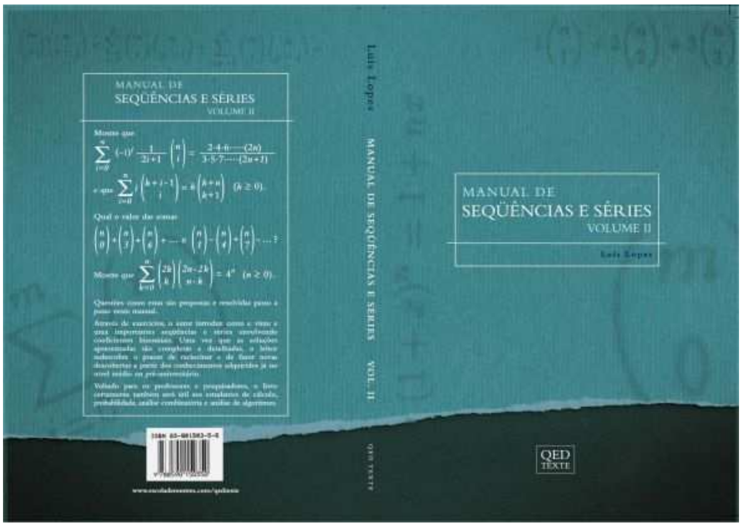
O que eu recebo pela venda de um livro impresso é muito pouco comparado com o que o leitor gasta. Por conta disso estou disponibilizando um link na para doações na página que hospeda estes livros:
http://www.escolademestres.com/blogs/questoes-resolvidas/matematica/306-construcoes-geometricas-de-triangulos-versao-eletonica
Oi ainda em http://www.escolademestres.com/luis-lopes .

Tópicos abordados são os seguintes:

Seqüências e Séries -
Volume 1



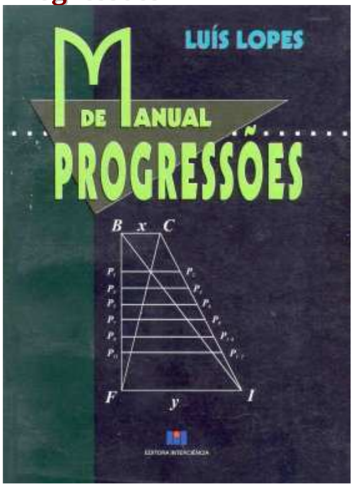
Volume 2



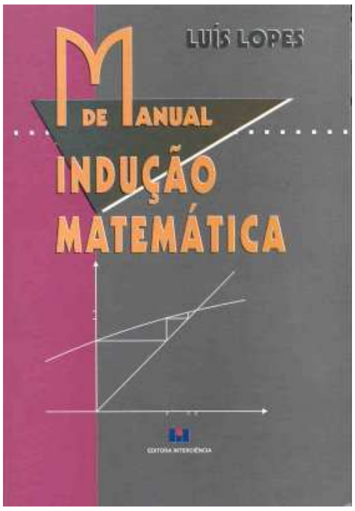
Coleção de Matemática do Prof Luís Lopes

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Progressões



Indução Matemática



http://www.escolademestres.com/qedtexte

TRIGONOMETRIA

LUÍS LOPES

Este livro foi escrito pensando no leitor que estuda o assunto pela primeira vez e naquele que gostaria de encontrar num só volume uma coletânea de definições e fórmulas que normalmente são obtidas após consultas a diversas obras diferentes.

O volume é dividido em duas partes distintas. Na primeira parte, expõem-se os resultados mais importantes, freqüentemente encontrados na literatura do assunto, e na segunda propõem-se cem exercícios. Os exercícios foram escolhidos a fim de que o leitor pudesse verificar seus conhecimentos. Ocasionalmente alguns exercícios, como o centésimo, exigirão mais do leitor e servirão para o desenvolvimento e introdução de novos resultados.

Ao final do volume o autor apresenta as soluções detalhadas de todos os exercícios. Deste modo o estudante autodidata e o professor à procura de novos exemplos e exercícios terão farto material à sua disposição.

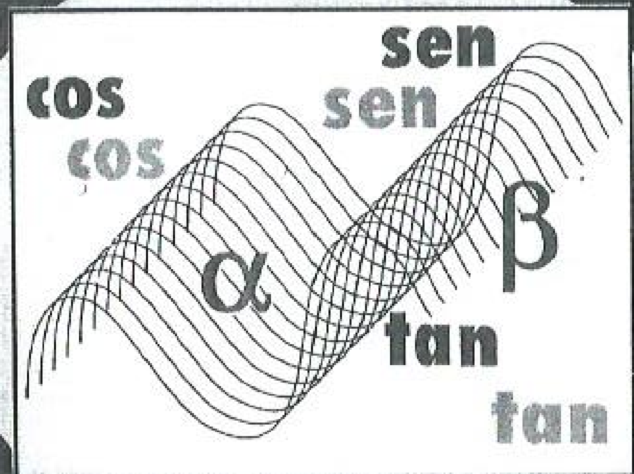
Obra recomendada pelo GEPEM (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula, RJ).

ISBN: 85-7190-064-7

MANUAL DE

TRIGONOMETRIA

LUÍS LOPES



EDC

Manuais já publicados

1 Trigonometria

2 Seqüências e Séries

MANUAL DE

TRIGONOMETRIA

LUÍS LOPES

Engenheiro Eletricista, PUC/RJ
Mestre em Engenharia Industrial, PUC/RJ
Doutor em Informática, Universidade de Montreal
Ex-professor da PUC/RJ
Consultor em editoração computadorizada em Montreal, Canadá

EDC
EDITORA DIDÁTICA E CIENTÍFICA LTDA.

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

L854m — Lopes, Luis de Barros Rodrigues
Manual de trigonometria / Luis Lopes. — Rio de Janeiro : EDC-Ed. Didatica e Cientifica, 1992.

Bibliografia.

1. Trigonometria. 1. Titulo.

CDD — 516.24
CDU — 514

92-0440

ISBN: 85-7190-064-7

Direitos reservados por:
EDC — EDITORA DIDATICA E CIENTÍFICA LTDA.
Rua Silva Vale, 870 — Cavalcanti
Rio de Janeiro — RJ

Vendas: Tels.: (021) 592-3747/593-5449 — FAX (021) 289-9196

À Regina & Walter,
meus primeiros mestres.

Apresentação

Este livro foi escrito pensando no leitor que estuda o assunto pela primeira vez e naquele que gostaria de encontrar num só volume uma coletânea de definições e fórmulas que normalmente são obtidas após consultas a diversas obras diferentes.

O volume é dividido em duas partes distintas. Na primeira parte, expõem-se os resultados mais importantes, freqüentemente encontrados na literatura do assunto, e na segunda propõem-se cem exercícios. Os exercícios foram escolhidos a fim de que o leitor pudesse verificar seus conhecimentos. Ocasionalmente alguns exercícios, como o centésimo, exigirão mais do leitor e servirão para o desenvolvimento e introdução de novos resultados.

Ao final do volume o autor apresenta as soluções detalhadas de todos os exercícios. Deste modo o estudante autodidata e o professor à procura de novos exemplos e exercícios terão farto material à sua disposição.

O autor

Prefácio

Este manual foi escrito com o objetivo de servir a todo tipo de leitor. O leitor que já estudou os temas aqui tratados utilizará o manual quando precisar se lembrar de uma definição ou de uma fórmula; para tal ele terá somente que consultar as partes teóricas do volume ou olhar os problemas propostos. O leitor que estuda o assunto pela primeira vez deve ler este manual com o apoio de uma obra didática. *Este manual foi escrito para suportar e aprofundar os temas tratados previamente por uma obra didática.*

Nossa experiencia como estudante e professor nos ensinou que a melhor maneira de assimilar um assunto é através da resolução de exercícios — e muitos! Nós constatamos que as obras didáticas não fornecem as *soluções* aos problemas propostos e freqüentemente nem mesmo as respostas. O estudante se vê assim frustrado nos seus esforços de compreensão pois nunca pode estar certo do seu raciocínio se pensa que resolveu um exercício corretamente ou então, após passar um certo tempo tentando resolvê-lo, permanece sem conhecer a solução do "quebra-cabeça". Neste manual, nossa preocupação maior foi de apresentar uma solução completa e detalhada a todos os problemas propostos.

Este manual apresentará, no começo, de uma maneira bem concisa, todas as noções e fórmulas que nós consideramos as mais importantes e que são normalmente encontradas na literatura do assunto. Nós proporemos, em seguida, cem exercícios a fim de que o leitor possa aplicar os diversos conceitos introduzidos previamente. As soluções dos exercícios encontram-se no final do volume.

Os exercícios seguem uma certa ordem de dificuldade mas nosso objetivo principal foi de grupá-los por assuntos. O símbolo ♠, colocado ao lado do número que identifica o exercício, indicará que a solução encontrada alcança ou ultrapassa o comprimento de uma página.

Todos os exercícios propostos, à exceção dos números 4, 79, 80, 81 e 100, provem do livro *Algèbre et Trigonométrie* por J. Vincent Robison, McGraw-Hill, 1967. Sua inclusão neste manual é feita com permissão do editor, a quem registramos nosso agradecimento.

Agradecemos igualmente a Lucie Bibeau por seus comentários e sugestões.

Luís Lopes

Rio de Janeiro, RJ
Abril, 1992

Sumário

TRIGONOMETRIA

Definição de ângulo

Sejam OA e OB duas semi-retas de um plano $\mathcal{P}$. Obtém-se um ângulo $\alpha = \angle AOB$ se OB é o resultado de uma rotação de OA em torno do ponto O. Se a rotação se faz no sentido contrário ao das agulhas de um relógio, dir-se-á que o ângulo é positivo, caso contrário, negativo.

A figura 1.a mostra um ângulo positivo e a figura 1.b, um angulo negativo.

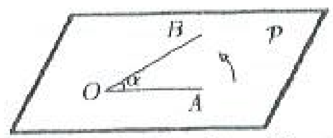


Figura 1.a α é um ângulo positivo

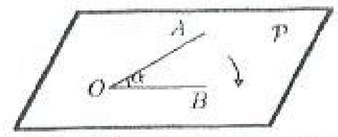


Figura 1.b α é um ângulo negativo

Obtém-se uma rotação completa se, após a rotação, OB confunde-se com OA.

Medida de ângulo

Definem-se três tipos de unidades para medir-se um angulo: *grau* (ou °), *grado* (ou gr) e *radiano* (ou rad).

Medida em graus. Numa rotação completa tem-se 360°. Um grau corresponde então a 1/360 de uma rotação completa. Como unidades adicionais definem-se o minuto (ou ′) e o segundo (ou ″); $1° = 60'$ e $1' = 60''$.

Medida em grados. Numa rotação completa tem-se 400 gr. Um grado corresponde então a 1/400 de uma rotação completa.

Medida em radianos. Numa rotação completa tem-se 2π rad. Um radiano corresponde então a $1/2\pi$ de uma rotação completa.

A figura 2 nos ajuda a definir um radiano de outra maneira:

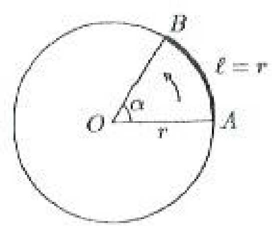


Figura 2 α é um angulo de um radiano

Definição:

α é um ângulo de um radiano se o comprimento ℓ do arco AB é igual ao raio r do círculo.

$$1\,\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57{,}29578^\circ.$$

Funções trigonométricas (ou funções circulares)

O círculo trigonométrico (círculo com raio unitário cujo centro é origem de um sistema de coordenadas retangulares) nos permite a identificação das seis funções trigonométricas de um ângulo α ($\alpha \neq 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$).

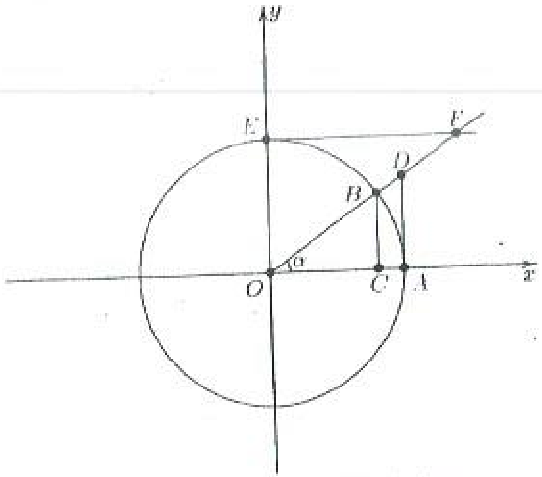


Figura 3 Círculo trigonométrico

$\sin\alpha = BC$	$\csc\alpha = OF$
$\cos\alpha = OC$	$\sec\alpha = OD$
$\tan\alpha = AD$	$\cot\alpha = EF$

Identidades fundamentais

Os tres triangulos OBC, ODA e OFE da figura 3 são triângulos retângulos semelhantes (eles têm os mesmos ângulos). Pode-se escrever

$$OC^2 + BC^2 = OB^2 \Longrightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \tag{1}$$
$$OA^2 + AD^2 = OD^2 \Longrightarrow 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \tag{2}$$
$$OE^2 + EF^2 = OF^2 \Longrightarrow 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \tag{3}$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{OC}{OA} \Longrightarrow \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1} \therefore \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{4}$$
$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD} \Longrightarrow \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{1}{\sec\alpha} \therefore \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \tag{5}$$
$$\frac{BC}{OE} = \frac{OB}{OF} \Longrightarrow \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{1}{\csc\alpha} \therefore \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \tag{6}$$
$$\frac{EF}{OC} = \frac{OE}{BC} \Longrightarrow \frac{\cot\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} \therefore \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha} \tag{7}$$

Seja agora um ponto P com coordenadas (x, y) e que não pertence ao círculo trigonométrico. Seja r o comprimento de OP.

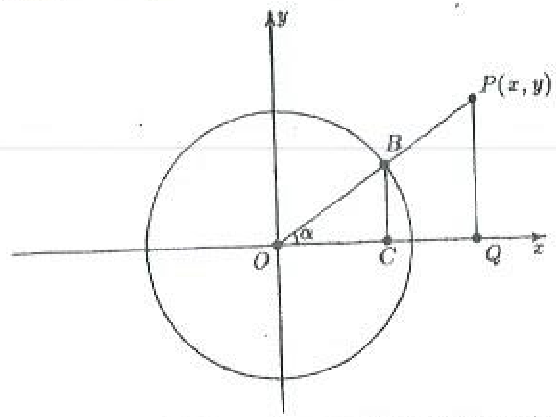


Figura 4 Ponto P não pertence ao círculo trigonométrico

Os triângulos OBC e OPQ são triângulos retângulos semelhantes. Das propriedades dos triângulos semelhantes, tira-se:

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{OB}{OP} \Longrightarrow \frac{\sin\alpha}{y} = \frac{1}{r} \therefore \sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{OC}{OQ} = \frac{OB}{OP} \Longrightarrow \frac{\cos\alpha}{x} = \frac{1}{r} \therefore \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}, \quad x \neq 0$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0 \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}, \quad y \neq 0$$

Funções trigonométricas da soma de dois ângulos

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha; \tag{8}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \tag{9}$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}. \tag{10}$$

Funções trigonométricas da diferença de dois ângulos

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha; \tag{11}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta; \tag{12}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}. \tag{13}$$

Funções trigonométricas dos múltiplos de um ângulo

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \tag{14}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha; \tag{15}$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}; \tag{16}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad 0 \le \alpha/2 \le \pi; \tag{17}$$
$$= -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \pi \le \alpha/2 \le 2\pi; \tag{18}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad -\pi/2 \le \alpha/2 \le \pi/2; \tag{19}$$
$$= -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \pi/2 \le \alpha/2 \le 3\pi/2; \tag{20}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}; \tag{21}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}; \tag{22}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad 0 \le \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2};\ \pi \le \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{2}; \tag{23}$$
$$= -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} \le \pi;\ \frac{3\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} \le 2\pi. \tag{24}$$

Funções trigonométricas da soma, da diferença e do produto de duas funções

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}; \tag{25}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{26}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{27}$$
$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta); \tag{28}$$
$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = -\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta); \tag{29}$$
$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta); \tag{30}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta); \tag{31}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta); \tag{32}$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta); \tag{33}$$
$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \tag{34}$$

Definem-se os quatro quadrantes como segue:

$$\mathrm{I} : \{\alpha \mid 0 < \alpha < \pi/2\}$$
$$\mathrm{II} : \{\alpha \mid \pi/2 < \alpha < \pi\}$$
$$\mathrm{III} : \{\alpha \mid \pi < \alpha < 3\pi/2\}$$
$$\mathrm{IV} : \{\alpha \mid 3\pi/2 < \alpha < 2\pi\}$$

Pode-se construir o quadro 1 para os sinais das funções trigonométricas:

Quadrante	sin	cos	tan	sec	cot	csc
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	−	+	−
IV	−	+	−	+	−	−

Quadro 1 Sinais das funções trigonométricas

O quadro 2 mostra os valores das funções trigonométricas para alguns valores particulares do ângulo α.

