Problema 101)

Seja x a quantidade de ovos que a mãe tinha para dar ao filho mais novo. Este filho ganhou $x/2 + 1/2$ ovos. Como a mãe ficou sem nenhum, podemos escrever:

$$x - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = 0 \Longrightarrow x = 1.$$

Repetindo o raciocínio para o filho do meio, temos (x agora representa a quantidade de ovos que a mãe tinha para dar aos dois filhos mais novos):

$$x - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = 1 \Longrightarrow x = 3.$$

Repetindo o raciocínio para o filho mais velho, temos (x agora representa a quantidade de ovos que a mãe tinha para dar aos três filhos):

$$x - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = 3 \Longrightarrow x = 7.$$

Portanto, a mãe levava 7 ovos; o filho mais novo ganhou 1 ovo, o do meio $3 - 1 = 2$ ovos e o mais velho, $7 - 3 = 4$ ovos.

Problema 102)

Percebemos que se a primeira criança conseguir deixar 3 balas ela ganha o jogo pois a segunda será obrigada a comer apenas 1 bala, deixando duas. Então a primeira criança come 1 bala, deixando a outra e ganhando o jogo.

Com a experiência da solução do problema anterior, subimos uma etapa e vemos que se a primeira criança deixar 7 balas ela ganha o jogo.

Tendo compreendido o problema, devisamos a estratégia vencedora para a primeira criança:

1) come 5 e deixa 15.

2) come algumas (dependendo da quantidade que a segunda comeu) e deixa 7.

3) come algumas e deixa 3.

Problema 103)

Sejam

d – comprimento (em metro) do trem
v – velocidade (em metro/segundo) do trem

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} d &= 9v \\ 80+d &= 21v \end{aligned}$$

Dividindo membro a membro, resulta:

$$\frac{d}{80+d} = \frac{3}{7} \Longrightarrow d = 60\,\mathrm{m}.$$

Problema 104)

Sejam

l – comprimento (metro) da quadra
v – velocidade (m/min) do homem
t – tempo (min) para o homem completar uma volta na quadra

Sabemos que $l = vt$. Como a mulher ultrapassa o homem duas vezes e chegam juntos, então a cada volta do homem ela dá quatro voltas, ou seja, sua velocidade é igual ao quádruplo da do homem.

Correndo em sentidos contrários, a cada $t/5$ minutos eles se encontrarão pois o homem terá percorrido $(vt)/5 = l/5$ e a mulher, $4l/5$. Assim, ao final de t minutos eles vão se cruzar 4 vezes (encontrando-se na saída pela quinta vez).

Problema 105)

Com os dados do problema, temos 7 mulheres, 7×7 sacos, $7\times 7\times 7$ gatos, $7\times 7\times 7\times 7$ gatinhos, para um total de $7+7^2+7^3+7^4$ elementos.

Problema 106)

A tem no máximo 27 ($1+8+9+9=27$) anos. Logo, nasceu após 1924, no ano $1900+10a+b$. A também tem no mínimo 13 ($1+9+3+0=13$) anos e concluímos então que $2 \le a \le 3$.

Se nasceu em 1º de janeiro, temos:

$$\begin{aligned} 1+9+a+b &= 1953-(1900+10a+b) \\ 11a+2b &= 43 \left\{ \begin{array}{lll} a=2 & \Longrightarrow & 2b=21 \quad \text{(não pode)} \\ a=3 & \Longrightarrow & 2b=10 \therefore b=5 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Se nasceu em qualquer outro dia, temos:

$$\begin{aligned} 1+9+a+b &= 1953-(1900+10a+b)-1 \\ 11a+2b &= 42 \begin{cases} a=2 \implies 2b=20 & \text{(não pode)} \\ a=3 \implies 2b=9 & \text{(não pode)} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusão: A nasceu em 1º de janeiro de 1935 e está fazendo 18 anos.

Problema 107)

O jacaré fica num impasse. Não pode cumprir sua promessa. Trata-se de um paradoxo. Veja por quê: o jacaré pensa

i) se for verdade, a criança será devolvida;

ii) se for falsa, implica que o pai disse uma mentira. E o jacaré não poderá comer a criança.

Enfim, se for verdade, é mentira e, se for mentira, é verdade, e o jacaré não tem como decidir o que fazer.

Problema 108)

Apenas César perde o ônibus. Veja por quê:

César – na realidade sai de casa 15 minutos atrasado.
Maria – na realidade sai de casa 15 minutos adiantada.
Lúcia – na realidade sai de casa 5 minutos adiantada.
Fátima – na realidade sai de casa 5 minutos adiantada.

Problema 109)

Sejam

q – a carga do celular
x – o tempo (em hora) em que o celular esteve desligado
y – o tempo (em hora) em que o celular esteve ligado

Com o celular desligado, em uma hora terá consumido $1/9$ da carga e em x horas, $x/9$; com o celular ligado, em uma hora terá consumido $1/1{,}5$ da carga e em y horas, $y/1{,}5$. Logo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{x}{9}q+\frac{y}{1{,}5}q &= 1q \Longrightarrow \frac{x}{9}+\frac{y}{1{,}5}=1 \\ x+y &= 8 \Longrightarrow x=8-y \\ \frac{8-y}{9}+\frac{y}{1{,}5} &= 1 \therefore y=\frac{1}{5}\,\text{h} \end{aligned}$$

Portanto, o celular esteve ligado durante 12 minutos.

Problema 110)

Com os dados do problema, podemos escrever:

	número de objetos	gasto
Um marido	M	M^2
Sua esposa	E	E^2

Sabemos que $M^2 - E^2 = 63$, ou $(M+E)(M-E) = 63$, onde $(M+E)$ e $(M-E)$ são números inteiros positivos. Como $63 = 7 \cdot 3^2$, (I), (II) e (III) mostram as únicas possibilidades de se decompor 63 num produto de dois fatores:

$$63 \cdot 1 = 63 \qquad (32+31)(32-31) = 63 \qquad \text{(I)}$$
$$21 \cdot 3 = 63 \qquad (12+9)(12-9) = 63 \qquad \text{(II)}$$
$$9 \cdot 7 = 63 \qquad (8+1)(8-1) = 63 \qquad \text{(III)}$$

Vê-se que o marido de (I) comprou $32 - 9 = 23$ objetos a mais que a esposa de (II). Logo, o marido de (I) é Paulo e a esposa de (II) é Célia.