$\alpha°$	α rad	sin	cos	tan	sec	cot	csc
0	0	0	1	0	1	∞	∞
15	$\pi/12$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	2
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}/3$	$2\sqrt{3}/3$
75	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$
90	$\pi/2$	1	0	∞	∞	0	1
120	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	-2	$-\sqrt{3}/3$	$2\sqrt{3}/3$
135	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$
150	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-2\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$	2
180	π	0	-1	0	-1	∞	∞
270	$3\pi/2$	-1	0	∞	∞	0	-1
360	2π	0	1	0	1	∞	∞

Quadro 2 Valores selecionados para as funções trigonométricas

O quadro 3 mostra como exprimir as funções trigonométricas de um ângulo β em função de um ângulo α.

$\beta =$	$-\alpha$	$\pi/2 \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$3\pi/2 \pm \alpha$	$2k\pi \pm \alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
tan	$-\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$
sec	$+\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$	$+\sec\alpha$
cot	$-\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$
csc	$-\csc\alpha$	$+\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$

Obs.: Na última coluna, k é um inteiro qualquer.

Quadro 3 Funções trigonométricas de β em função de α

Gráficos das funções trigonométricas

Gráfico de $y = \sin\alpha$, $-2\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

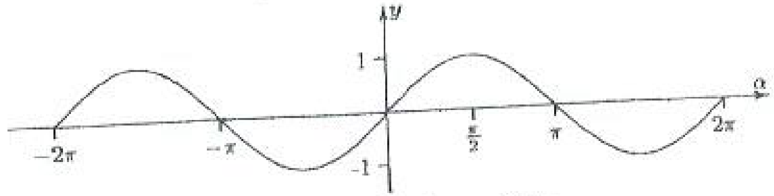


Figura 5 Gráfico de $y = \sin\alpha$

Gráfico de $y = \cos\alpha$, $-2\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

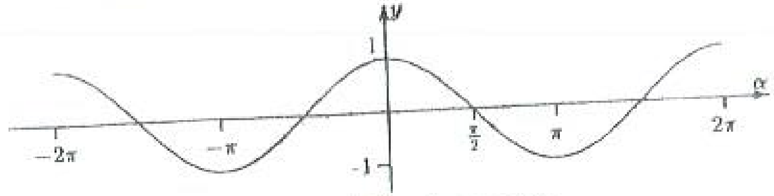


Figura 6 Gráfico de $y = \cos\alpha$

Gráfico de $y = \tan\alpha$, $-2\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

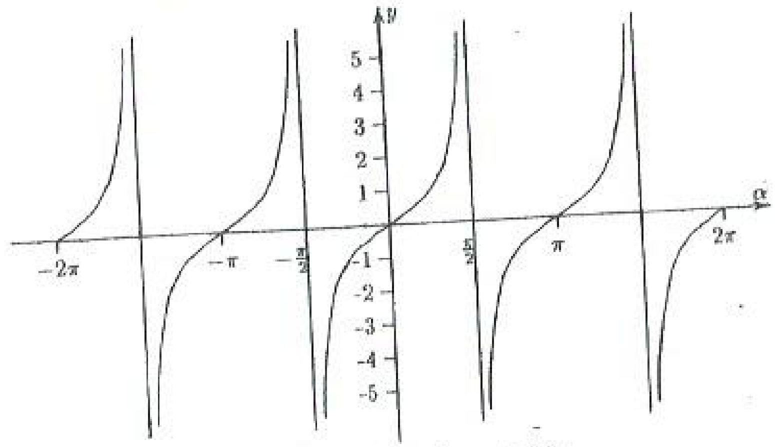


Figura 7 Gráfico de $y = \tan\alpha$

Gráfico de $y = \cot\alpha$, $\quad -2\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

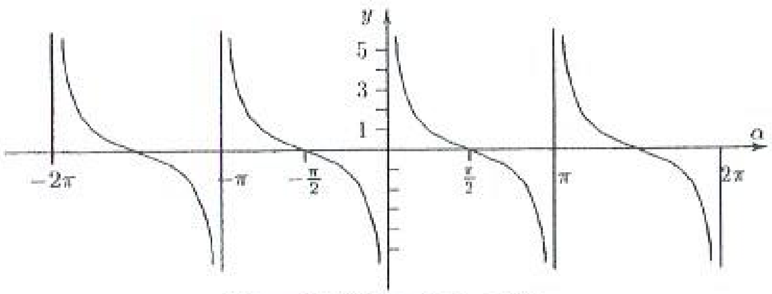


Figura 8 Gráfico de $y = \cot\alpha$

Gráfico de $y = \sec\alpha$, $\quad -2\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

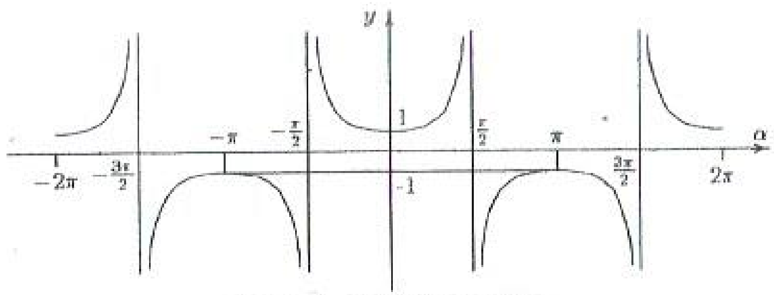


Figura 9 Gráfico de $y = \sec\alpha$

Gráfico de $y = \csc\alpha$, $\quad -2\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

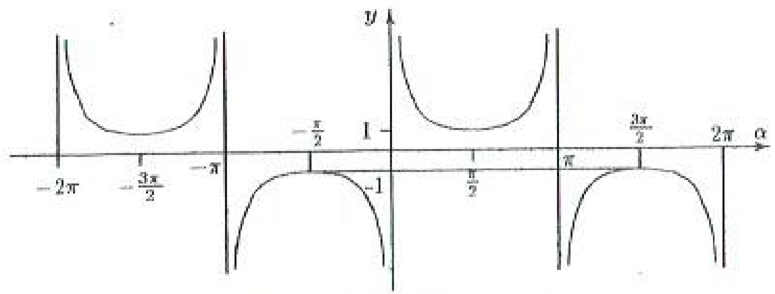


Figura 10 Gráfico de $y = \csc\alpha$

Funções trigonométricas inversas

Para $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$, $\quad \alpha = \text{Arcsin}\, y$ se, e somente se $\sin\alpha = y$.

Para $0 \leq \alpha \leq \pi$, $\quad \alpha = \text{Arccos}\, y$ se, e somente se $\cos\alpha = y$.

Para $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\quad \alpha = \text{Arctan}\, y$ se, e somente se $\tan\alpha = y$.

Gráficos de $\alpha = \text{Arcsin}\, y$, $\quad -\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ e $\alpha = \text{Arccos}\, y$, $\quad 0 \leq \alpha \leq \pi$

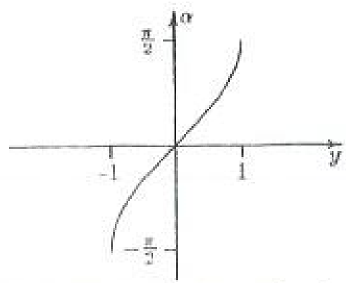


Figura 11 Gráfico de $\alpha = \text{Arcsin}\, y$

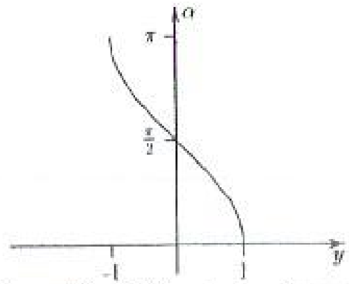


Figura 12 Gráfico de $\alpha = \text{Arccos}\, y$

Gráfico de $\alpha = \text{Arctan}\, y$, $\quad -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

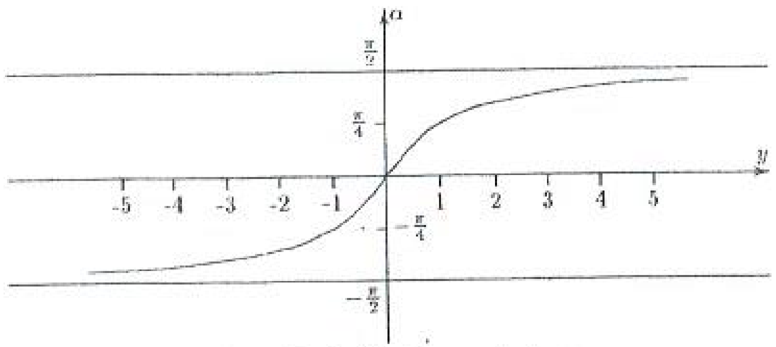


Figura 13 Gráfico de $\alpha = \text{Arctan}\, y$

De maneira geral, tem-se (k inteiro)

$$\beta = \arcsin y = (-1)^k\alpha + k\pi, \quad \alpha = \text{Arcsin}\, y;$$
$$\beta = \arccos y = \pm\alpha + 2k\pi, \quad \alpha = \text{Arccos}\, y;$$
$$\beta = \arctan y = \alpha + k\pi, \quad \alpha = \text{Arctan}\, y.$$

Para $0 < \alpha < \pi$, $\alpha = \operatorname{Arccot} y$ se, e somente se $\cot \alpha = y$.

Gráfico de $\alpha = \operatorname{Arccot} y$, $0 < \alpha < \pi$

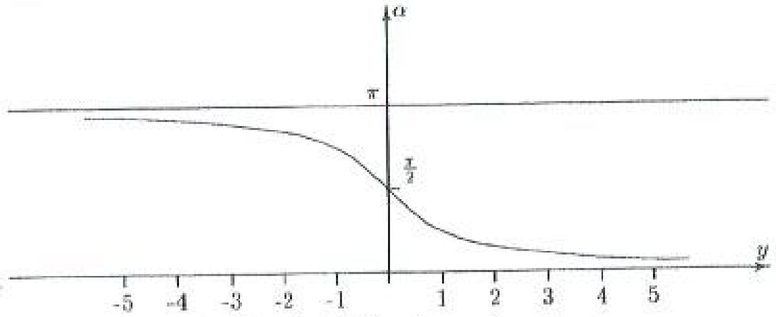


Figura 14 Gráfico de $\alpha = \operatorname{Arccot} y$

$\operatorname{Arccot} y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} y$

Para $0 \le \alpha \le \pi$, $\alpha = \operatorname{Arcsec} y$ se, e somente se $\sec \alpha = y$.

Gráfico de $\alpha = \operatorname{Arcsec} y$, $0 \le \alpha \le \pi$

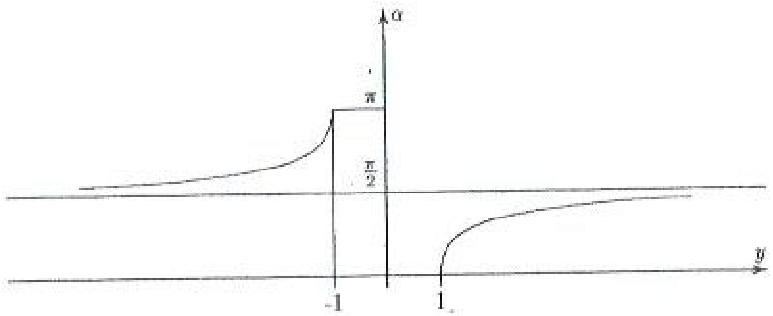


Figura 15 Gráfico de $\alpha = \operatorname{Arcsec} y$

$\operatorname{Arcsec} y = \operatorname{Arccos} \frac{1}{y} \qquad (|y| \ge 1)$

Para $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \operatorname{Arccsc} y$ se, e somente se $\csc \alpha = y$.

Gráfico de $\alpha = \operatorname{Arccsc} y$, $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

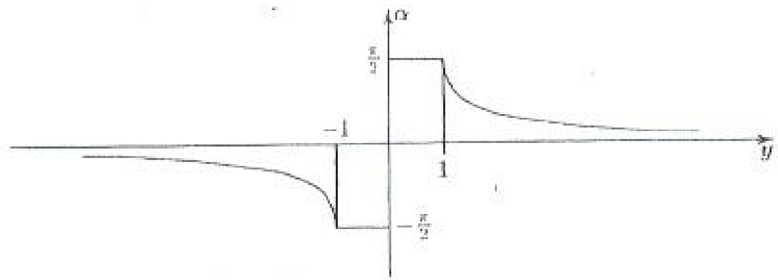


Figura 16 Gráfico de $\alpha = \operatorname{Arccsc} y$

$\operatorname{Arccsc} y = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{y} \qquad (|y| \ge 1)$

De maneira geral, tem-se (k inteiro)

$$\beta = \operatorname{arccot} y = \alpha + k\pi, \quad \alpha = \operatorname{Arccot} y;$$
$$\beta = \operatorname{arcsec} y = \pm\alpha + 2k\pi, \quad \alpha = \operatorname{Arcsec} y;$$
$$\beta = \operatorname{arccsc} y = (-1)^k\alpha + k\pi, \quad \alpha = \operatorname{Arccsc} y.$$

Identidades dos ângulos complementares

Dois ângulos α e β são complementares se

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Para $\alpha = x$ e $\beta = \frac{\pi}{2} - x$, tem-se:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x; \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x; \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x; \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x.$$

Com estas identidades pode-se escrever

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{para } -1 \le x \le 1 \tag{35}$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arccot} x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{para } -\infty < x < \infty \tag{36}$$

$$\operatorname{Arcsec} x + \operatorname{Arccsc} x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{para } |x| \ge 1 \tag{37}$$

Derivadas das funções trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

Derivadas das funções trigonométricas inversas

Com (35), (36) e (37) tem-se:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arcsin} x = -\frac{d}{dx}\operatorname{Arccos} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arctan} x = -\frac{d}{dx}\operatorname{Arccot} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arcsec} x = -\frac{d}{dx}\operatorname{Arccsc} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arcsin} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{Arccos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arctan} x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{Arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{Arccsc} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Amplitude e período de uma função

Definem-se os conceitos de amplitude e período de uma função como:

Amplitude: A amplitude a de uma função $y = f(x)$ é a média aritmética dos valores absolutos máximo e mínimo da função.

Período: O período p ($p > 0$) de uma função $y = f(x)$ é o menor número para o qual $f(x+p) = f(x)$ para todo x no domínio de $f(x)$.

$p = \pi$ para as funções $y = \tan \alpha$ e $y = \cot \alpha$.

$p = 2\pi$ para as funções $y = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$, $y = \sec \alpha$ e $y = \csc \alpha$.

Mudança de período

Seja $f(x)$ uma função periódica com período p. Fazendo-se a substituição

$$x = \frac{p}{2\pi}t,$$

obtém-se uma função $g(t)$ onde

$$g(t) = f\left(\frac{p}{2\pi}t\right).$$

A função $g(t)$ tem período 2π pois

$$g(t+2\pi) = f\left(\frac{p}{2\pi}(t+2\pi)\right) = f\left(\frac{p}{2\pi}t + p\right) = f\left(\frac{p}{2\pi}t\right) = g(t).$$

A mudança de x para t é apenas uma mudança de escala.

Seja $y = a\sin(b\alpha + c)$.

Como $\sin(b\alpha + c) = \sin b\alpha \cos c + \sin c \cos b\alpha$,

tem-se

$$y = a\cos c \sin b\alpha + a \sin c \cos b\alpha.$$

Colocando-se então $p = a\sin c$ e $q = a\cos c$, obtém-se

$$y = p\cos b\alpha + q \sin b\alpha.$$

Portanto,

$$y = a\sin(b\alpha + c) \equiv p\cos b\alpha + q\sin b\alpha$$

se as constantes a, c, p e q são ligadas pelas equações

$$a = \sqrt{p^2+q^2} \qquad c = \operatorname{Arctan}\frac{p}{q}$$

$$p = a\sin c \qquad q = a\cos c.$$

Gráfico de $y = a\sin(b\alpha + c)$, $a, b, c > 0$

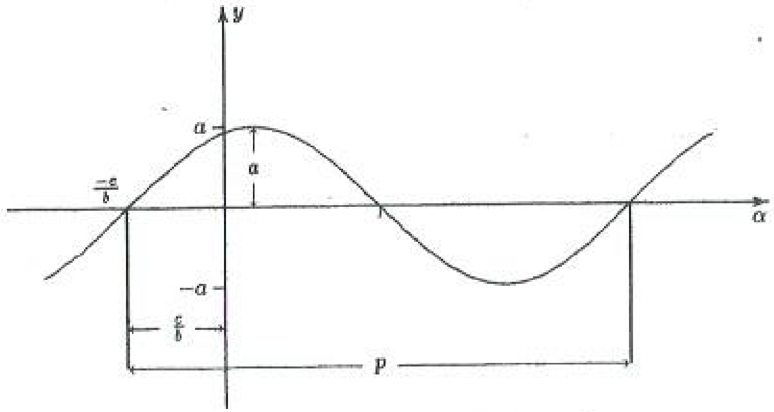


Figura 17 Gráfico de $y = a\sin(b\alpha + c)$

$$\text{Amplitude} = a$$
$$\text{Período} = p = 2\pi/b$$

Relações entre os lados e os ângulos de um triângulo plano

Seja um triângulo ABC qualquer. Representam-se por a, b, c os comprimentos dos lados opostos aos vértices A, B, C, respectivamente, como mostrado na figura 18. Temos então três relações clássicas:

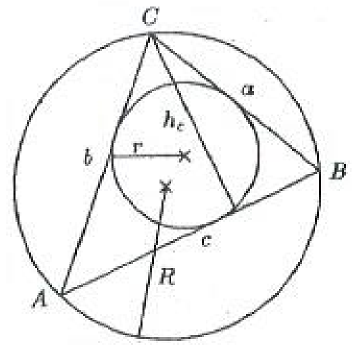


Figura 18 Disposição das letras num triângulo

Lei dos senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo.

Lei dos co-senos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Lei das tangentes

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)};$$
$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B-C)};$$
$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan\frac{1}{2}(C+A)}{\tan\frac{1}{2}(C-A)}.$$

Outras relações

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$
$$\sin B = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$
$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

onde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ é o semiperímetro do triângulo.

Fórmulas de projeção

$$a = b\cos C + c\cos B;$$
$$b = c\cos A + a\cos C;$$
$$c = a\cos B + b\cos A.$$

Fórmulas de Mollweide

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}, \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C};$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A}, \qquad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A};$$

$$\frac{c+a}{b} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C-A)}{\sin\frac{1}{2}B}, \qquad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin\frac{1}{2}(C-A)}{\cos\frac{1}{2}B},$$

além daquelas (seis outras) obtidas trocando-se a posição das duas letras (minúsculas e maiúsculas) no numerador de cada relação.

Fórmulas dos ângulos-metades

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{r}{s-a};$$

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \qquad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}};$$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \frac{r}{s-b};$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}, \qquad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}};$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \frac{r}{s-c},$$

onde r é o raio do círculo inscrito no triângulo.

Alturas do triângulo

Designam-se por h_a, h_b, h_c as alturas relativas aos vértices A, B, C, respectivamente. Na figura 18 pode-se ver h_c.

$$h_a = b\sin C = c\sin B = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$

$$h_b = a\sin C = c\sin A = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$

$$h_c = a\sin B = b\sin A = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$

$$h_a = \frac{a}{\cot B + \cot C} = a\frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)};$$

$$h_b = \frac{b}{\cot A + \cot C} = b\frac{\sin A \sin C}{\sin(A+C)};$$

$$h_c = \frac{c}{\cot A + \cot B} = c\frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)}.$$

Área do triângulo

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2\sin C};$$

$$S = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A};$$

$$S = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2\sin B};$$

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = r^2 \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = rs;$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{fórmula de Heron.}$$

Raio do círculo circunscrito ao triângulo

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Raio do círculo inscrito no triângulo

$$r = (s-a)\tan\frac{A}{2} = (s-b)\tan\frac{B}{2} = (s-c)\tan\frac{C}{2};$$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Exercícios

1) Exprimir os ângulos abaixo em graus:

a) $\pi/5$ b) $-7\pi/6$ c) $\pi/36$ d) 36π e) 4,3.

2) Exprimir os ângulos abaixo em termos de π radianos:

a) 45° b) -330° c) 72° d) 9° e) -10°.

3) Exprimir em radianos (mas não em termos de π radianos):

a) 38° b) 94° c) 390° d) $48^\circ 24'$ e) $27^\circ 20' 40''$.

4) Calcule o ângulo (em graus) formado pelas agulhas de um relógio quando elas indicam 2 h 28 min.

5) Uma roda tem um raio de 2 pés. De quantos radianos terá ela rodado se ela percorre 6 pés sem deslizar?

6) Uma polia tem um diâmetro de 20 polegadas. Sobre ela está aplicada uma correia que se desloca a 24 po/s. De quantos radianos a polia roda por segundo?

7) Um satélite é lançado numa órbita circular em torno da Terra. Se a distância do satélite ao centro da Terra é de 5000 milhas, calcule o deslocamento do satélite quando o mesmo descreve um ângulo de 60°.

8) A Terra descreve em torno do Sol uma órbita aproximadamente circular de raio 93.000.000 milhas. Supondo que a Terra se desloca de 1° por dia, calcule a distância percorrida por nosso planeta em 1 dia.

9) Um setor circular tem $162\,\text{po}^2$ de superfície. Calcule o raio do círculo para ângulos centrais em radianos de

a) 1 b) 4 c) 1296 d) 5184.

10) Qual (quais) das afirmações seguintes é (são) verdadeira(s)?

a) Se $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$, então $\cos\alpha_1 < \cos\alpha_2$;
b) Se $-\pi/2 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi/2$, então $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$;
c) Se $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi/2$, então $\tan\alpha_1 < \tan\alpha_2$.

11) Calcule as quantidades assinaladas em cada caso abaixo. Siga a notação da figura 4.

a) Se $y = 6$ e $\sin\alpha = 3/5$, calcule x e r;
b) Se $x = 4$ e $\cos\alpha = 5/6$, calcule y e r;
c) Se $y = 5$ e $\tan\alpha = 1{,}5$, calcule x e r.

Para os problemas 12 e 13, efetuar as operações indicadas e simplificar o resultado:

12) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

13) $\dfrac{1}{\sec\alpha-1}+\dfrac{3}{2\sec^2\alpha+\sec\alpha-3}$.

14) Mostrar que $\tan\alpha+\cot\alpha=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$.

15) Mostrar que $\dfrac{\sin\alpha}{\csc\alpha}=1-\dfrac{\cos\alpha}{\sec\alpha}$.

16) Mostrar que $(\sin\alpha)(\cot\alpha)+(\sin\alpha)(\csc\alpha)=\cos\alpha+1$.

17) Mostrar que $\dfrac{1}{\tan\alpha+\cot\alpha}=(\sin\alpha)(\cos\alpha)$.

18) Mostrar que $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

19) Mostrar que $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=0$.

20) Mostrar que $\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=(\csc\alpha-\cot\alpha)^2$.

21) Mostrar que $\sec\alpha-\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\tan\alpha$.

22) Mostrar que $\dfrac{2}{\sin\alpha+1}-\dfrac{2}{\sin\alpha-1}=4\sec^2\alpha$.

23) Mostrar que $(\tan\alpha+\cot\alpha)^2\sin^2\alpha-\tan^2\alpha=1$.

24) Mostrar que $(\sec\alpha-\tan\alpha)^2=\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

25) Mostrar que $\dfrac{(\sec\alpha-\tan\alpha)^2+1}{\sec\alpha\csc\alpha-\tan\alpha\csc\alpha}=2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

26) Mostrar que $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

27) Sejam $\sin\alpha=-3/5$, $\pi<\alpha<3\pi/2$ e $\cos\beta=-4/5$, $\pi/2<\beta<\pi$. Calcular:

a) $\sin(\alpha+\beta)$; b) $\sin(\alpha-\beta)$;
c) $\cos(\alpha+\beta)$; d) $\cos(\alpha-\beta)$.

Para os problemas 28, 29 e 30, $0<\beta<\alpha<\pi/2$.

28) Sejam $\sin\alpha=4/5$ e $\cos\beta=15/17$. Calcular o valor de $\sin(\alpha+\beta)$.

29) Sejam $\cos\alpha=12/13$ e $\sin\beta=7/25$. Calcular o valor de $\cos(\alpha+\beta)$.

30) Sejam $\tan\alpha=1/2$ e $\tan\beta=1/3$. Calcular o valor de $\tan(\alpha+\beta)$.

31) Colocar cada uma das expressões seguintes em função de um só número:

a) $\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{6}$;

b) $\sin\dfrac{1}{2}\cos 1+\cos\dfrac{1}{2}\sin 1$;

c) $\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{\pi}{12}$.

32) Verificar que $\sin\alpha\cos(\alpha-\pi/6)-\cos\alpha\sin(\alpha-\pi/6)=1/2$.

33) Resolver para α, $\sin 2\alpha\cos 3\alpha+\sin 3\alpha\cos 2\alpha=1/2$, se $0<\alpha<\pi/2$. Dar a resposta em termos de π.

Provar as identidades seguintes (problemas 34 a 51):

34) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$.

35) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}=\tan\alpha+\cot\beta$.

36) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$.

37) $\tan\alpha=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$.

38) $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$.

39) $\dfrac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

40) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\sec^2\alpha-\sec^2\beta$.

41) $\cot\alpha + \tan\alpha = 2\csc 2\alpha$.

42) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$.

43) $\dfrac{\cot^2\alpha - 1}{\cot^2\alpha + 1} = \cos 2\alpha$.

44) $\dfrac{1 - \sin 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha$.

45) $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$.

46) $\tan 2\alpha - \sec 2\alpha = \dfrac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}$.

47) $\dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \dfrac{2 + \sin 2\alpha}{2}$.

48) $\dfrac{\tan\alpha/2 + \cot\alpha/2}{\cot\alpha/2 - \tan\alpha/2} = \sec\alpha$.

49) $\dfrac{1 - \tan\alpha/2}{1 + \tan\alpha/2} = \sec\alpha - \tan\alpha$.

50) $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} + \tan^2\dfrac{\alpha}{2} = 0$.

51) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Calcular os valores de α, $0 \le \alpha \le \pi/2$, que satisfazem as equações dadas abaixo (problemas 52 a 55):

52) $\cos\alpha - \cos 2\alpha = 0$.

53) $\sin\alpha - \sin 2\alpha = 0$.

54) $\sin\alpha - \cos 2\alpha = 0$.

55) $\cos\alpha - \sin 2\alpha = 0$.

Calcular os valores de α, $0 \le \alpha \le 2\pi$, que verificam as equações dadas abaixo (problemas 56 a 60):

56) $\tan\alpha + \sin 2\alpha = 0$.

57) $\tan\alpha - \tan 2\alpha = 0$.

58) $\cos 2\alpha + \tan\alpha = 1$.

59) $4\sin^2(\alpha/2) - \cos^2\alpha = 3$.

60) $\tan(\alpha/2) - 2\sin\alpha = 0$.

61) Transformar $\sin 3\alpha\cos 5\alpha$ em soma.

62) Transformar $2\sin 4\alpha\cos 2\alpha$ em soma.

63) Transformar $2\sin 3\cos 6$ em soma.

64) Transformar $\cos 1\cos 3$ em soma.

65) Mostrar que $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$.

66) Mostrar que $(\sin\alpha/\sec 3\alpha) + (\cos\alpha/\csc 3\alpha) = \sin 4\alpha$.

67) Calcular α que satisfaz $\sin\alpha - \sin 3\alpha = 0$, se $0 \le \alpha \le \pi/2$.

68) Calcular α que satisfaz $\cos\alpha - \cos 3\alpha = 0$, se $0 \le \alpha \le \pi/2$.

69) Calcular α que satisfaz $\sin\alpha + \sin 3\alpha = 0$, se $0 \le \alpha \le \pi/2$.

70) Calcular α que satisfaz $\cos 3\alpha - \cos 5\alpha = 0$, se $0 \le \alpha \le \pi/2$.

71) Quais valores de α, $0 \le \alpha \le 2\pi$, satisfazem a equação seguinte:

$$\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 0.$$

72) Provar que

a) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \dfrac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$;

b) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

73) Provar que $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

74) Provar que

a) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \dfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$;

b) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

75) Provar que

a) $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \dfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$;

b) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

76) Provar que $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ sem tocar no membro da direita.

77) Provar que $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = -\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ sem tocar no membro da direita.

78) Provar que $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$ sem tocar no membro da direita.

79) Provar que $\sin n\alpha = 2\sin(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-2)\alpha$.

80) Provar que $\cos n\alpha = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos(n-2)\alpha$.

81)♠ Mostrar que† $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

Sugestão: $18 = 90 \div 5$.

82)♠ Mostrar que $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin n\alpha = S_n =$

$$\sum_{i=1}^{n} \sin i\alpha = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\,\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

83)♠ Mostrar que $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \cdots + \sin(2n-1)\alpha = S_n =$

$$\sum_{i=1}^{n} \sin(2i-1)\alpha = \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}.$$

84)♠ Mostrar que $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cdots + \cos(2n-1)\alpha = S_n =$

$$\sum_{i=1}^{n} \cos(2i-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}.$$

85) Exprimir as expressões seguintes em termos de α:

a) $\sin(\text{Arcsin}\,\alpha)$; b) $\cos(\text{Arccos}\,\alpha)$; c) $\tan(\text{Arctan}\,\alpha)$;

d)♠ $\text{Arcsin}(\sin\alpha)$; e)♠ $\text{Arccos}(\cos\alpha)$; f)♠ $\text{Arctan}(\tan\alpha)$.