Vê-se que o marido de (II) comprou $12 - 1 = 11$ objetos a mais que a esposa de (III). Logo, o marido de (II) é Luís e a esposa de (III) é Maria.

Então, Paulo é marido de Vera, Luís é marido de Célia e José é marido de Maria.

Problema 111)

Seja t o número de pessoas na turma. Com os dados do problema, podemos escrever: $0{,}6t$ das pessoas são homens, $0{,}4t$ são mulheres e $0{,}3t$ usam óculos. Sabemos que apenas 20% das mulheres usam óculos. Então, o número de mulheres que usam óculos é dado por $0{,}2(0{,}4t) = 0{,}08t$; ou seja, 8% das pessoas. Logo, $(30 - 8) = 22\%$ das pessoas é formada por homens que usam óculos.

Problema 112)

Sejam f o número de fumantes e p, a população da cidade. Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\frac{f}{p} = 0{,}32 \Longrightarrow p = \frac{f}{0{,}32}$$
$$f - \frac{3}{11}f = 12800 \Longrightarrow f = 17600$$

Assim, a cidade tem 17600 fumantes e 17600/0,32 = 55000 habitantes.

Problema 113)

a) Seja x a distância (em metro) percorrida por Ricardo no momento do encontro. Então André percorre $4x$ e podemos escrever:

$$x + 4x = 1500 \Longrightarrow x = 300\,\mathrm{m}.$$

b) Seja v a velocidade (em metro/segundo) de Ricardo. Assim, a velocidade de André em relação a Ricardo é $4v - v = 3v$ (é como se Ricardo ficasse parado e André corresse com uma velocidade de $3v$). Neste caso, André alcança Ricardo após percorrer a distância da pista, ou seja, após $1500/3v = 500/v\,$seg. Mas durante esse tempo Ricardo correu também com uma velocidade v. Assim, o encontro se dará após Ricardo ter corrido $v\frac{500}{v} = 500\,\mathrm{m}$.

Problema 114)

Sabemos que os anos bissextos são aqueles em que

a) são divisíveis por 4 mas não por 100;

b) são divisíveis por 400.

Sabemos também que se o dia 1º de março caiu digamos numa quarta-feira num ano, no ano seguinte cairá numa quinta-feira ou sexta-feira, dependendo se o ano *não é* ou é bissexto.

Supondo então que em 1972 (ano bissexto) o dia 1º de março caiu numa quarta-feira, podemos construir a seguinte tabela para os dias da semana em que este dia cairá nos anos bissextos subseqüentes:

Ano	Dia da semana
1976	segunda-feira
1980	sábado
1984	quinta-feira
1988	terça-feira
1992	domingo
1996	sexta-feira
2000	quarta-feira

Como em 2004 o dia 1º de março vai cair numa segunda-feira, podemos parar pois o ciclo vai se repetir.

Para completar a coleção, resta agora obter sete calendários diferentes para os anos não-bissextos. Construímos a seguinte tabela (ainda para os dias da semana nos quais o dia 1º de março cai):

Ano	Dia da semana
1975	sábado
1977	terça-feira
1978	quarta-feira
1979	quinta-feira
1981	domingo
1982	segunda-feira
1983	terça-feira
1985	sexta-feira
1986	sábado

Como esgotamos todas as possibilidades (a linha do ano 1986 já era desnecessária), podemos parar. Assim, a coleção estará completa no ano 2000.

Problema 115)

Sejam

M – média das idades dos professores, inicialmente.
S – soma das idades dos professores, inicialmente.
p – idade do professor que se aposentou.

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{S}{18} &= M \\ \frac{S-p+22}{18} &= M-2 \Longrightarrow \frac{S-p+22}{18} = \frac{S}{18} - 2 \end{aligned}$$

Chegamos a $(p-22)/18 = 2 \therefore p = 58$. Logo, o professor que se aposentou tinha 58 anos.

Problema 116)

Podemos resolver este problema de diversas maneiras. Para os que conhecem análise combinatória, e sendo n o número de pessoas presentes na sala, o número de cumprimentos (a_n) será dado pela combinação de n dois a dois. Assim,

$$a_n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Colocando $n = 8$, obtemos $a_8 = 28$.

Mas podemos também raciocinar da seguinte maneira: numa sala com n pessoas, temos os cumprimentos dados por $n-1$ (a_{n-1}) pessoas mais aqueles dados pela n-ésima pessoa. Assim, podemos escrever:

$$a_n = a_{n-1} + n - 1. \qquad (*)$$

Sabemos que se $n = 1$, $a_1 = 0$ pois uma pessoa faz zero cumprimento. Fazemos agora uma tabela simples:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 1 = 1\\
a_3 &= a_2 + 2 = 3\\
a_4 &= a_3 + 3 = 6\\
a_5 &= a_4 + 4 = 10\\
a_6 &= a_5 + 5 = 15\\
a_7 &= a_6 + 6 = 21\\
a_8 &= a_7 + 7 = 28
\end{aligned}$$

Logo, 8 pessoas trocam 28 cumprimentos.

Observação: note que a solução da equação ($*$) (chamada de *equação de recorrência*) é dada por $a_n = n(n-1)/2$. No caso deste problema, a equação ($*$) é um exemplo de uma progressão aritmética de segunda ordem.

Problema 117)

Sejam

s – somatório das notas da classe
C – média das notas da classe
t – somatório das notas dos homens
h – número de homens na classe
H – média das notas dos homens
u – somatório das notas das mulheres
m – número de mulheres na classe
M – média das notas das mulheres
p – porcentagem de homens na classe

Sabemos que $s = C(h+m)$, $t = H \cdot h$, $u = M \cdot m$ e $s = t+u$. Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} t+u &= C(h+m) \\ 5{,}4h + 6{,}4m &= 6(h+m) \\ m &= 3h/2 \end{aligned}$$

Queremos calcular $p = h/(h+m)$. Resulta

$$p = \frac{h}{h+3h/2} = \frac{2}{5}.$$

Logo, $p = 40\%$.

Problema 118)

Os jogadores disputam $3 \times 35 + 1 \times 40 = 145$ pontos. Assim, ganha o desafio o jogador que alcançar 73 pontos.

O jogador que ganhou 19 das 35 partidas iniciais já acumulou $3 \times 19 = 57$ pontos. Portanto, ele precisa ganhar ainda $73 - 57 = 16$ pontos. Como cada partida ganha dá ao vencedor um ponto, ele precisa ser o vencedor em 16 partidas.

Problema 119)

Sejam

A – conjunto das meninas
B – conjunto dos meninos
R – conjunto das crianças ruivas

O conjunto A é formado por meninas ruivas e não ruivas. Concluímos que na escola há $30 - 4 = 26$ meninas não ruivas.

O conjunto R é formado por meninas e meninos ruivos. Concluímos que na escola há $21 - 4 = 17$ meninos ruivos.

O conjunto B é formado por meninos ruivos e não ruivos. Concluímos que na escola há $17 + 13 = 30$ meninos. E o número de crianças na escola é igual à soma das meninas com os meninos, ou seja, 60 crianças.

Problema 120)

A afirmação será verdadeira se comprovarmos que os dois fatos seguintes ocorrem:

a) a face oculta de todo cartão cuja face visível é uma vogal é um número par.

b) a face oculta de todo cartão cuja face visível é um número ímpar não é uma vogal.

Portanto, para verificar se a afirmação é verdadeira é suficiente virar o primeiro e o último cartão.

Problema 121)

A diferença entre o que cada jogador possui é de R$ 60,00. Como terminam com quantias iguais, ao final esta diferença será nula. Cada partida ganha a mais pelo jogador que tem menos faz a diferença cair de R$ 10,00. Logo, Lincoln ganhou seis partidas a mais que Josimar.

Problema 122)

Sabemos que 1º de janeiro de 1993 caiu numa sexta-feira. Como fizemos no problema 114, façamos a tabela seguinte para o dia da semana em que cairá o dia 1º de janeiro nos anos subseqüentes:

Ano	Dia da semana	
1994	sábado	
1995	domingo	
1996	segunda-feira	
1997	quarta-feira	(1996 foi bissexto)
1998	quinta-feira	
1999	sexta-feira	
2000	sábado	
2001	segunda-feira	(2000 foi bissexto)

Problema 123)

O piloto mais veloz fica 3 s à frente do mais lento quando completa cada uma de suas voltas. Ele ficará uma volta inteira na frente quando levar uma vantagem de 75 s (tempo que o piloto mais lento leva para completar uma de suas voltas). Portanto, ao final de $75/3 = 25$ de suas voltas o piloto mais veloz estará uma volta à frente do mais lento.

Problema 124)

Seja x a quantia que a pessoa tem para apostar no momento de cada uma das seis apostas. Se ganhar, ela fica com $x + x/2 = 3x/2$; se perder, fica com $x - x/2 = x/2$. Ou seja, cada aposta ganha gera um fator igual a $3/2$, e cada aposta perdida gera um fator igual a $1/2$. Assim, se P_0 representa a quantia ao começar as apostas e P_6, aquela ao final das seis apostas, podemos escrever:

$$P_6 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 P_0 = \frac{27}{64} P_0.$$

Como P_0 = R\$ 640,00, P_6 resulta em R\$ 270,00. Logo, a pessoa perde R\$ 370,00.

Problema 125)

Sabemos que 60 pessoas comem galinha. Como estamos querendo saber qual o número máximo de pessoas que não comem nem galinha nem porco, então devemos ter que *todas* as 30 que comem porco também comem galinha. Logo, $100 - 60 = 40$ pessoas no máximo não comem os dois tipos de carne.

E também podemos dizer que *no mínimo* $100 - 60 - 30 = 10$ pessoas não comem os dois tipos de carne.

Problema 126)

Construímos a tabela dos restos de divisões por 7:

		RESTO
$1 \div 7$	$\Longrightarrow$	1
$11 \div 7$	$\Longrightarrow$	4
$111 \div 7$	$\Longrightarrow$	6
$1111 \div 7$	$\Longrightarrow$	5
$11111 \div 7$	$\Longrightarrow$	2
$111111 \div 7$	$\Longrightarrow$	0
$1111111 \div 7$	$\Longrightarrow$	1
$11111111 \div 7$	$\Longrightarrow$	4

Os restos formarão uma seqüência periódica, cujo período é 6. Ou seja, os mesmos restos se repetem de 6 em 6. Como no problema o número N

possui 1999 dígitos iguais a 1, devemos encontrar quantas vezes o período vai se repetir. Assim, podemos escrever:

$$1999 = 333 \cdot 6 + 1.$$

Logo, o resto procurado é o mesmo de $1 \div 7$, que é 1.

Problema 127)

Seja x a área do retângulo desconhecido. Com os dados da figura, podemos escrever:

$$\frac{16}{12} = \frac{x}{27} \Longrightarrow x = 36.$$

Logo, a área do retângulo ABCD é $16 + 12 + 27 + x = 91$.

Problema 128)

O professor se confundiu. O raciocínio correto deveria ser: $(3 \cdot 90 - 20) = 250 = (300 - 50)$.

Problema 129)

Por (2) e (5) José é jardineiro. Por (2) em seguida Jacó é músico.

Por (6) João é pintor. Por (1) e (4) o motorista é José. Finalmente, por (3) Jacó é contrabandista e por último João é barbeiro. Resumindo, temos:

Jacó – contrabandista e músico.
João – barbeiro e pintor.
José – jardineiro e motorista

Problema 130)

Sejam

x – idade de Pedro em 1996
y – idade de Maria em 1996

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3y}{4} \\ x + 6 &= 20 + (y - x) \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $y = 28$. Logo, em 1999 Maria está fazendo 31 anos.

Problema 131)

Queremos medir massas de 1 kg, 2 kg, ... , 40 kg.

a) precisamos de massas de 1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg, 16 kg e 32 kg. Logo, um mínimo de 6 "pesos".

   Obs: Jonas Knopman alertou-nos que com as massas de 1 kg, 3 kg, 5 kg, 10 kg e 20 kg (ou seja, 5 "pesos") nosso problema também está resolvido. Neste caso, massas de 2 kg, 7kg, ... , 40 kg são "medidas" por eliminação. Por exemplo, seja $m = 7$ kg uma massa que queremos medir. Colocamos 5 kg (leve); aumentamos para 6 kg (leve); aumentamos para 9 kg (pesado); diminuímos para 8 kg (pesado). Assim, como $6 < m < 8$, concluímos que $m = 7$ kg.

   Portanto, a resposta para este problema dependerá da interpretação de "medição": pesagem direta (explícita), 6 pesos; pesagem indireta (por eliminação), 5 pesos.

b) precisamos de massas de 1 kg, 3 kg, 6 kg, 12 kg e 24 kg. Logo, um mínimo de 5 "pesos".