86) Exprimir as quatro expressões abaixo em termos de y:

a) $\tan(2\,\text{Arctan}\,y)$; b) $\sin(2\,\text{Arctan}\,y)$;

c) $\cos(2\,\text{Arccot}\,y)$; d) $\cot(2\,\text{Arccot}\,y)$.

87) Mostrar que $\cos(\text{Arcsin}\,w + \text{Arccos}\,z) = z\sqrt{1-w^2} - w\sqrt{1-z^2}$.

88) Mostrar que $\sin(2\,\text{Arcsin}\,x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

† Fonte: Knuth, D.E., *The TEXbook*, p. 180, Addison-Wesley, 1989.

89) Mostrar que $\tan\left(\frac{1}{2}\text{Arccos}\,u\right) = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$.

90) Mostrar que $\sin(\text{Arccos}\,y) = \cos(\text{Arcsin}\,y)$.

91) Mostrar que $\text{Arcsin}\,u + \text{Arcsin}\,v \neq \text{Arcsin}(u+v)$.

92) Resolver a equação $\text{Arcsin}(-5/13) + \text{Arccos}(4/5) = \text{Arcsin}\,y$ para y.

93) Resolver a equação $\text{Arccos}(3/5) - \text{Arcsin}(4/5) = \text{Arcsin}\,y$ para y.

94) Resolver a equação $\text{Arctan}\,2x = 2\,\text{Arctan}\,x$ para x.

95) Mostrar que $\text{Arctan}\,3 + \text{Arctan}\,1/3 = \pi/2$.

96) Mostrar a validade da relação $\text{Arcsin}\,t = \text{Arctan}\,\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$.

97) Resolver a equação $2\,\text{Arcsin}\,t + \text{Arccos}\,0 = \text{Arccos}(-1)$.

98) Resolver a equação $\text{Arcsin}\,t + \text{Arccos}(1-t) = \pi/2$.

99) Resolver a equação $\text{Arctan}\,\sqrt{x} + 2\,\text{Arctan}\,\sqrt{1-x} = \pi/2$.

100)♠ Sejam α, β e γ os ângulos de um triângulo. Mostrar que†

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Nota: a resolução deste problema exige o conhecimento das noções de gradiente e Hessiano de uma função.

Sugestão: calcular α^*, β^* e γ^* que maximizam a função $f(\alpha,\beta,\gamma) = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ sujeita às restrições $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, $0 < \gamma < \pi$ e $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

† Fonte: Adams, R.A., *Single-Variable Calculus*, p. 563, Addison-Wesley, 1990.

Soluções

1)

$\pi\,\text{rad} = 180°$.

a) $\pi/5 = 180°/5 = 36°$

b) $-7\pi/6 = -7 \cdot 180°/6 = -210°$

c) $\pi/36 = 180°/36 = 5°$

d) $36\pi = 36 \cdot 180° = 6480°$

e) 4,3

$$1\,\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57{,}296° \Longrightarrow 4{,}3\,\text{rad} = 4{,}3 \cdot 57{,}296° = 246{,}372°$$

$$246{,}372° = 246° + 0{,}372°$$
$$0{,}372° = 0.372(60') = 22{,}32'$$
$$22{,}32' = 22' + 0{,}32'$$
$$0{,}32' = 0{,}32(60'') = 19.2''$$
$$4{,}3\,\text{rad} = 246{,}372° = 246°22'19{,}2''$$

2)

$$1° = \frac{\pi}{180}\,\text{rad}\,.$$

a) $45° = 45 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{4}\,\text{rad}$

b) $-330° = -330 \cdot \dfrac{\pi}{180} = -\dfrac{11\pi}{6}\,\text{rad}$

c) $72° = 72 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{2\pi}{5}\,\text{rad}$

d) $9° = 9 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{20}\,\text{rad}$

e) $-10° = -10 \cdot \dfrac{\pi}{180} = -\dfrac{\pi}{18}\,\text{rad}$

3)

$$1° = \frac{\pi}{180}\,\text{rad} = 0.01745\,\text{rad}\,.$$

a) $38° = 38 \cdot 0{,}01745 = 0{,}66310\,\text{rad}$

b) $94° = 94 \cdot 0{,}01745 = 1{,}64030\,\text{rad}$

c) $390° = 390 \cdot 0{,}01745 = 6{,}80550\,\text{rad}$

d) $48°24' = 48{,}4 \cdot 0{,}01745 = 0{,}84458\,\text{rad}$

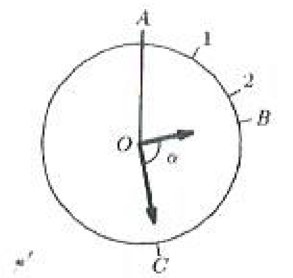
$$24' = \left(\frac{24}{60}\right)^{\circ} = 0{,}4°$$

e) $27°20'40'' = \big(27(0.01745) + 20(0.00029) + 40(0{,}00000485)\big)\,\text{rad}$

$$1' = \frac{0.01745}{60} = 0{,}00029\,\text{rad}$$

$$1'' = \frac{0{,}01745}{3600} = 0.00000485\,\text{rad}$$

4)



A agulha que indica as horas se desloca de 30° a cada 60 minutos. Escrevemos então a relação

$$\frac{60\,\text{min}}{30°} = \frac{28\,\text{min}}{x} \quad \therefore\ x = 14° .$$

$\angle AOB = 2 \times 30° + 14° = 74°$.

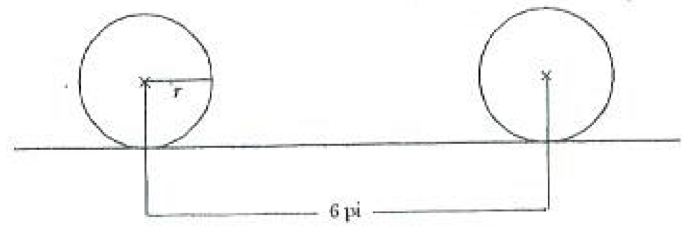
A agulha que indica os minutos se desloca de 6° a cada minuto. Escrevemos então a relação

$$\frac{1\,\text{min}}{6°} = \frac{28\,\text{min}}{x} \quad \therefore\ x = 168° .$$

$\alpha = \angle AOC - \angle AOB = 168° - 74° = 94°$.

Resp.: 94° .

5)

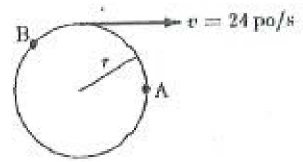


Uma rotação completa corresponde a 2π rad e a uma distancia percorrida de $2\pi r$ (pi). Escrevemos então a relação

$$\frac{2\pi r}{2\pi\,\text{rad}} = \frac{6}{x} \quad \therefore\ x = 3\,\text{rad} .$$

Resp.: 3 rad .

6)



Os pontos situados na extremidade da polia (como A e B) se deslocam a uma velocidade v de 24 po/s. Estes pontos devem percorrer uma distância $e = 2\pi r$ (po) para efetuar uma rotação completa. Da física, temos

$$t = \frac{e}{v} = \frac{2\pi r}{24} = \frac{\pi r}{12}\,\text{s} \text{ (tempo para efetuar uma rotação completa)}$$

Escrevemos então a relação

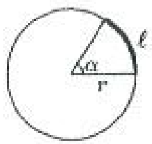
$$\frac{\frac{\pi r}{12}\,\text{s}}{2\pi\,\text{rad}} = \frac{1\,\text{s}}{x} \quad \therefore\ x = 2{,}4\,\text{rad} .$$

Resp.: 2,4 rad .

Para aqueles que conhecem a fórmula $v = \omega r$, o resultado é imediato:

$\omega = \dfrac{v}{r} = 2{,}4\,\mathrm{rad/s}$.

7)



O comprimento da circunferência de um círculo de raio r é igual a $2\pi r$. Escrevemos então a relação

$$\frac{2\pi r}{2\pi\,\mathrm{rad}} = \frac{\ell}{\alpha\ (\mathrm{rad})} \;\therefore\; \ell = \alpha r \text{ (α medido em **radianos**).}$$

Como $\alpha = 60^\circ = \pi/3\,\mathrm{rad}$, temos $\ell = \alpha r = 5000\pi/3\,\mathrm{mi}$.

Resp.: $5000\pi/3\,\mathrm{mi}$.

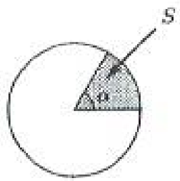
8)

Como $\alpha = 1^\circ = \pi/180\,\mathrm{rad}$, temos

$\ell = \alpha r = 1550000\pi/3\,\mathrm{mi}$.

Resp.: $1550000\pi/3\,\mathrm{mi}$.

9)



A superfície de um círculo de raio r é igual a πr^2. Escrevemos então a relação

$$\frac{\pi r^2}{2\pi\,\mathrm{rad}} = \frac{S}{\alpha\ (\mathrm{rad})} \;\therefore\; S = \frac{1}{2}\alpha r^2 \text{ (α medido em **radianos**).}$$

a) $S = \frac{1}{2}(1)r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{324} \;\therefore\; r = 18\,\mathrm{po}$

b) $S = \frac{1}{2}(4)r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{81} \;\therefore\; r = 9\,\mathrm{po}$

c) $S = \frac{1}{2}(1296)r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{\frac{324}{1296}} \;\therefore\; r = \frac{1}{2}\,\mathrm{po}$

d) $S = \frac{1}{2}(5184)r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{\frac{324}{5184}} \;\therefore\; r = \frac{1}{4}\,\mathrm{po}$

10)

a) Falsa. Basta olharmos a figura 6.

b) Verdadeira. Basta olharmos a figura 5.

c) Verdadeira. Basta olharmos a figura 7.

11)

a) $y = 6$; $\sin\alpha = 3/5 \Longrightarrow \cos\alpha = \pm 4/5$

$\sin\alpha = \frac{y}{r} \;\therefore\; r = 10 \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \;\therefore\; x = \pm 8$

b) $x = 4$; $\cos\alpha = 5/6 \Longrightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{11}/6$

$\cos\alpha = \frac{x}{r} \;\therefore\; r = 4{,}8 \qquad \sin\alpha = \frac{y}{r} \;\therefore\; y = \pm 4\sqrt{11}/5$

c) $y = 5$; $\tan\alpha = 1{,}5$

$\tan\alpha = \frac{y}{x} \;\therefore\; x = 10/3 \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \;\therefore\; r = 5\sqrt{5}/3$

12)

$$\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin^2\alpha} =$$

$$\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha(1-\sin\alpha)+1}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)} =$$

$$\frac{\sin\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan\alpha\sec\alpha$$

13)

$$\frac{1}{\sec\alpha-1}+\frac{3}{2\sec^2\alpha+\sec\alpha-3}=\frac{1}{\sec\alpha-1}+$$
$$\frac{3}{(\sec\alpha-1)(2\sec\alpha+3)}=\frac{2(\sec\alpha+3)}{2\sec^2\alpha+\sec\alpha-3}$$

14)

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$$
$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$$
$$\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$$
$$\sec\alpha\cdot\csc\alpha=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$$

15)

$$\frac{\sin\alpha}{\csc\alpha}=1-\frac{\cos\alpha}{\sec\alpha}$$
$$\sin^2\alpha=1-\frac{\cos\alpha}{\sec\alpha}$$
$$1-\cos^2\alpha=1-\frac{\cos\alpha}{\sec\alpha}$$
$$1-\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{\cos\alpha}}=1-\frac{\cos\alpha}{\sec\alpha}$$
$$1-\frac{\cos\alpha}{\sec\alpha}=1-\frac{\cos\alpha}{\sec\alpha}$$

16)

$$\sin\alpha\cot\alpha+\sin\alpha\csc\alpha=\cos\alpha+1$$
$$\sin\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\sin\alpha\frac{1}{\sin\alpha}=\cos\alpha+1$$
$$\cos\alpha+1=\cos\alpha+1$$

17)

$$\frac{1}{\tan\alpha+\cot\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\frac{1}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}}=\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos\alpha\sin\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$$

18)

$$\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$$
$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$$
$$\frac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$$
$$\frac{\sin^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$$
$$\tan^2\alpha\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$$

19)

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=0$$
$$\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)-\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=0$$
$$\frac{1-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=0$$
$$0=0$$

20)

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=(\csc\alpha-\cot\alpha)^2$$

$$\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} = (\csc\alpha - \cot\alpha)^2$$

$$\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = (\csc\alpha - \cot\alpha)^2$$

$$(\csc\alpha - \cot\alpha)^2 = (\csc\alpha - \cot\alpha)^2$$

21)

$$\sec\alpha - \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \tan\alpha$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \tan\alpha$$

$$\frac{1+\sin\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \tan\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \tan\alpha$$

$$\tan\alpha = \tan\alpha$$

22)

$$\frac{2}{\sin\alpha+1} - \frac{2}{\sin\alpha-1} = 4\sec^2\alpha$$

$$\frac{2(\sin\alpha-1)-2(\sin\alpha+1)}{\sin^2\alpha-1} = 4\sec^2\alpha$$

$$\frac{-4}{-(1-\sin^2\alpha)} = 4\sec^2\alpha$$

$$4\sec^2\alpha = 4\sec^2\alpha$$

23)

$$(\tan\alpha+\cot\alpha)^2\sin^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$$

$$(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2)\sin^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$$

$$\tan^2\alpha(\sin^2\alpha-1)+\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha = 1$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}(-\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$$

$$1 = 1$$

24)

$$(\sec\alpha - \tan\alpha)^2 = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

$$(\sec\alpha - \tan\alpha)^2 = \frac{(1-\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}$$

$$(\sec\alpha - \tan\alpha)^2 = \left(\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$$

$$(\sec\alpha - \tan\alpha)^2 = (\sec\alpha - \tan\alpha)^2$$

25)

$$\frac{(\sec\alpha-\tan\alpha)^2+1}{\sec\alpha\csc\alpha-\tan\alpha\csc\alpha} = 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}+1}{\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}} = 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\frac{2}{1+\sin\alpha}}{\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}} = 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha} = 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

26)

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)}{\cos\alpha\cos\beta\left(1+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

27)

$\sin\alpha=-3/5, \qquad \pi<\alpha<3\pi/2$

$\cos\beta=-4/5, \qquad \pi/2<\beta<\pi$

$\cos\alpha=-\sqrt{1-9/25}=-4/5 \qquad \sin\beta=\sqrt{1-16/25}=3/5$

a) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=0$

b) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=24/25$

c) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=1$

d) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=7/25$

28)

$\sin\alpha=4/5, \qquad 0<\alpha<\pi/2$

$\cos\beta=15/17, \qquad 0<\beta<\pi/2$

$\cos\alpha=\sqrt{1-16/25}=3/5 \qquad \sin\beta=\sqrt{1-225/289}=8/17$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=84/85$

29)

$\cos\alpha=12/13, \qquad 0<\alpha<\pi/2$

$\sin\beta=7/25, \qquad 0<\beta<\pi/2$

$\sin\alpha=\sqrt{1-144/169}=5/13 \qquad \cos\beta=\sqrt{1-49/625}=24/25$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=253/325$

30)

$\tan\alpha=1/2$ e $\tan\beta=1/3$.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1/2+1/3}{1-1/6}=1$$

31)

a) $\cos(\pi/3)\cos(\pi/6)+\sin(\pi/3)\sin(\pi/6)=\cos(\pi/3-\pi/6)=\cos(\pi/6)$

b) $\sin 1/2\cos 1+\cos 1/2\sin 1=\sin(1/2+1)=\sin(3/2)$

c) $1/2\cos(\pi/12)-\sqrt{3}/2\sin(\pi/12)=$

$\cos(\pi/3)\cos(\pi/12)-\sin(\pi/3)\sin(\pi/12)=\cos(\pi/3+\pi/12)=$

$\cos(5\pi/12)$

ou

$1/2\cos(\pi/12)-\sqrt{3}/2\sin(\pi/12)=$

$\sin(\pi/6)\cos(\pi/12)-\cos(\pi/6)\sin(\pi/12)=\sin(\pi/6-\pi/12)=$

$\sin(\pi/12)$

32)

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos(\alpha-\pi/6)-\cos\alpha\sin(\alpha-\pi/6)&=1/2\\
\sin\alpha(\cos\alpha\cos\pi/6+\sin\alpha\sin\pi/6)-&\\
\cos\alpha(\sin\alpha\cos\pi/6-\sin\pi/6\cos\alpha)&=1/2\\
\sin^2\alpha\sin\pi/6+\cos^2\alpha\sin\pi/6&=1/2\\
\sin\pi/6(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)&=1/2\\
1/2&=1/2
\end{aligned}$$

33)

$\sin 2\alpha\cos 3\alpha+\cos 2\alpha\sin 3\alpha=1/2, \qquad 0<\alpha<\pi/2$

$\sin(2\alpha+3\alpha)=1/2$

$$\sin(5\alpha)=1/2\Longrightarrow\begin{cases}5\alpha=\pi/6 \;\therefore\; \alpha=\pi/30\\ 5\alpha=5\pi/6 \;\therefore\; \alpha=\pi/6\\ 5\alpha=2\pi+\pi/6=13\pi/6 \;\therefore\; \alpha=13\pi/30\end{cases}$$

Resp.: $\alpha\in\{\pi/30,\pi/6,13\pi/30\}$.