Problema 132)

Podemos supor que há 7 especialistas para contar as cédulas pois 8 amadores equivalem a 4 especialistas. Logo, precisaremos de $770/7 = 110$ minutos, ou seja, 1 h 50 min.

Problema 133)

Decompondo 3888 em seus fatores primos, resulta:

$$3888 = 2^4 \cdot 3^5.$$

Como queremos o menor n que torne o número $3888n$ um cubo perfeito, devemos ter $n = 2^2 \cdot 3 = 12$ pois $3888n = 2^6 \cdot 3^6 = (2^2 \cdot 3^2)^3$.

Problema 134)

A cada $0,\ 5,\ 10, \ldots$, ou seja, $5k$ segundos as lâmpadas de números 1, 6, 11, ..., 61, 66, 71 e 76 acendem-se. Logo, às 20 h 41 min 10 s elas estarão acesas. Um segundo depois elas apagam-se e as lâmpadas de números 2, 7, 12, ..., 62, 67, 72 e 77 acendem-se.

Problema 135)

Não pode haver zero afirmações corretas (todas ou 1997 afirmações falsas), pois nesse caso ocorreria um paradoxo com a 1997ª afirmação.

Não pode haver mais que uma afirmação correta, pois elas seriam contraditórias (cada uma dizendo um número diferente de afirmações falsas).

Só restou analisarmos a possibilidade de existir uma única verdadeira: essa opção não nos leva a nenhuma contradição ou paradoxo. Portanto, a 1996ª afirmação é a única verdadeira.

Obs: o seguinte comentário é devido a Bruno Woltzenlogel Paleo.

Uma forma de dificultar mais o problema é incluir "uma etapa a mais de raciocínio", enunciando-o da seguinte forma, por exemplo: num planeta existem 1997 habitantes que podem ser de duas raças:

Raça A – sempre dizem a verdade
Raça B – sempre mentem

Os habitantes fizeram as seguintes afirmações:

1) Exatamente 1 de nós é da raça B.
2) Exatamente 2 de nós são da raça B.
⋮
n) Exatamente n de nós são da raça B.
⋮
1997) Exatamente 1997 de nós são da raça B.

Quantos são da raça A? Um, o que diz que 1996 são de raça B.

Na minha opinião, enunciando dessa forma, o paradoxo e a contradição que eu apresentei ficam um pouco mais "camuflados"... .

Problema 136)

Sejam

t_1 – tempo transcorrido até o 1º encontro.
t_2 – tempo transcorrido do 1º até o 2º encontro menos 10 minutos.
x – largura do rio.
v_a – velocidade do barco A (mais rápido).
v_b – velocidade do barco B.

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$
\begin{array}{lrclcrcl}
 & & \text{1}^{\text{o}}\text{ encontro} & & & & \text{2}^{\text{o}}\text{ encontro} & \\
\text{barco A} & x-720 & = & v_a\cdot t_1 & & 720+x-400 & = & v_a\cdot t_2 \\
\text{barco B} & 720 & = & v_b\cdot t_1 & & x-720+400 & = & v_b\cdot t_2
\end{array}
$$

$$
\frac{x-720}{720} = \frac{v_a}{v_b} \quad \text{(I)} \qquad \frac{x+320}{x-320} = \frac{v_a}{v_b} \quad \text{(II)}
$$

De (I) e (II), vem:

$$
\frac{x-720}{720} = \frac{x+320}{x-320} \;\therefore\; x = 1760\,\text{m}.
$$

Problema 137)

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
P &= Q\cdot D + R \\
Q &= Q'\cdot D' + R' \\
P &= (Q'\cdot D' + R')D + R \\
P &= (D\cdot D')Q' + R'\cdot D + R
\end{aligned}
$$

Assim, dividindo P por $D\cdot D'$ o resto seria $R'\cdot D + R$.

Problema 138)

Sejam

v_g – velocidade de Giovani
v_m – velocidade de Marília
l – comprimento do percurso (distância casa/escola)
t – tempo para Giovani alcançar Marília

Com os dados do problema, temos que $v_g = l/20$ e $v_m = l/30$. Quando Giovani alcançar Marília, eles terão percorrido a mesma distância. Assim, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{l}{20}\right)t &= \left(\frac{l}{30}\right)5 + \left(\frac{l}{30}\right)t \\
\frac{t}{60} &= \frac{1}{6} \;\therefore\; t = 10 \text{ minutos.}
\end{aligned}
$$

Problema 139)

Seja l o comprimento do segmento AB. Sabemos que AM $= l/2$ e consideremos os pontos P e Q pertencentes ao segmento AM. Como

$$\mathrm{AP} = \frac{2l}{2+3} = \frac{2l}{5} \quad \text{e} \quad \mathrm{AQ} = \frac{3l}{3+4} = \frac{3l}{7},$$

podemos colocar estes quatros pontos na ordem A, P, Q e M. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{AQ} &= \mathrm{AP} + \mathrm{PQ} \\ \frac{3l}{7} &= \frac{2l}{5} + 2 \\ l &= 70\,\mathrm{cm}. \end{aligned}$$

Problema 140)

Sabemos que $115 < \sqrt{N} < 116$. Como o resto da extração da raiz quadrada é o maior possível, temos que $N = 116^2 - 1 = 13455$.

Problema 141)

Seja x a quantidade de litros da mistura substituída. Então retiramos $x/4$ de álcool e o tanque fica com $(22-x)/4$ litros de álcool. Como depois acrescentamos x litros de álcool para obter uma mistura com 11 litros de álcool, temos:

$$\begin{aligned} \frac{22-x}{4} + x &= 11 \\ 3x &= 22 \quad \therefore \quad x = \frac{22}{3} = 7\tfrac{1}{3} \text{ litros.} \end{aligned}$$

Problema 142)

Sejam

S_a – soma das idades dos professores da escola A
M_a – média aritmética das idades dos professores da escola A
n_a – número de professores da escola A
S_b – soma das idades dos professores da escola B
M_b – média aritmética das idades dos professores da escola B
n_b – número de professores da escola B
M – média aritmética das idades dos professores das duas escolas

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} M &= \frac{S_a + S_b}{n_a + n_b} = 30 \\ S_a &= 26n_a \\ S_b &= 35n_b \\ \frac{26n_a + 35n_b}{n_a + n_b} &= 30 \Longrightarrow 4n_a = 5n_b \therefore \frac{n_a}{n_b} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Problema 143)

Sejam

G – gastos com a importação de petróleo
p_0 – preço antes do aumento
v_0 – volume das importações antes do aumento
p_1 – preço depois do aumento
v_1 – volume das importações depois do aumento

Sabe-se que $G = p_0 v_0$ e $p_1 = 1{,}6p_0$ e quer-se manter $G = p_1 v_1 = 1{,}6p_0 v_1$. Assim,

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{1{,}6} = 62{,}5\%.$$

Logo, o volume deve ser reduzido de 37,5%.