34)

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$$

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\tan\alpha+\tan\beta$$

35)

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}=\tan\alpha+\cot\beta$$
$$\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\tan\alpha+\cot\beta$$
$$\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha+\cot\beta$$
$$\cot\beta+\tan\alpha=\tan\alpha+\cot\beta$$

36)

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$
$$\frac{\tan\pi/4+\tan\alpha}{1-\tan\pi/4\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$
$$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

37)

$$\tan\alpha=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$$
$$\tan\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\beta}{2\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\tan\alpha=\tan\alpha$$

38)

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$
$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}$$
$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)}{\cos\alpha\cos\beta\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)}$$
$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

39)

$$\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$
$$\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}$$
$$\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta\left(1+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)}{\cos\alpha\cos\beta\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)}$$
$$\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

40)

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\sec^2\alpha-\sec^2\beta$$
$$\frac{(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\sec^2\alpha-\sec^2\beta$$
$$\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\sec^2\alpha-\sec^2\beta$$
$$\frac{\cos^2\beta(1-\cos^2\alpha)-\cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\sec^2\alpha-\sec^2\beta$$
$$\frac{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\sec^2\alpha-\sec^2\beta$$
$$\sec^2\alpha-\sec^2\beta=\sec^2\alpha-\sec^2\beta$$

41)

$$\cot\alpha+\tan\alpha=2\csc 2\alpha$$
$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\csc 2\alpha$$
$$\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=2\csc 2\alpha$$
$$\frac{2}{2\sin\alpha\cos\alpha}=2\csc 2\alpha$$
$$\frac{2}{\sin 2\alpha}=2\csc 2\alpha$$
$$2\csc 2\alpha=2\csc 2\alpha$$

42)

$$\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$$
$$2\left(\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}\right) = 2\cot 2\alpha$$
$$\frac{2}{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = 2\cot 2\alpha$$
$$\frac{2}{\tan 2\alpha} = 2\cot 2\alpha$$
$$2\cot 2\alpha = 2\cot 2\alpha$$

43)

$$\frac{\cot^2\alpha - 1}{\cot^2\alpha + 1} = \cos 2\alpha$$
$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \qquad \text{fórmula (3)}$$
$$\frac{\csc^2\alpha - 2}{\csc^2\alpha} = \cos 2\alpha$$
$$1 - 2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$
$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos 2\alpha$$

44)

$$\frac{1-\sin 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha$$
$$\frac{1-\sin 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}\,\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha$$
$$\frac{1-\sin 2\alpha}{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha}(\sin\alpha - \cos\alpha) = \sin\alpha - \cos\alpha$$
$$\frac{1-\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}(\sin\alpha - \cos\alpha) = \sin\alpha - \cos\alpha$$
$$\sin\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha - \cos\alpha$$

45)

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$
$$\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$
$$\frac{1 - \frac{1}{\cot^2\alpha}}{\frac{2}{\cot\alpha}} = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$
$$\frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

46)

$$\tan 2\alpha - \sec 2\alpha = \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}$$
$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} - \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}$$
$$\frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} - \frac{1}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}$$
$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}$$
$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}$$
$$\frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)} = \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}$$
$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}$$
$$\frac{\cos\alpha(\tan\alpha - 1)}{\cos\alpha(\tan\alpha + 1)} = \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}$$
$$\frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1} = \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}$$

47)

$$\frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{2 + \sin 2\alpha}{2}$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$
$$\frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{2 + \sin 2\alpha}{2}$$

$$1+\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2+\sin 2\alpha}{2}$$
$$\frac{2+2\sin\alpha\cos\alpha}{2}=\frac{2+\sin 2\alpha}{2}$$
$$\frac{2+\sin 2\alpha}{2}=\frac{2+\sin 2\alpha}{2}$$

48)

$$\frac{\tan\alpha/2+\cot\alpha/2}{\cot\alpha/2-\tan\alpha/2}=\sec\alpha$$
$$\frac{\frac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2}+\frac{\cos\alpha/2}{\sin\alpha/2}}{\frac{\cos\alpha/2}{\sin\alpha/2}-\frac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2}}=\sec\alpha$$
$$\frac{\frac{\sin^2\alpha/2+\cos^2\alpha/2}{\cos\alpha/2\sin\alpha/2}}{\frac{\cos^2\alpha/2-\sin^2\alpha/2}{\sin\alpha/2\cos\alpha/2}}=\sec\alpha$$
$$\frac{1}{\cos^2\alpha/2-\sin^2\alpha/2}=\sec\alpha$$
$$\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha$$
$$\sec\alpha=\sec\alpha$$

49)

$$\frac{1-\tan\alpha/2}{1+\tan\alpha/2}=\sec\alpha-\tan\alpha$$
$$\frac{1-\frac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2}}{1+\frac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2}}=\sec\alpha-\tan\alpha$$
$$\frac{\cos\alpha/2-\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2+\sin\alpha/2}=\sec\alpha-\tan\alpha$$
$$\frac{(\cos\alpha/2-\sin\alpha/2)^2}{\cos^2\alpha/2-\sin^2\alpha/2}=\sec\alpha-\tan\alpha$$
$$\frac{1-2\sin\alpha/2\cos\alpha/2}{\cos\alpha}=\sec\alpha-\tan\alpha$$
$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sec\alpha-\tan\alpha$$
$$\sec\alpha-\tan\alpha=\sec\alpha-\tan\alpha$$

50)

$$\tan\alpha/2=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\frac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\frac{2\sin\alpha/2\cos\alpha/2}{2\cos^2\alpha/2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{(1-\cos^2\alpha)}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

51)

$$\frac{\sin 2\alpha-2\sin\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}+\tan^2\alpha/2=0$$
$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-2\sin\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}=0$$
$$\frac{\cos\alpha-1}{1+\cos\alpha}+\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}=0$$
$$\frac{\cos\alpha-1}{1+\cos\alpha}+\frac{(1-\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}=0$$
$$\frac{\cos\alpha-1}{1+\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=0$$
$$0=0$$

52)

$$\cos\alpha-\cos 2\alpha=0$$
$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos\alpha=0$$
$$2\cos^2\alpha-\cos\alpha-1=0$$
$$ax^2+bx+c=0\quad\begin{cases}x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\[2mm] x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{cases}$$

$$\cos\alpha_1 = 1 \ \therefore\ \alpha_1 = 0$$
$$\cos\alpha_2 = -1/2 \qquad \alpha_2 \notin [0, \pi/2]$$

Resp.: $\alpha = 0$.

53)

$$\sin\alpha - \sin 2\alpha = 0$$
$$\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$$
$$\sin\alpha(1 - 2\cos\alpha) = 0$$
$$\sin\alpha = 0 \ \therefore\ \alpha = 0$$
$$1 - 2\cos\alpha = 0 \rightarrow \cos\alpha = 1/2 \ \therefore\ \alpha = \pi/3$$

Resp.: $\alpha \in \{0, \pi/3\}$.

54)

$$\sin\alpha - \cos 2\alpha = 0$$
$$\sin\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) = 0$$
$$2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0$$
$$\sin\alpha_1 = -1 \qquad \alpha_1 \notin [0, \pi/2]$$
$$\sin\alpha_2 = 1/2 \ \therefore\ \alpha_2 = \pi/6$$

Resp.: $\alpha = \pi/6$.

55)

$$\cos\alpha - \sin 2\alpha = 0$$
$$\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$$
$$\cos\alpha(1 - 2\sin\alpha) = 0$$
$$\cos\alpha = 0 \ \therefore\ \alpha = \pi/2$$
$$1 - 2\sin\alpha = 0 \rightarrow \sin\alpha = 1/2 \ \therefore\ \alpha = \pi/6$$

Resp.: $\alpha \in \{\pi/6, \pi/2\}$.

56)

$$\tan\alpha + \sin 2\alpha = 0$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$$
$$\sin\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) = 0$$
$$\sin\alpha = 0 \ \therefore\ \alpha = 0, \pi, 2\pi$$

Resp.: $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$.

57)

$$\tan\alpha - \tan 2\alpha = 0$$
$$\tan\alpha - \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = 0$$
$$\tan\alpha(1 - \tan^2\alpha) - 2\tan\alpha = 0$$
$$\tan\alpha(-\tan^2\alpha - 1) = 0$$
$$\tan\alpha = 0 \ \therefore\ \alpha = 0, \pi, 2\pi$$

Resp.: $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$.

58)

$$\cos 2\alpha + \tan\alpha = 1$$
$$1 - 2\sin^2\alpha + \tan\alpha = 1$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 2\sin^2\alpha = 0$$
$$\sin\alpha(1 - 2\sin\alpha\cos\alpha) = 0$$
$$\sin\alpha = 0 \ \therefore\ \alpha = 0, \pi, 2\pi$$
$$\sin 2\alpha = 1 \rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \pi/2 \ \therefore\ \alpha = \pi/4 \\ 2\alpha = 5\pi/2 \ \therefore\ \alpha = 5\pi/4 \end{cases}$$

Resp.: $\alpha \in \{0, \pi/4, \pi, 5\pi/4, 2\pi\}$.

59)

$$4\sin^2\alpha/2 - \cos^2\alpha = 3$$
$$\sin\alpha/2 = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \text{fórmulas (17) e (18)}$$
$$4\left(\frac{1 - \cos\alpha}{2}\right) - \cos^2\alpha = 3$$
$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 1 = 0$$
$$(\cos\alpha + 1)^2 = 0 \Longrightarrow \cos\alpha = -1 \ \therefore\ \alpha = \pi$$

Resp.: $\alpha = \pi$.

60)

$$\tan\alpha/2 - 2\sin\alpha = 0$$
$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} - 2\sin\alpha = 0 \qquad (\cos\alpha \neq -1)$$
$$-\sin\alpha\left(2 - \frac{1}{1+\cos\alpha}\right) = 0$$
$$-\sin\alpha(2\cos\alpha + 1) = 0$$
$$\sin\alpha = 0 \;\therefore\; \alpha = 0, 2\pi$$
$$2\cos\alpha + 1 = 0 \Longrightarrow \cos\alpha = -1/2 \;\therefore\; \alpha = 2\pi/3, 4\pi/3$$

Resp.: $\alpha \in \{0, 2\pi/3, 4\pi/3, 2\pi\}$.

61)

$$\sin 3\alpha\cos 5\alpha = \frac{1}{2}(\sin(3+5)\alpha + \sin(3-5)\alpha) = \frac{1}{2}(\sin 8\alpha - \sin 2\alpha)$$

62)

$$2\sin 4\alpha\cos 2\alpha = \sin(4+2)\alpha + \sin(4-2)\alpha = \sin 6\alpha + \sin 2\alpha$$

63)

$$2\sin 3\cos 6 = \sin(3+6) + \sin(3-6) = \sin 9 - \sin 3$$

64)

$$\cos 1\cos 3 = \frac{1}{2}(\cos(1+3) + \cos(1-3)) = \frac{1}{2}(\cos 4 + \cos 2)$$

65)

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$$
$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

66)

$$\frac{\sin\alpha}{\sec 3\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\csc 3\alpha} = \sin 4\alpha$$
$$\sin\alpha\cos 3\alpha + \cos\alpha\sin 3\alpha = \sin 4\alpha$$
$$\frac{1}{2}(\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) + \frac{1}{2}(\sin 4\alpha + \sin 2\alpha) = \sin 4\alpha$$
$$\sin 4\alpha = \sin 4\alpha$$

67)

Primeira solução:

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\sin\alpha - \sin 3\alpha = 0$$
$$\sin\alpha(4\sin^2\alpha - 2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = 0 \;\therefore\; \alpha = 0 \quad (\alpha \in [0, \pi/2]) \\ \sin^2\alpha = 1/2 \Longrightarrow \sin\alpha = \sqrt{2}/2 \;\therefore\; \alpha = \pi/4 \end{cases}$$

Resp.: $\alpha \in \{0, \pi/4\}$.

Segunda solução:

$$\sin\alpha - \sin 3\alpha = 2\sin(-\alpha)\cos 2\alpha$$
$$-2\sin\alpha\cos 2\alpha = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = 0 \;\therefore\; \alpha = 0 \quad (\alpha \in [0, \pi/2]) \\ \cos 2\alpha = 0 \Longrightarrow 2\alpha = \pi/2 \;\therefore\; \alpha = \pi/4 \end{cases}$$

Resp.: $\alpha \in \{0, \pi/4\}$.

68)

$$\cos\alpha - \cos 3\alpha = -2\sin 2\alpha\sin(-\alpha) = 2\sin 2\alpha\sin\alpha$$
$$2\sin 2\alpha\sin\alpha = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = 0 \;\therefore\; \alpha = 0 \quad (\alpha \in [0, \pi/2]) \\ \sin 2\alpha = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \;\therefore\; \alpha = 0 \\ 2\alpha = \pi \;\therefore\; \alpha = \pi/2 \end{cases} \end{cases}$$

Resp.: $\alpha \in \{0, \pi/2\}$.

69)

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha\cos(-\alpha) = 2\sin 2\alpha\cos\alpha$$
$$2\sin 2\alpha\cos\alpha = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 0 \;\therefore\; \alpha = \pi/2 \\ \sin 2\alpha = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \;\therefore\; \alpha = 0 \\ 2\alpha = \pi \;\therefore\; \alpha = \pi/2 \end{cases} \end{cases}$$

Resp.: $\alpha \in \{0, \pi/2\}$.

70)

$$\cos 3\alpha - \cos 5\alpha = -2\sin 4\alpha \sin(-\alpha) = 2\sin 4\alpha \sin\alpha$$

$$2\sin 4\alpha \sin\alpha = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = 0 \therefore \alpha = 0 \\ \sin 4\alpha = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 4\alpha = 0 \therefore \alpha = 0 \\ 4\alpha = \pi \therefore \alpha = \pi/4 \\ 4\alpha = 2\pi \therefore \alpha = \pi/2 \end{cases} \end{cases}$$

Resp.: $\alpha \in \{0, \pi/4, \pi/2\}$.