Problema 144)

A quantia que cada um recebeu é diretamente proporcional ao capital inicial empregado e também diretamente proporcional ao tempo de sociedade.

Portanto, André recebeu $7000 \cdot 12 \cdot k$, enquanto que Paulo, $8500 \cdot 8 \cdot k$ e Mabel, $9000 \cdot 7 \cdot k$, onde k é um número real positivo, chamado de *constante de proporcionalidade*. Devemos repartir R$ 21500,00. Logo,

$$84000k + 68000k + 63000k = 21500 \Longrightarrow k = 0{,}1.$$

Assim, André recebeu R$ 8400,00, Paulo R$ 6800,00 e Mabel R$ 6300,00.

Problema 145)

Seja x o preço à vista do eletrodoméstico. Ao final de um mês, o saldo devedor ficou 1,25x. Pagou-se R$ 180,00 e o saldo devedor ficou $1{,}25x - 180$. Um mês mais tarde, esta dívida tornou-se $1{,}25[1{,}25x - 180]$, que foi quitada pagando-se R$ 200,00. Logo, podemos escrever:

$$1{,}25[1{,}25x - 180] = 200 \Longrightarrow x = \text{R\$}\,272{,}00.$$

Problema 146)

Combinando as informações 9-14-4-5-8-1-7-11, tem-se:

CORES	Amarela	Azul	Vermelha	Verde	Branca
BEBIDAS			Leite	Café	
MORADORES	Norueguês		Inglês		
CIGARROS	Dunhill				
ANIMAIS		Cavalo			

Suponho agora que o dinamarquês mora na casa Azul, o sueco na Verde e o alemão na Branca. Não pode pois o fumante de Plaza bebe cerveja. Mantemos o dinamarquês na casa Azul e trocamos as casas do sueco e alemão. Tal troca não viola nenhuma condição, resultando na seguinte tabela:

CORES	Amarela	Azul	Vermelha	Verde	Branca
BEBIDAS	Vinho	Chá	Leite	Café	Cerveja
MORADORES	Norueguês	Dinamarquês	Inglês	Alemão	Sueco
CIGARROS	Dunhill	Hollywood	Pallmall	Free	Plaza
ANIMAIS	Gato	Cavalo	Pássaros	Peixe	Cachorro

Problema 147)

Seja v o volume da caixa-d'água. Com os dois registros abertos, ao final de uma hora a caixa terá enchido $v/3$ e esvaziado $v/4$, para ficar com $v/3 - v/4 = v/12$. Assim, após 4 horas a caixa estará $v/3$ cheia. Com o registro de saída fechado, a caixa enche $v/3$ a cada hora; logo, ao final de 2 horas ela estará completamente cheia.

Problema 148)

Primeira solução

Seja $\# \, x$ o número de algarismos de x.

Teorema: $\# \, 2^n + \# \, 5^n = \# \, 10^n$, *onde n é um inteiro positivo.*

(Assim, $\# \, 2^{1999} + \# \, 5^{1999} = \# \, 10^{1999} = 2000$.)

Demonstração:

Considere que $2^{1999} = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n$, tal que $\# \, 2^{1999} = n$, e que $5^{1999} = b_1 b_2 b_3 \ldots b_{m-1} b_m$, tal que $\# \, 5^{1999} = m$, com $a_1 \neq 0$ e $b_1 \neq 0$.

Sabe-se que $\# \, (2^{1999} \times 5^{1999}) = \# \, 10^{1999} = 2000$. Queremos provar que $m+n = 2000$. Pode-se escrever 2^{1999} como $a_1{,}a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n \times 10^{n-1}$ e, de modo análogo, 5^{1999} como $b_1{,}b_2 b_3 \ldots b_{m-1} b_m \times 10^{m-1}$, cujo produto é dado por $k \times 10^{m+n-2}$, onde k é um número inteiro tal que $1 \leq k \leq 99$, pois a_1 e b_1 são algarismos entre 1 e 9, inclusive.

Como se conhece o produto de 2^{1999} por 5^{1999}, sabe-se que k só pode ser 1 ou 10. No entanto, k não pode ser 1, pois para isso uma das duas assertivas deveria ser verdadeira:

1) $a_1{,}a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n$ e $b_1{,}b_2 b_3 \ldots b_{m-1} b_m$ são iguais a 1.
2) $a_1{,}a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n$ e $b_1{,}b_2 b_3 \ldots b_{m-1} b_m$ são inversos.

Mas sabe-se que ambas são falsas. A primeira por razões óbvias e a segunda porque ou a_1 ou b_1 seria necessariamente zero, contradizendo nossas premissas. Assim, $k = 10$. Logo,

$$k \times 10^{m+n-2} = 10 \times 10^{m+n-2} = 10^{m+n-1} = 10^{1999} \;\therefore\; m+n = 2000. \quad \blacksquare$$

Obs: esta solução nos foi enviada por Demétrius Melo de Souza.

Segunda solução

Sejam

M – número de algarismos na representação decimal de 2^n
N – número de algarismos na representação decimal de 5^n

e o número que estamos procurando será dado por $M + N$. Sabemos que (ver, p. ex., Lopes, L., *Manual das Funções Exponenciais e Logarítmicas*)

$$M = \lfloor \log 2^n \rfloor + 1 = \lfloor n \log 2 \rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor + 1$$
$$N = \lfloor \log 5^n \rfloor + 1 = \lfloor n \log 5 \rfloor + 1 = \lfloor n \log 10 - n \log 2 \rfloor + 1 = \lfloor n - x \rfloor + 1,$$

onde $x = n \log 2 = m{,}a_1a_2\dots$ pois $x \notin \mathbb{Z}$ ($\log 2$ é irracional). Assim,

$$\begin{aligned}\lfloor n-x \rfloor &= \lfloor n-m-0{,}a_1a_2\dots \rfloor &&= n-1-m &&= n-1-\lfloor x \rfloor\\ M+N &= \lfloor x \rfloor + 1 + n - \lfloor x \rfloor &&= n+1\end{aligned}$$

e, para $n = 1999$, resulta $M + N = 2000$.

Problema 149)

Vamos supor que escrevemos os números 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Vemos então que 7 é o 4º inteiro escrito. Escrevendo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, vemos que 7 é o 7º (claro!). E 7+4 = 11. Levando este raciocínio para os dados deste problema, seja x a ordem (e o inteiro escrito) do mesmo número escrito em ordem crescente. Então, $x + 333 = 1001 \therefore x = 668$.

Problema 150)

Seja t o tempo que Beatriz gasta para percorrer os 50 m. Então, Jady gasta também t para percorrer 40 m. Na segunda corrida, Jady terá que percorrer apenas 40 m, o que ela faz num tempo t, que é o mesmo tempo gasto por Beatriz para percorrer todo o percurso. Logo, as duas empatarão.

Problema 151)

Primeira solução

Seja p o preço do artigo. Pagando à vista, o artigo custaria $0{,}9p$. Pagando a prazo, em duas prestações iguais de $0{,}5p$, a dívida (valor financiado para a segunda prestação) passa de $0{,}9p - 0{,}5p = 0{,}4p$ para $0{,}5p$. Então, os juros mensais foram de $(0{,}5p - 0{,}4p)/0{,}4p = 0{,}25 = 25\%$.

Segunda solução

Seja R\$ 100 o preço do artigo (note que sempre se pode fazer isto). Após o pagamento da primeira parcela, R\$ 40 foram financiados para o próximo mês, ao fim do qual pagaram-se R\$ 50, ou seja, R\$ 10 a mais (diferença devida aos juros). Logo, os juros são de $10/40 = 0{,}25 = 25\%$.

Problema 152)

a) com uma única pesagem, só se pode equilibrar metade de um pacote em cada prato. Logo, pode-se obter apenas pacotes de 12 kg.

b) com somente duas pesagens, podemos, na primeira, obter pacotes de 12 kg, como visto no item a). Na segunda pesagem, equilibrando as metades de 12 kg, obtemos 6 kg. E adicionando os dois pacotes formados, obtemos 18 kg.

Problema 153)

Sejam a, b e x, nesta ordem, os números postos imediatamente à direita do 3. É imediato que $3 + a + b = a + b + x$, donde se tira que $a + b = 9$ e $x = 3$. Percebe-se facilmente que a seqüência ficará:

$$3 \quad a \quad b \quad 3 \quad a \quad b \quad 3 \quad a \quad 5 \quad 3$$

O que dá $b = 5$ e, conseqüentemente, $a = 4$. Logo, a resposta é 3.

Problema 154)

Pelo dado do meio, vê-se que a face oposta ao 2 é o 4. Analisando o dado de baixo, vê-se que, no dado de cima, 5 é a face oposta ao 6, o que dá o 1 como a face oposta ao 3. Logo, a face inferior do dado de baixo só pode ser o 4 ou o 2. E virando o de cima, vê-se que o número da face que é a base inferior da coluna de dados é 4.

Problema 155)

135 deixa resto 2 na divisão por 7, logo será uma terça-feira, independentemente do ano ser ou não bissexto.

Problema 156)

Sejam

v_b : velocidade do barco com relação à água
v_c : velocidade da correnteza = velocidade da balsa

Coloquemos o referencial na balsa; logo, a balsa (que tem a mesma velocidade da correnteza) "vê" o barco tanto se afastar como se aproximar com a mesma velocidade v_b em módulo. Ou seja, podemos imaginar que a balsa ficou parada, com apenas o barco se movendo.

No encontro, a distância entre os dois é obviamente zero. Durante uma hora o barco se afasta da balsa com velocidade v_b constante, percorrendo assim uma distância $d = v_b \cdot 1 = v_b$. Quando o motor pára, a distância entre o barco e a balsa não se altera (nesta situação, a velocidade do barco com relação à água é zero). E quando desce o rio (já com o motor funcionando), desce com a mesma velocidade v_b; e como a distância que ele tem que vencer até encontrar a balsa é v_b também, o barco levará obviamente 1 hora até encontrá-la. O tempo total para o encontro é $1 + 0{,}5 + 1 = 2,5\,\mathrm{h}$. Que é o tempo durante o qual a balsa andou na velocidade da correnteza. Logo, $v_c \cdot 2{,}5 = 7{,}5 \therefore v_c = 3\,\mathrm{km/h}$.

Problema 157)

Seja n o número de damas. A n-ésima dama dançou com $n + 4$ cavalheiros. Donde se tira:

$$\begin{aligned} n + (n+4) &= 56 \\ n &= 26 \end{aligned}$$

Então o número de damas é 26 e o de rapazes, 30.

Problema 158)

Dando nomes a todos os quadrados: o quadrado menor se chama C, os outros dois adjacentes a ele, D, o menor e E, o maior. Os outros dois quadrados adjacentes a D chamam-se F, o menor, e G, o maior. Os outros dois quadrados adjacentes ao F chamam-se H, o menor, e I, o maior.

Implicitamente foi dito que os lados de A e B medem 8 e 9 unidades, respectivamente. Daí se tira que: o lado C mede 1; D mede 7; E mede 10; F mede 4; G mede 15; H mede 14; I mede 18. Logo, as dimensões do quadrilátero são: altura 33 unidades e base 32 unidades.

Problema 159)

	Primeiro	Segundo	Terceiro	Quarto	Quinto
J - Josimar		$\cancel{D}$		J	
L - Luís			$\cancel{L}$		S
M - Marcelo	$\cancel{D}$	M			
D - Demétrius	L				$\cancel{D}$
S - Silvana		$\cancel{S}$	D		

Analisando a tabela, onde a barra (/) sobre a letra indica uma mentira, conclui-se que: L ficou em 1º; M em 2º; D em 3º; J em 4º; S em 5º.

Problema 160)

(A) se todo vascaíno é mentiroso, nada impede de haver algum mentiroso que não seja vascaíno.
(B) se todo mentiroso é vascaíno, nada impede de haver algum vascaíno que não seja mentiroso.
(C) se nenhum mentiroso é vascaíno, é claro que existe mentiroso que não seja vascaíno. O que forçosamente tem que ocorrer.