71)

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha \cos(-\alpha) = 2\sin 2\alpha \cos\alpha$$

$$\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 0$$

$$2\sin 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha = 0$$

$$\sin 2\alpha(2\cos\alpha - 1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 1/2 \therefore \begin{cases} \alpha = \pi/3 \\ \alpha = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3 \end{cases} \\ \sin 2\alpha = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \therefore \alpha = 0 \\ 2\alpha = \pi \therefore \alpha = \pi/2 \\ 2\alpha = 2\pi \therefore \alpha = \pi \\ 2\alpha = 3\pi \therefore \alpha = 3\pi/2 \\ 2\alpha = 4\pi \therefore \alpha = 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

Resp.: $\alpha \in \{0, \pi/3, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 5\pi/3, 2\pi\}$.

72)

$$\sin(u+v) + \sin(u-v) = \sin u\cos v + \sin v\cos u + \sin u\cos v - \sin v\cos u = 2\sin u\cos v \qquad (*)$$

a) Sejam $u = \alpha$ e $v = \beta$. Podemos escrever $(*)$ como
$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta); \qquad \square$$

b) Sejam $u+v = \alpha$ e $u-v = \beta$. Então $u = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ e $v = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Podemos agora escrever $(*)$ como

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad \square$$

73)

$$\sin(u+v) - \sin(u-v) = \sin u\cos v + \sin v\cos u - (\sin u\cos v - \sin v\cos u) = 2\sin v\cos u \qquad (*)$$

Pelo mesmo raciocínio utilizado no problema 72, podemos escrever $(*)$ como

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad \square$$

74)

$$\cos(u+v) + \cos(u-v) = \cos u\cos v - \sin u\sin v + \cos u\cos v + \sin u\sin v = 2\cos u\cos v \qquad (*)$$

a) Sejam $u = \alpha$ e $v = \beta$. Podemos escrever $(*)$ como
$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$.

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta); \qquad \square$$

b) Sejam $u+v = \alpha$ e $u-v = \beta$. Então $u = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ e $v = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Podémos agora escrever $(*)$ como

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad \square$$

75)

$$\cos(u+v) - \cos(u-v) = \cos u\cos v - \sin u\sin v - (\cos u\cos v + \sin u\sin u) = -2\sin u\sin v \qquad (*)$$

Pelo mesmo raciocínio utilizado no problema 74, podemos escrever $(*)$ como

a) $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \dfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta);$ $\square$

b) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$ $\square$

76)

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = (\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta)$$

Segundo o problema 72, $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Segundo o problema 73, $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Como $2\sin a\cos a = \sin 2a$, então

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta). \quad \square$$

77)

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = (\cos\alpha + \cos\beta)(\cos\alpha - \cos\beta).$$

Segundo o problema 74, $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Segundo o problema 75, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = -\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot$$

$$\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Como $2\sin a\cos a = \sin 2a$, então

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = -\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta). \quad \square$$

78)

$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = (\cos\alpha + \sin\beta)(\cos\alpha - \sin\beta)$$

$$\cos(u+v) + \sin(u-v) = \underbrace{\cos u\cos v - \sin u\sin v}_{a} + \underbrace{\sin u\cos v - \sin v\cos u}_{b}$$

$$\cos(u+v) - \sin(u-v) = a - b$$

$$(\cos(u+v) + \sin(u-v))(\cos(u+v) - \sin(u-v)) = (a+b)(a-b). \quad (*)$$

Sejam $u+v=\alpha$ e $u-v=\beta$. Então $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$ e $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Podemos agora escrever $(*)$ como

$(\cos\alpha + \sin\beta)(\cos\alpha - \sin\beta) = (a+b)(a-b)$.

$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = a^2 - b^2$

$a^2 - b^2 = \cos^2 u\cos^2 v + \sin^2 u\sin^2 v - \sin^2 u\cos^2 v - \sin^2 v\cos^2 u$

$a^2 - b^2 = \cos^2 v(\cos^2 u - \sin^2 u) - \sin^2 v(\cos^2 u - \sin^2 u)$

$a^2 - b^2 = (\cos^2 u - \sin^2 u)(\cos^2 v - \sin^2 v)$

Como $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, então

$a^2 - b^2 = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos 2u\cos 2v$.

Portanto

$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta). \quad \square$$

79)

$\sin n\alpha = \sin(n-1+1)\alpha = \sin(n-1)\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos(n-1)\alpha =$

$2\sin(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-1)\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos(n-1)\alpha =$

$2\sin(n-1)\alpha\cos\alpha - (\sin(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos(n-1)\alpha)$.

Observe que

$\sin(n-2)\alpha = \sin(n-1-1)\alpha = \sin(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos(n-1)\alpha$.

Portanto

$$\sin n\alpha = 2\sin(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-2)\alpha. \quad \square$$

80)

$\cos n\alpha = \cos(n-1+1)\alpha = \cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-1)\alpha\sin\alpha =$

$2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-1)\alpha\sin\alpha =$

$2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - (\cos(n-1)\alpha\cos\alpha + \sin(n-1)\alpha\sin\alpha)$.

Observe que

$\cos(n-2)\alpha = \cos(n-1-1)\alpha = \cos(n-1)\alpha\cos\alpha + \sin(n-1)\alpha\sin\alpha$.

Portanto

$$\cos n\alpha = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos(n-2)\alpha. \quad \square$$

81)

$$\sin 90^\circ = \sin(5\cdot 18^\circ) = 1$$
$$\cos 90^\circ = \cos(5\cdot 18^\circ) = 0$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha - 8\sin^3\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$
$$\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha \qquad (*)$$
$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha \qquad (**)$$

Colocando $\alpha = 18^\circ$ e $\cos\alpha = x$ teremos, para a equação (**),

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0.$$

Como $0 < x < 1$, podemos dividir a equação acima por x.

$$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0.$$

Colocamos agora $y = x^2$.

$$16y^2 - 20y + 5 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8} \\ y_2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8} \end{cases}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - x^2 = 1 - y \;\therefore\; \sin\alpha = +\sqrt{1-y}.$$

$$\sin\alpha_1 = \sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}} =$$
$$\frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$$

$$\sin\alpha_2 = \sqrt{1 - \frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

Devemos mostrar agora que o problema possui somente uma solução. A equação (*) vale 1 para a boa solução.
Mediante algumas operações elementares, podemos verificar que:

$$16\sin^5\alpha_1 - 20\sin^3\alpha_1 + 5\sin\alpha_1 = 1;$$
$$16\sin^5\alpha_2 - 20\sin^3\alpha_2 + 5\sin\alpha_2 = -1.$$

Portanto

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1). \qquad \square$$

82)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sin i\alpha = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin n\alpha$$

$$S_n = \sin\alpha + \underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha} + \underbrace{2\sin 2\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}_{\sin 3\alpha} +$$
$$\underbrace{2\sin 3\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha}_{\sin 4\alpha} + \cdots +$$
$$\underbrace{2\sin(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-2)\alpha}_{\sin n\alpha}$$

$$S_n = \sin\alpha - (\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin(n-2)\alpha) +$$
$$2\cos\alpha(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin(n-1)\alpha)$$

Adicionando e subtraindo os termos que faltam para formar S_n dentro dos parênteses, teremos

$$S_n = \sin\alpha + \sin(n-1)\alpha + \sin n\alpha - S_n - 2\cos\alpha\sin n\alpha + 2\cos\alpha S_n$$
$$2S_n(1-\cos\alpha) = \sin\alpha + \sin n\alpha - (2\sin n\alpha\cos\alpha - \sin(n-1)\alpha)$$
$$2(1-\cos\alpha)S_n = \sin\alpha + \sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha \qquad (*)$$

Observe que

$$\cos\alpha = \cos 2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin n\alpha = 2\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cos\frac{n-1}{2}\alpha \qquad \text{(segundo (25))}$$

$$\sin(n+1)\alpha = \sin 2\frac{n+1}{2}\alpha = 2\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cos\frac{n+1}{2}\alpha$$

Retornamos à equação (*) com estes novos valores:

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2}S_n = 2\sin\frac{n+1}{2}\alpha\left(\cos\frac{n-1}{2}\alpha - \cos\frac{n+1}{2}\alpha\right)$$

Observe que

$$\cos\frac{n-1}{2}\alpha - \cos\frac{n+1}{2}\alpha = -2\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{-\alpha}{2} =$$
$$2\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2} \qquad \text{(segundo (27))}$$

Portanto

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2}S_n = 2\sin\frac{n+1}{2}\alpha\, 2\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$S_n = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad \square$$

83)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sin(2i-1)\alpha = \sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \cdots + \sin(2n-1)\alpha$$

$$S_n = \sin\alpha + \underbrace{2\sin 2\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}_{\sin 3\alpha} + \underbrace{2\sin 4\alpha\cos\alpha - \sin 3\alpha}_{\sin 5\alpha} + \cdots +$$

$$\underbrace{2\sin(2n-2)\alpha\cos\alpha - \sin(2n-3)\alpha}_{\sin(2n-1)\alpha}$$

$$S_n = \sin\alpha - (\sin\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin(2n-3)\alpha) +$$
$$2\cos\alpha(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \cdots + \sin(2n-2)\alpha)$$

Adicionando e subtraindo os termos que faltam para formar S_n dentro dos parenteses, teremos

$$S_n = \sin\alpha + \sin(2n-1)\alpha - S_n +$$
$$2\cos\alpha(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \cdots + \sin(2n-2)\alpha)$$

Agora observamos que

$$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \cdots + \sin(2n-2)\alpha = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$$
$$+ \sin 4\alpha + \cdots + \sin(2n-1)\alpha$$
$$- (\sin\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin(2n-1)\alpha).$$

Alors,

$$2(1+\cos\alpha)S_n = \sin\alpha + \sin(2n-1)\alpha +$$
$$2\cos\alpha\,\underbrace{(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin(2n-1)\alpha)}_{S} \qquad (*)$$

Observe que

$$\cos\alpha = \cos 2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\sin\alpha + \sin(2n-1)\alpha = 2\sin n\alpha\cos(n-1)\alpha \qquad \text{(segundo (25))}$$

$$S = \frac{\sin n\alpha\sin\frac{2n-1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{(segundo o resultado do}$$

problema 82 onde $n = 2n-1$)

Retornamos à equação (*) com estes novos valores:

$$2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)S_n = 2\sin n\alpha\cos(n-1)\alpha + 2\cos\alpha\frac{\sin n\alpha\sin\frac{2n-1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Multiplicamos por $\sin\frac{\alpha}{2}$ e dividimos por 2 os dois membros da equação acima:

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)S_n = \sin\frac{\alpha}{2}\sin n\alpha\cos(n-1)\alpha +$$
$$\cos\alpha\sin n\alpha\sin\frac{2n-1}{2}\alpha$$

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\right)S_n = \sin n\alpha\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{2n-2}{2}\alpha + \cos\frac{2\alpha}{2}\sin\frac{2n-1}{2}\alpha\right)$$

Observe que

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{2n-2}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sin\frac{2n-1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sin\frac{3-2n}{2}\alpha =$$
$$\frac{1}{2}\sin\frac{2n-1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\sin\frac{2n-3}{2}\alpha \qquad \text{(segundo (33))}$$

$$\cos\frac{2\alpha}{2}\sin\frac{2n-1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sin\frac{2n+1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sin\frac{2n-3}{2}\alpha$$
$$\text{(segundo (33))}$$

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\right)S_n = \sin n\alpha\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2n-1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sin\frac{2n+1}{2}\alpha\right)$$

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\right)S_n = \frac{1}{2}\sin n\alpha\left(\sin\frac{2n-1}{2}\alpha + \sin\frac{2n+1}{2}\alpha\right)$$

$$\sin\frac{2n-1}{2}\alpha + \sin\frac{2n+1}{2}\alpha = 2\sin n\alpha\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \text{(segundo (25))}$$

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\right)S_n = \sin n\alpha\sin n\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$$

Portanto

$$S_n = \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}. \qquad \square$$

84)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \cos(2i-1)\alpha = \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cdots + \cos(2n-1)\alpha$$

$$S_n = \cos\alpha + \underbrace{2\cos 2\alpha\cos\alpha - \cos\alpha}_{\cos 3\alpha} + \underbrace{2\cos 4\alpha\cos\alpha - \cos 3\alpha}_{\cos 5\alpha} + \cdots + \underbrace{2\cos(2n-2)\alpha\cos\alpha - \cos(2n-3)\alpha}_{\cos(2n-1)\alpha}$$

$$S_n = \cos\alpha - (\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos(2n-3)\alpha) + 2\cos\alpha(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cdots + \cos(2n-2)\alpha)$$

Adicionando e subtraindo o termo que falta para formar S_n dentro do primeiro par de parênteses, teremos

$$S_n = \cos\alpha + \cos(2n-1)\alpha - S_n + 2\cos\alpha(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cdots + \cos(2n-2)\alpha).$$

Adicionamos e subtraímos $2\cos\alpha\cos 0\alpha$:

$$2S_n = \cos\alpha + \cos(2n-1)\alpha - 2\cos\alpha\underbrace{\cos 0\alpha}_{1} + 2\cos\alpha(\cos 0\alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cdots + \cos(2n-2)\alpha)$$

$$2S_n = \cos\alpha + \cos(2n-1)\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos\alpha(\cos(1-1)\alpha + \cos(3-1)\alpha + \cos(5-1)\alpha + \cdots + \cos(2n-1-1)\alpha).$$

Desenvolvemos agora

$$\underbrace{(\cos(1-1)\alpha + \cos(3-1)\alpha + \cdots + \cos(2n-1-1)\alpha)}_{A}.$$

$$A = \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha\cos\alpha + \sin 3\alpha\sin\alpha + \cdots + \cos(2n-1)\alpha\cos\alpha + \sin(2n-1)\alpha\sin\alpha$$

$$2S_n = -\cos\alpha + \cos(2n-1)\alpha + 2\cos^2\alpha(\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos(2n-1)\alpha) + 2\cos\alpha\sin\alpha\underbrace{(\sin\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin(2n-1)\alpha)}_{S} \qquad (*)$$

Observe que

$$S = \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha} \qquad \text{(segundo o resultado do problema 83)}$$

Retornamos à equação $(*)$ com este novo valor:

$$2(1-\cos^2\alpha)S_n = -\cos\alpha + \cos(2n-1)\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$$

Observe que

$$-\cos\alpha + \cos(2n-1)\alpha = -2\sin n\alpha\sin(n-1)\alpha \qquad \text{(segundo (27))}$$

$$2\sin^2\alpha\, S_n = -2\sin n\alpha\sin(n-1)\alpha + 2\cos\alpha\sin^2 n\alpha$$

$$\sin^2\alpha\, S_n = \sin n\alpha(\sin n\alpha\cos\alpha - \sin(n-1)\alpha)$$

Observe que

$$\sin n\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin(n+1)\alpha + \frac{1}{2}\sin(n-1)\alpha \qquad \text{(segundo (33))}$$

$$\sin^2\alpha\, S_n = \frac{1}{2}\sin n\alpha(\sin(n+1)\alpha - \sin(n-1)\alpha)$$

Observe que

$$\sin(n+1)\alpha - \sin(n-1)\alpha = 2\sin\alpha\cos n\alpha \qquad \text{(segundo (25))}$$

$$\sin^2\alpha\, S_n = \sin n\alpha\sin\alpha\cos n\alpha$$

$$S_n = \frac{\sin n\alpha\cos n\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin n\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}$$

Portanto

$$S_n = \frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}. \qquad \square$$

85)

a)

$$\left.\begin{array}{l} z = \sin(\underbrace{\operatorname{Arcsin} y}_{\alpha}) \Longrightarrow z = \sin\alpha \\ \alpha = \operatorname{Arcsin} y \Longrightarrow y = \sin\alpha \end{array}\right\} z = y$$

Resp.: $\sin(\operatorname{Arcsin} y) = y$.

b)

$$\left.\begin{array}{l} z = \cos(\underbrace{\operatorname{Arccos} y}_{\alpha}) \Longrightarrow z = \cos\alpha \\ \alpha = \operatorname{Arccos} y \Longrightarrow y = \cos\alpha \end{array}\right\} z = y$$

Resp.: $\cos(\operatorname{Arccos} y) = y$.

c)

$$\left.\begin{array}{l} z = \tan(\underbrace{\operatorname{Arctan} y}_{\alpha}) \Longrightarrow z = \tan\alpha \\ \alpha = \operatorname{Arctan} y \Longrightarrow y = \tan\alpha \end{array}\right\} z = y$$

Resp.: $\tan(\operatorname{Arctan} y) = y$.

d)

$$\beta = \operatorname{Arcsin}(\underbrace{\sin\alpha}_{y}) \Longrightarrow \frac{-\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} \beta = \operatorname{Arcsin} y \Longrightarrow \sin\beta = y \\ \sin\alpha = y \end{array}\right\} \sin\beta = \sin\alpha$$

A equação $\sin\beta = \sin\alpha$ tem como soluções

$$\beta = (-1)^k\alpha + k\pi, \qquad k \text{ inteiro.}$$

Como $\frac{-\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$, temos

$$\operatorname{Arcsin}(\sin\alpha) = \alpha + 2\pi, \quad \text{se } \frac{-5\pi}{2} \le \alpha \le \frac{-3\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arcsin}(\sin\alpha) = -\pi - \alpha, \quad \text{se } \frac{-3\pi}{2} < \alpha < \frac{-\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arcsin}(\sin\alpha) = \alpha, \quad \text{se } \frac{-\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arcsin}(\sin\alpha) = \pi - \alpha, \quad \text{se } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arcsin}(\sin\alpha) = \alpha - 2\pi, \quad \text{se } \frac{3\pi}{2} \le \alpha \le \frac{5\pi}{2}$$

E generalizando, $\operatorname{Arcsin}(\sin\alpha) =$

$$= \begin{cases} \alpha - 2k\pi, & \text{se } (4k-1)\frac{\pi}{2} \le \alpha \le (4k+1)\frac{\pi}{2} \\ (2k+1)\pi - \alpha, & \text{se } (4k+1)\frac{\pi}{2} < \alpha < (4k+3)\frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad k \text{ inteiro.}$$

O gráfico de $\beta = \operatorname{Arcsin}(\sin\alpha)$ é

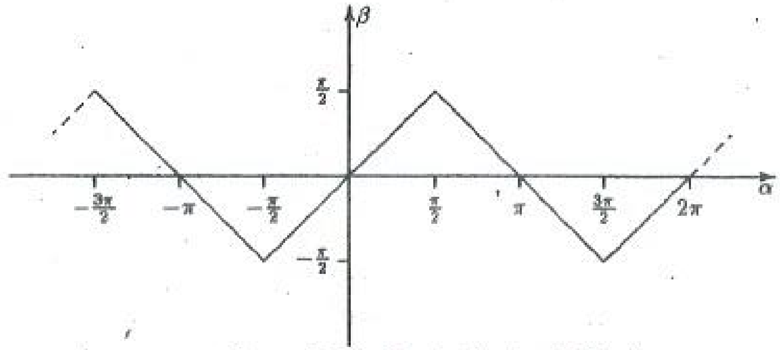


Figura 19 Gráfico de $\beta = \operatorname{Arcsin}(\sin\alpha)$

Sabendo que a função $\beta(\alpha)$ é periódica com período 2π (período de $\sin\alpha$) e observando o gráfico de $\beta(\alpha)$, podemos amelhorar a apresentação de nossa solução.

Se $-\frac{\pi}{2} \le \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\beta(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \left|\alpha - \frac{\pi}{2}\right|$.

Fora do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, podemos definir a função β considerando sua periodicidade.

Se $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, então

$$\beta(\alpha) = \beta(\alpha - 2k\pi) = \frac{\pi}{2} - \left|\alpha - 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right|.$$

Colocamos agora $y = \beta$ e $x = \alpha$. Escrevemos então $y = f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin x)$. Para aqueles que conhecem o cálculo diferencial, calcular a derivada $f'(x)$ de $f(x)$ torna-se um problema bem fácil utilizando-se a figura 19. Se c é uma constante, nós notamos que

$$y = x + c \quad \text{se} \quad \cos x > 0$$
$$y = -x + c \quad \text{se} \quad \cos x < 0$$

Portanto $y' = f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \cos x > 0 \\ -1 & \text{se } \cos x < 0 \end{cases}$

e se $\cos x = 0$, $f(x)$ não é derivável.

e)

$$\beta = \text{Arccos}(\underbrace{\cos\alpha}_{y}) \Longrightarrow 0 \leq \beta \leq \pi$$

$$\left.\begin{array}{r} \beta = \text{Arccos}\, y \Longrightarrow \cos\beta = y \\ \cos\alpha = y \end{array}\right\} \quad \cos\beta = \cos\alpha$$

A equação $\cos\beta = \cos\alpha$ tem como soluções

$\beta = \pm\alpha + 2k\pi, \qquad k$ inteiro.

Como $0 \leq \beta \leq \pi$, temos

$\text{Arccos}(\cos\alpha) = -\alpha - 2\pi, \quad \text{se} \quad -3\pi < \alpha < -2\pi$

$\text{Arccos}(\cos\alpha) = \alpha + 2\pi, \quad \text{se} \quad -2\pi \leq \alpha \leq -\pi$

$\text{Arccos}(\cos\alpha) = -\alpha, \quad \text{se} \quad -\pi < \alpha < 0$

$\text{Arccos}(\cos\alpha) = \alpha, \quad \text{se} \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$

$\text{Arccos}(\cos\alpha) = -\alpha + 2\pi, \quad \text{se} \quad \pi < \alpha < 2\pi$

E generalizando,

$$\text{Arccos}(\cos\alpha) = \begin{cases} -\alpha + 2k\pi, & \text{se } (2k-1)\pi < \alpha < 2k\pi \\ \alpha - 2k\pi, & \text{se } 2k\pi \leq \alpha \leq (2k+1)\pi \end{cases} \qquad k \text{ inteiro.}$$

O gráfico de $\beta = \text{Arccos}(\cos\alpha)$ é

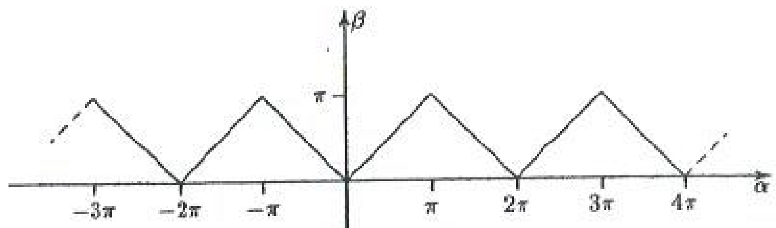


Figura 20 Gráfico de $\beta = \text{Arccos}(\cos\alpha)$

Sabendo que a função $\beta(\alpha)$ é periódica com período 2π (período de $\cos\alpha$) e observando o gráfico de $\beta(\alpha)$, podemos amelhorar a apresentação de nossa solução.

Se $-\pi < \alpha \leq \pi$, então $\beta(\alpha) = |\alpha|$.

Fora do intervalo $(-\pi, \pi]$, podemos definir a função β considerando sua periodicidade.

Se $(2k-1)\pi < \alpha \leq (2k+1)\pi$, então

$$\beta(\alpha) = \beta(\alpha - 2k\pi) = |\alpha - 2k\pi|.$$

Colocamos agora $y = \beta$ e $x = \alpha$. Escrevemos então $y = f(x) = \text{Arccos}(\cos x)$. Para aqueles que conhecem o cálculo diferencial, calcular a derivada $f'(x)$ de $f(x)$ torna-se um problema bem fácil utilizando-se a figura 20. Se c é uma constante, nós notamos que

$$y = x + c \quad \text{se} \quad \sin x > 0$$
$$y = -x + c \quad \text{se} \quad \sin x < 0$$

Portanto $y' = f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sin x > 0 \\ -1 & \text{se } \sin x < 0 \end{cases}$

e se $\sin x = 0$, $f(x)$ não é derivável.

f)

$$\beta = \text{Arctan}(\underbrace{\tan\alpha}_{y}) \Longrightarrow \frac{-\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} \beta = \text{Arctan}\, y \Longrightarrow \tan\beta = y \\ \tan\alpha = y \end{array}\right\} \quad \tan\beta = \tan\alpha$$

A equação $\tan\beta = \tan\alpha$ tem como soluções

$\beta = \alpha + k\pi, \qquad k$ inteiro.

Como $\frac{-\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, temos

$\text{Arctan}(\tan\alpha) = \alpha + 2\pi, \quad \text{se} \quad \frac{-5\pi}{2} < \alpha < \frac{-3\pi}{2}$

$\text{Arctan}(\tan\alpha) = \alpha + \pi, \quad \text{se} \quad \frac{-3\pi}{2} < \alpha < \frac{-\pi}{2}$

$\text{Arctan}(\tan\alpha) = \alpha, \quad \text{se} \quad \frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\text{Arctan}(\tan\alpha) = \alpha - \pi, \quad \text{se} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$$\operatorname{Arctan}(\tan\alpha) = \alpha - 2\pi, \quad \text{se } \frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{5\pi}{2}$$

E generalizando,

$$\operatorname{Arctan}(\tan\alpha) = \alpha - k\pi, \text{ se } (2k-1)\frac{\pi}{2} < \alpha < (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad k \text{ inteiro.}$$

O gráfico de $\beta = \operatorname{Arctan}(\tan\alpha)$ é

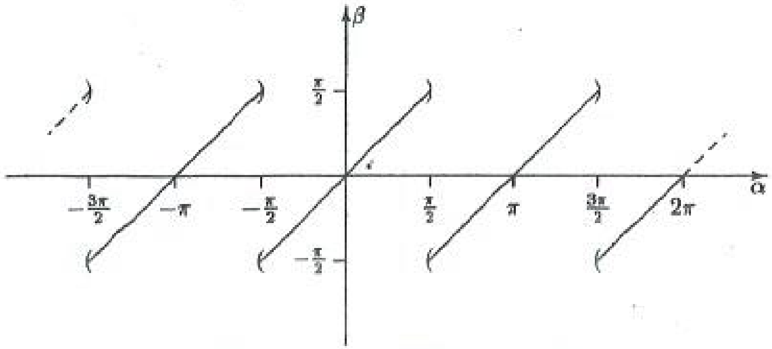


Figura 21 Gráfico de $\beta = \operatorname{Arctan}(\tan\alpha)$

Colocamos agora $y = \beta$ e $x = \alpha$. Escrevemos então $y = f(x) = \operatorname{Arctan}(\tan x)$. Para aqueles que conhecem o cálculo diferencial, calcular a derivada $f'(x)$ de $f(x)$ torna-se um problema bem fácil utilizando-se a figura 21. Se c é uma constante, nós notamos que

$$y = x + c \quad \text{se} \quad \cos x \neq 0$$

Portanto $y' = f'(x) = 1 \quad \text{se} \quad \cos x \neq 0$

e se $\cos x = 0$, $f(x)$ não é derivável.

86)

a)

$\operatorname{Arctan} y = \alpha \ \therefore\ \tan\alpha = y$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2y}{1-y^2};$$

b)

$\operatorname{Arctan} y = \alpha \ \therefore\ \tan\alpha = y$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos^2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{\sec^2\alpha} =$$

$$\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{2y}{1+y^2};$$

c)

$\operatorname{Arccot} y = \alpha \ \therefore\ \cot\alpha = y$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - \frac{2}{\csc^2\alpha} = 1 - \frac{2}{\cot^2\alpha + 1} = \frac{y^2-1}{y^2+1};$$

d)

$\operatorname{Arccot} y = \alpha \ \therefore\ \cot\alpha = y$ e $\tan\alpha = \dfrac{1}{y}$

$$\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = \frac{1-\frac{1}{y^2}}{\frac{2}{y}} = \frac{y^2-1}{2y}.$$

87)

$\operatorname{Arcsin} w = \alpha \Longrightarrow \cos\alpha \geq 0$

$\sin\alpha = w \ \therefore\ \cos\alpha = \sqrt{1-w^2}$

$\operatorname{Arccos} z = \beta \Longrightarrow \sin\beta \geq 0$

$\cos\beta = z \ \therefore\ \sin\beta = \sqrt{1-z^2}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = z\sqrt{1-w^2} - w\sqrt{1-z^2}.$ □

88)

$\operatorname{Arcsin} x = \alpha \Longrightarrow \cos\alpha \geq 0$

$\sin\alpha = x \ \therefore\ \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2x\sqrt{1-x^2}.$ □

89)

$\operatorname{Arccos} u = \alpha \Longrightarrow \sin\alpha \geq 0$

$\cos\alpha = u \ \therefore\ \sin\alpha = \sqrt{1-u^2}$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{(1-u)(1-u)}{(1-u)(1+u)}} = \sqrt{\frac{(1-u)}{(1+u)}}.$$ □

90)

$\text{Arccos}\, y = \alpha \Longrightarrow \sin\alpha \geq 0$

$\text{Arcsin}\, y = \beta \Longrightarrow \cos\beta \geq 0$

Devemos mostrar que $\sin\alpha = \cos\beta$.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \text{Arccos}\, y \ \therefore\ \cos\alpha = y \\ \beta = \text{Arcsin}\, y \ \therefore\ \sin\beta = y \end{array}\right\} \sin\beta = \cos\alpha$$

$\sin^2\beta = \cos^2\alpha$

$1 - \cos^2\beta = 1 - \sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha = \cos^2\beta$

Como $\sin\alpha \geq 0$ e $\cos\beta \geq 0$,

$\sin\alpha = \cos\beta$. □

91)

$\text{Arcsin}\, u = \alpha \Longrightarrow \cos\alpha \geq 0$

$\text{Arcsin}\, v = \beta \Longrightarrow \cos\beta \geq 0$

$\text{Arcsin}(u + v) = \gamma$

$\sin\alpha = u$ e $\cos\alpha = \sqrt{1-u^2}$.

$\sin\beta = v$ e $\cos\beta = \sqrt{1-v^2}$.

$\sin\gamma = u + v$.

Nós vamos supor que $\alpha + \beta = \gamma$.

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$

$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin\gamma$

$u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2} = u + v$

$u^2(1-v^2) + v^2(1-u^2) + 2uv\sqrt{(1-v^2)(1-u^2)} = u^2 + 2uv + v^2$

$2uv\sqrt{(1-v^2)(1-u^2)} = 2uv(1+uv)$

$\alpha + \beta = \gamma$ deve ser verdadeiro para $u \neq 0$ e $v \neq 0$. Então

$(1-v^2)(1-u^2) = (1+uv)^2$

$(u+v)^2 = 0 \ \therefore\ u = -v$

Como $\alpha + \beta = \gamma$ se, e somente se $u = -v$ e $v \in [-1, 1]$, ou $u = 0$ e $v \in [-1,1]$, ou $v = 0$ e $u \in [-1,1]$, em geral

$$\text{Arcsin}\, u + \text{Arcsin}\, v \neq \text{Arcsin}(u+v). \quad \square$$

92)

$$\text{Arcsin}\left(\frac{-5}{13}\right) = \alpha \ \therefore\ \sin\alpha = \frac{-5}{13} \text{ e } \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\text{Arccos}\,\frac{4}{5} = \beta \ \therefore\ \cos\beta = \frac{4}{5} \text{ e } \sin\beta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$\alpha + \beta = \text{Arcsin}\, y$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\text{Arcsin}\, y)$

$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = y$

Resp.: $y = \dfrac{16}{65}$.