(D) se não existe vascaíno mentiroso, então é contraditório dizer que algum vascaíno é mentiroso.
(E) se existe algum mentiroso vascaíno, nada impede de existir outro mentiroso que não seja vascaíno.

Apenas a alternativa (D) apresenta uma contradição.

Problema 161)
Sejam

$$\begin{aligned} h &\text{ – número de filhos} \\ m &\text{ – número de filhas} \end{aligned}$$

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} h-1 &= m \\ h &= 2(m-1) \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $h = 4$ e $m = 3$. Logo, o casal possui 4 filhos e 3 filhas.

Problema 162)
Evandro trabalhou, ao todo, por 3 dias e com isso efetuou 3/15 ou 1/5 da obra. Restaram então 4/5 da obra, que foram efetuados por Belêncio em 8 dias. Portanto, podemos concluir que Belêncio faria 1/5 da obra em 2 dias, ou seja, 1/10 da obra em 1 dia, o que indica que ele levaria 10 dias para efetuar toda a obra sozinho.

Problema 163)

Havia 15 lotes de laranjas bonitas e apenas 10 lotes das restantes. Não podendo, assim, serem todas reunidas para formar uma certa quantidade de lotes mistos, pois neste agrupamento, sobrarão 5 lotes de laranjas bonitas, o que dá 10 laranjas, que formarão 2 lotes mistos. Portanto, haverá 2 lotes de 5 laranjas bonitas cada (que vendidas separadamente arrecadam R$ 5,00) sendo vendidos como lotes mistos (que arrecadam somente R$ 4,00).

Problema 164)

a) começando com um **X** como mostrado no enunciado do problema (num canto), temos 5 posições para colocar um **O**; como são 4 cantos, temos 20 modos de escrever. Colocando agora **X** uma casa à direita, podemos colocar um **O** somente nas três casas da última linha. E pela simetria, podemos repetir a forma desta posição 4 vezes, para um total de 12. Logo, começando com **X**, temos 32 modos. E não precisamos contar os casos começando com **O** pois estes já foram considerados ao esgotarmos todas as posições para **X**. Logo, encontramos o total de 32 modos para escrever **X** e **O** (32 quadrados grandes) segundo as condições dadas.

b) começando com um **X** em qualquer quadrado, podemos colocar um **O** em quatro quadrados. Como temos 9 quadrados por onde começar, temos 36 modos de escrever. E pela mesma razão da situação acima, não precisamos contar os casos começando com **O**. Logo, encontramos o total de 36 modos para escrever **X** e **O** (36 quadrados grandes) segundo as condições dadas.

Problema 165)

Neste problema, rendimento é a grandeza definida pela razão

$$\frac{\text{distância percorrida}}{\text{quantidade de litros consumidos}}.$$

Sendo $2x$ km o percurso total, temos que na primeira metade foram consumidos $x/11$ litros e na segunda, $x/9$ litros. Logo, o rendimento em todo o percurso será de

$$\frac{2x\,\text{km}}{[(x/11)+(x/9)]\,\ell} = 9{,}9\ \text{km}/\ell.$$

Problema 166)

Sobre as alternativas (A), (B), (C) e (D), nada podemos afirmar; mas a alternativa (E) é verdadeira, pois pelo menos uma pessoa (Vandilson) não desviou dinheiro da campanha assistencial.

Problema 167)

Hora nenhuma, pois num relógio de ponteiros, em perfeito funcionamento, quando o ponteiro menor estiver apontando exatamente para o 4, o maior deverá apontar para o 12 e nunca para o 8 e mais um pouco.

Problema 168)

Sejam

n – número de pacotes adquiridos pela escola
c – número de cadernos recebidos por cada aluno

O número total de cadernos adquiridos é $18n$, que deverão ser distribuídos igualmente a 480 alunos. Logo, devemos ter:

$$c = \frac{18n}{480} = \frac{3n}{80} \Longrightarrow n = \frac{80c}{3}$$

Como n é um número inteiro, c tem que ser um múltiplo de 3. Como queremos o menor valor possível para c, concluímos que $c = 3$ e $n = 80$.

Problema 169)

Sabe-se que, a cada período de 12 horas, um relógio de ponteiros volta a marcar uma hora já marcada antes.

A cada 12 horas o primeiro relógio adianta 120 segundos, ou seja, 2 minutos, enquanto que o segundo, a cada 12 horas, atrasa 2 minutos. O erro do primeiro (a cada 12 horas) se dá de dois em dois minutos, no sentido horário, enquanto que o do segundo, se dá de dois em dois minutos, no sentido anti-horário. O encontro ocorrerá quando cada um apresentar uma defasagem, entre si, de 12 horas, 6 horas para cada um, em relação ao horário verdadeiro. Então, serão necessárias $6\,\mathrm{h}/(2\,\mathrm{min}/\mathrm{defasagem}) = 180$ defasagens. Como cada defasagem de 2 minutos se dá de 12 em 12 horas, temos que o encontro ocorrerá ao fim de $180 \cdot 12\,\mathrm{h} = 2160\,\mathrm{h} = 90$ dias, isto é, no dia 30 de agosto, ao meio-dia.

O leitor está convidado a resolver o problema:

1 – no caso de os relógios serem digitais.
2 – no caso de um dos relógios ser digital e o outro de ponteiros.
3 – sendo os relógios de ponteiros, que horas estariam indicando no instante da coincidência?

Problema 170)

Sobre as alternativas (A) e (B), nada podemos afirmar.

Sobre a alternativa (C), temos que o número de folhas de cada árvore só pode ser qualquer número inteiro variando de 0 até 300000, totalizando, portanto, 300001 possibilidades para o número de folhas de cada árvore. Como o número de árvores é superior ao número dessas possibilidades, seguramente algumas árvores terão o mesmo número de folhas, pois é impossível que todas tenham quantidades de folhas diferentes. Logo, esta alternativa é verdadeira.

Sobre a alternativa (D), nada podemos concluir sobre tal média, pois pode ocorrer que cada árvore tenha, por exemplo, apenas 10 folhas, o que daria uma média de 10 folhas por árvore. Sobre a alternativa (E), podemos concluir que é falsa, pois se cada árvore tivesse o número máximo de folhas, teríamos $3 \times (10^5) \times (10^6) = 3 \times (10^{11}) < 10^{12}$.