93)

$$\text{Arccos}\,\frac{3}{5} = \alpha \ \therefore\ \cos\alpha = \frac{3}{5} \text{ e } \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Arcsin}\,\frac{4}{5} = \beta \ \therefore\ \sin\beta = \frac{4}{5} \text{ e } \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$\alpha - \beta = \text{Arccos}\, y$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\text{Arccos}\, y)$

$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = y$

Resp.: $y = 1$.

94)

$\text{Arctan}\, 2x = 2\,\text{Arctan}\, x$

$\tan(\text{Arctan}\, 2x) = \tan(2\,\text{Arctan}\, x)$

$\tan(\text{Arctan}\, 2x) = 2x$ (segundo o problema 85.)

$\tan(2\,\text{Arctan}\, x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$ (segundo o problema 86.)

$$2x = \frac{2x}{1-x^2}$$

$2x(1 - x^2 - 1) = 0$

Resp.: $x = 0$.

95)

Primeira solução:

$\alpha = \text{Arctan}\, 3 \;\therefore\; \tan\alpha = 3$

$\beta = \text{Arctan}\, \frac{1}{3} \;\therefore\; \tan\beta = \frac{1}{3}$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

$\cot(\alpha+\beta) = \cot\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{1 - \tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = 0$

$0 = 0$

Segunda solução:

$\tan\beta = \frac{1}{3} \Longrightarrow \cot\beta = 3.$

Temos então a equação $\tan\alpha = \cot\beta$

$\tan\alpha = \tan(\pi/2 - \beta) \Longrightarrow \alpha = \pi/2 - \beta + k\pi$

Como α e $\beta \in (0, \pi/2)$, a única solução é $\alpha = \pi/2 - \beta$.

Portanto $\alpha + \beta = \pi/2$. □

96)

$\text{Arcsin}\, t = \alpha$

$\text{Arcsin}\, t = \alpha \;\therefore\; \sin\alpha = t$ e $\cos\alpha = \sqrt{1-t^2}$ (*)

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

$\alpha = \text{Arctan}\, \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ (**)

Comparando as equações (*) e (**),

$$\text{Arcsin}\, t = \text{Arctan}\, \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \quad \square$$

97)

$\text{Arcsin}\, t = \alpha \;\therefore\; \sin\alpha = t$ e $\cos\alpha = \sqrt{1-t^2}$

$\text{Arccos}\, 0 = \beta \;\therefore\; \cos\beta = 0$ e $\sin\beta = 1$

$2\alpha + \beta = \text{Arccos}(-1)$

$\cos(2\alpha + \beta) = \cos(\text{Arccos}(-1))$

$\cos 2\alpha \cos\beta - \sin 2\alpha \sin\beta = -1$

$\sin 2\alpha = 1 \Longrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \;\therefore\; \alpha = \frac{\pi}{4}$

Resp.: $t = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

98)

$\text{Arcsin}\, t = \alpha \;\therefore\; \sin\alpha = t$ e $\cos\alpha = \sqrt{1-t^2}$

$\text{Arccos}(1-t) = \beta \;\therefore\; \cos\beta = 1 - t$ e $\sin\beta = \sqrt{t(2-t)}$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 0$

$(1-t)\sqrt{1-t^2} = t\sqrt{t(2-t)}$

$(1-t)^3(1+t) = 2t^3 - t^4$

$-2t + 1 = 0 \;\therefore\; t = \frac{1}{2}$

Resp.: $t = \frac{1}{2}$.

99)

$\text{Arctan}\,\sqrt{x} = \alpha \;\therefore\; \tan\alpha = \sqrt{x}$

$\text{Arctan}\,\sqrt{1-x} = \beta \;\therefore\; \tan\beta = \sqrt{1-x}$

$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$

$\cot(\alpha + 2\beta) = \cot\frac{\pi}{2}$

$$\frac{1-\tan\alpha\tan 2\beta}{\tan\alpha+\tan 2\beta}=0$$

$$1-\tan\alpha\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=0$$

$$2\tan\alpha\tan\beta=1-\tan^2\beta$$

$$2\sqrt{x}\sqrt{1-x}=x$$

$$4x(1-x)=x^2$$

$$x(5x-4)=0\Longrightarrow\begin{cases}x=0\\5x-4=0\ \therefore\ x=4/5\end{cases}$$

Resp.: $x\in\{0,4/5\}$.

100)

Como α, β e γ são ângulos de um triângulo, temos

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \tag{1}$$

e

$$0<\alpha,\beta,\gamma<\pi. \tag{2}$$

Nós vamos calcular o maior valor f^* da função $f(\alpha,\beta,\gamma)=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ sujeita às restrições (1) e (2) e mostrar que $f^*=\frac{1}{8}$.

Nosso problema é:

$$\max\ \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

sujeito a

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$
$$0<\alpha,\beta,\gamma<\pi.$$

$$\gamma=\pi-\alpha-\beta\quad\text{e}\quad\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right).$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right)=\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right).$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

A partir deste momento iremos ignorar a restrição $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$. Faremos uso dela somente quando tivermos necessidade. Nosso problema torna-se então

$$\max\ g(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Busquemos os pontos críticos de g.

$$\frac{\partial g}{\partial\alpha}=\frac{1}{4}\sin\beta\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin\alpha=0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial\beta}=\frac{1}{4}\sin\alpha\cos\beta-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta=0. \tag{4}$$

Como $\sin\alpha\neq0$ (por causa da restrição (2)) e $\sin\beta=2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$, podemos escrever a equação (3) como

$$\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cot\alpha-\sin^2\frac{\beta}{2}=0. \tag{3'}$$

Como $\sin\frac{\beta}{2}\neq0$ e $\cos\frac{\beta}{2}\neq0$ (por causa da restrição (2)), podemos escrever a equação (3') como

$$\cot\alpha=\tan\frac{\beta}{2}. \tag{5}$$

Aplicando o mesmo raciocínio à equação (4), temos:

$$\cot\beta=\tan\frac{\alpha}{2}. \tag{6}$$

Podemos escrever (5) e (6) como

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha-\cos\beta\sin\alpha=\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin\beta-\cos\alpha\sin\beta=\cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin\alpha=\sin\beta\ \therefore\ \begin{cases}\alpha=\beta\\\alpha=\pi-\beta\end{cases}$$

Se $\alpha = \pi - \beta \Longrightarrow \gamma = 0$. Desprezamos esta solução.

Retornamos a (5) com $\alpha = \beta$.

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\alpha = \tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\tan\alpha/2}{1-\tan^2\alpha/2}$$

$$\frac{1-\tan^2\alpha/2}{2\tan\alpha/2} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$3\tan^2\frac{\alpha}{2} = 1 \Longrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha/2 = \pi/6 \therefore \alpha = \pi/3 \\ \alpha/2 = 5\pi/6 \therefore \alpha = 5\pi/3 \\ \alpha/2 = -\pi/6 \therefore \alpha = -\pi/3 \\ \alpha/2 = -5\pi/6 \therefore \alpha = -5\pi/3 \end{cases}$$

Como $0 < \alpha < \pi$, a única solução é $\alpha = \pi/3$.

Então $\alpha^* = \beta^* = \pi/3$ (e $\gamma^* = \pi/3$) é um ponto crítico da função g. Devemos ver agora se o ponto crítico é um máximo local ou um mínimo local.

Define-se o *Hessiano* H da função g como

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 g}{\partial\alpha^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial\alpha\partial\beta} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial\beta\partial\alpha} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial\beta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}$$

$$h_{11} = -\frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta - \frac{1}{2}\cos\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$h_{22} = -\frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta - \frac{1}{2}\cos\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$h_{12} = \frac{1}{4}\cos\alpha\cos\beta - \frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta$$

Calculemos $A = h_{11}(\alpha^*,\beta^*)$ e $B =$

$$h_{11}(\alpha^*,\beta^*)h_{22}(\alpha^*,\beta^*) - \left(h_{12}(\alpha^*,\beta^*)\right)^2.$$

Como $A < 0$ ($A = -1/4$) e $B > 0$ ($B = 3/64$), podemos dizer que o ponto α^*,β^* é um máximo local da função g. Será que α^*,β^* é um máximo global? Se for $f(\alpha,\beta,\gamma) = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$ e $f^* = \frac{1}{8}$.

Geralmente é difícil ou impossível de mostrar que um máximo local é um máximo global. Estudemos o gráfico da função

$$g(\alpha,\beta) = \frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$$

sujeita a

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$
$$0 \leq \beta \leq \pi$$
$$0 \leq \alpha+\beta \leq \pi.$$

Se α e β são ângulos de um triângulo, eles devem satisfazer as restrições acima.

Fixemos β a certos valores β_1 e estudemos a função $g(\alpha,\beta_1) = h(\alpha)$ que resulta.
$\beta = \beta_1 = 0 \Longrightarrow h(\alpha) = 0$.
$\beta = \beta_1 = \pi \Longrightarrow h(\alpha) = 0$ porque $\alpha = 0$.

$\beta = \beta_1,\ 0 < \beta_1 < \pi \Longrightarrow \alpha \in [0, \pi - \beta_1]$.

Se $\alpha = 0,\ h(\alpha) = 0$.

Se $\alpha = \pi - \beta_1,\ h(\alpha) = \frac{1}{4}\sin(\pi-\beta_1)\sin\beta_1 -$

$$\sin^2\left(\frac{\pi-\beta_1}{2}\right)\sin^2\frac{\beta_1}{2} =$$

$$\frac{1}{4}\sin\beta_1\sin\beta_1 - \sin^2\frac{\beta_1}{2}\cos^2\frac{\beta_1}{2} =$$

$$\frac{1}{4}\left(2\sin\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\beta_1}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{\beta_1}{2}\cos^2\frac{\beta_1}{2} = 0.$$

Para $\beta = \beta_1,\ 0 < \beta_1 < \pi$, $h(0) = 0$ e $h(\pi-\beta_1) = 0$, i.e. a derivada $h'(\alpha)$ anula-se pelo menos uma vez no intervalo $(0, \pi-\beta_1)$ (teorema de Rolle).

Calculemos o sinal da derivada em $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi - \beta_1$:

$$\frac{dh}{d\alpha} = h'(\alpha) = \frac{1}{4}\sin\beta_1\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\beta_1}{2}\sin\alpha$$

$$h'(0) = \frac{1}{4}\sin\beta_1 > 0;$$

$$h'(\pi-\beta_1)=\frac{1}{4}\sin\beta_1\cos(\pi-\beta_1)-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\beta_1}{2}\sin(\pi-\beta_1)=$$

$$-\frac{1}{4}\sin\beta_1\cos\beta_1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\beta_1}{2}\sin\beta_1=$$

$$-\frac{1}{4}\sin\beta_1\left(\cos\beta_1+2\sin^2\frac{\beta_1}{2}\right)=$$

$$-\frac{1}{4}\sin\beta_1\left(1-2\sin^2\frac{\beta_1}{2}+2\sin^2\frac{\beta_1}{2}\right)$$

$$h'(\pi-\beta_1)=-\frac{1}{4}\sin\beta_1<0.$$

Calculemos o valor (ou os valores) α^0 tal que $h'(\alpha^0)=0$.

$$\frac{1}{4}\sin\beta_1\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\beta_1}{2}\sin\alpha=0$$

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\beta_1}{2}\cot\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\beta_1}{2}=0$$

$$\cot\alpha=\tan\frac{\beta_1}{2}$$

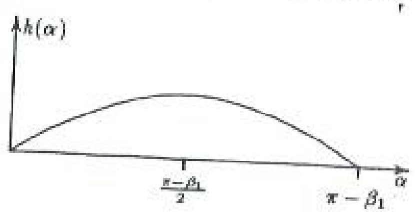
$$\alpha^0=\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\tan\beta_1/2}\right)\quad\text{(solução única).}$$

Como $\cot\alpha=\tan(\pi/2-\alpha)$, temos

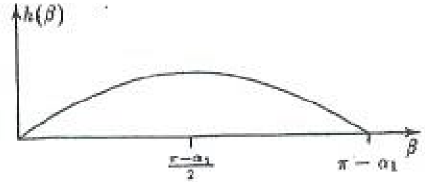
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\frac{\beta_1}{2}\Longrightarrow\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\beta_1}{2}+k\pi,\quad k\text{ inteiro.}$$

A única solução é obtida para $k=0$, i.e. $\alpha^0=(\pi-\beta_1)/2$.

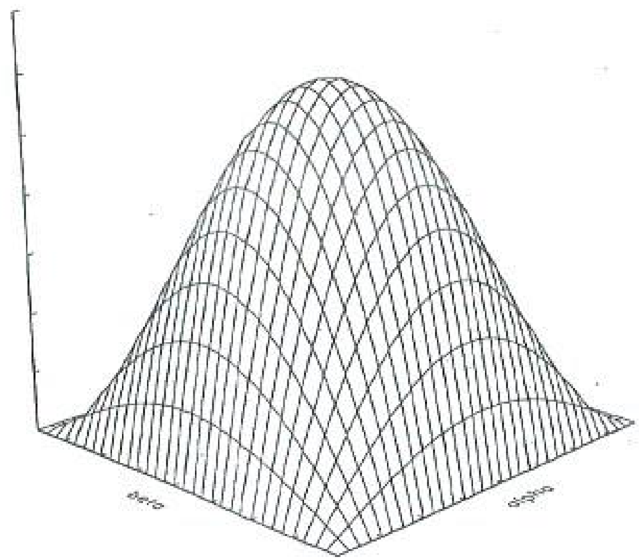
Logo para $\beta=\beta_1$, $0<\beta_1<\pi$, todas as funções $h(\alpha)$ têm a forma



Se fizermos o mesmo raciocínio para $h(\beta)$, teremos



Colocando $h(\alpha)$ e $h(\beta)$ juntos, obtemos $g(\alpha,\beta)$ cuja forma é



Funções como $g(\alpha,\beta)$ são ditas funções estritamente côncavas. Tais funções possuem somente um máximo local que, conseqüentemente, é também o máximo global. Portanto

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}.\qquad\square$$

Bibliografia e referências

[1] Adams, R., *Single-Variable Calculus*, Addison-Wesley, 1990.

[2] Ayres Jr., F., *Theory and Problems of First Year College Mathematics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1958.

[3] *Handbook of Mathematical Functions*, Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, Dover Publications, 1970.

[4] Hudson, R.G., *Manual do Engenheiro*, Editora Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, Brasil, 1967.

[5] Piskounov, N., *Calcul Différentiel et Intégral*, Tome II, Éditions Mir, 1976.

[6] Robison, J., *Algèbre et Trigonométrie*, McGraw-Hill, 1967.

Suas observações e descobertas

Aos nossos leitores

O autor gostaria de conhecer sua opinião sobre a apresentação e conteúdo deste manual. Escrever para

QED Texte
C.P. 75022
Comptoir Postal Centre de Mortagne
1001 Boul. Montarville
Boucherville Québec
J4B 7Z2 Canadá