Problema 171)

Troquemos os asteriscos da nota por letras:

Item	Valor (R$)
Bebidas	$16{,}0a$
Entrada	$7{,}b5$
Prato Principal	$2c{,}99$
Subtotal	$de{,}40$
10%	$f{,}44$
TOTAL	$gh{,}84$

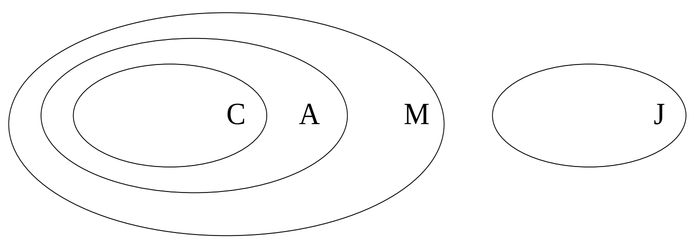
É imediato que $a = 6$ e $b = 3$. Pela linha referente aos 10%, vemos que $e = 4$, o que implica $c = 0$, e daí tiramos $d = f = g = 4$, e finalmente, $h = 8$.

Problema 172)

Definimos os seguintes conjuntos:

C – de todas as pessoas que conhecem João e Maria
A – de todas as pessoas que admiram Maria
M – de todas as pessoas que conhecem Maria
J – de todas as pessoas que conhecem João e não conhecem Maria

Supondo que quem admira Maria a conhece, fazemos a figura abaixo para nos ajudar na visualização dos conjuntos:



Analisando as alternativas, resulta:

(A) Nada impede que exista um elemento (uma pessoa) no conjunto M que não pertença ao conjunto A.
(B) Não se pode afirmar isso.
(C) Conforme a primeira assertiva, há elemento de M que não pertence a A. Logo, esta alternativa está correta.
(D) Nada impede que exista uma pessoa que conheça João e não conheça Maria, isto é, uma pessoa pode conhecer João, mas não pertencer a C.
(E) Nada impede que exista uma pessoa que conheça João e não conheça Maria, isto é, uma pessoa pode conhecer João, mas não pertencer a C, e sim a J.

Problema 173)

A	B	C	D	E
##	1	2	1	##

Sejam os números inteiros não-negativos A, B, C, D e E o número de moedas que há nesses respectivos locais. E daí, tiramos as 3 igualdades:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \\ B+C+D &= 2 \\ C+D+E &= 1 \end{aligned}$$

Temos somente dois valores possíveis para D, a saber, ou $D = 0$ ou $D = 1$.
Primeira hipótese: $D = 0$

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \qquad \text{(I)} \\ B+C &= 2 \qquad \text{(II)} \\ C+E &= 1 \qquad \text{(III)} \end{aligned}$$

Mas fazendo (II) em (I), chegamos a um absurdo: $A = -1$. Logo, esta hipótese deve ser abandonada.
Segunda hipótese: $D = 1$

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \qquad \text{(I)} \\ B+C &= 1 \qquad \text{(II)} \\ C+E &= 0 \qquad \text{(III)} \end{aligned}$$

Fazendo (II) em (I), temos $A = 0$; e de (III) tiramos $C = E = 0$. E de (II), $B = 1$. Logo, só há moedas em B e D.

Problema 174)
Sejam

A – idade do avô no primeiro aniversário
N – idade do neto no primeiro aniversário

Então a diferença $A - N = c$ é constante e podemos escrever:

$$\begin{aligned} A &= kN \\ A+1 &= k_1(N+1) \Longrightarrow N+c+1 = k_1(N+1) \\ A+2 &= k_2(N+2) \Longrightarrow N+c+2 = k_2(N+2) \\ A+3 &= k_3(N+3) \Longrightarrow N+c+3 = k_3(N+3) \\ A+4 &= k_4(N+4) \Longrightarrow N+c+4 = k_4(N+4) \\ A+5 &= k_5(N+5) \Longrightarrow N+c+5 = k_5(N+5) \end{aligned}$$

Das equações acima tiramos que:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 + \frac{c}{N+1} \\ k_2 &= 1 + \frac{c}{N+2} \\ k_3 &= 1 + \frac{c}{N+3} \\ k_4 &= 1 + \frac{c}{N+4} \\ k_5 &= 1 + \frac{c}{N+5} \end{aligned}$$

Então c tem que ser múltiplo de $N+1$, $N+2$, $N+3$, $N+4$ e $N+5$.

Se $N = 1$, calculemos $c = \text{mmc}\,(2,3,4,5,6) = 60$. E outros valores para c como 120, 180 etc não servem pois estamos falando da diferença de idades entre um avô e seu neto.

Se $N = 2$, calculemos $c = \text{mmc}\,(3,4,5,6,7) > 200$. Logo, $N = 1$, $c = 60$, $A = 61$; e $N + 5 = 6$, $A + 5 = 66$.

Problema 175)

Mantendo o mesmo tempo (dia e meio) e dobrando o número de galinhas, dobramos o número de ovos. Construímos então a seguinte tabela:

3 galinhas	3 ovos	em dia e meio
3 galinhas	6 ovos	em 3 dias
3 galinhas	12 ovos	em 6 dias
1 galinha	4 ovos	em 6 dias

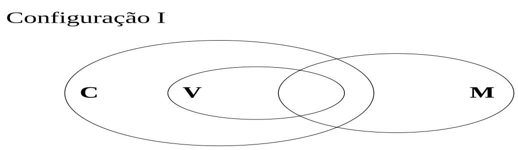
Problema 176)

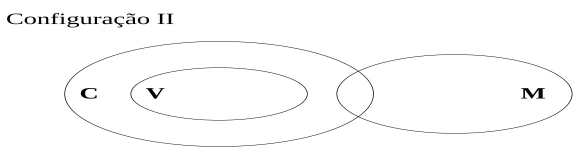
Definimos os seguintes conjuntos:

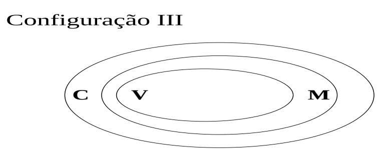
V – conjunto de todas plantas verdes
C – conjunto de todas plantas que têm clorofila
M – conjunto de todas plantas comestíveis

Eis algumas das configurações possíveis:

Analisando as alternativas, resulta:







(A) Não podemos garantir. (Vide configurção II)
(B) Não podemos garantir. (Vide configuração III)
(C) É verdade. (Vide a segunda assertiva)
(D) É possível de ocorrer, mas nada podemos garantir, dadas as configurações acima.
(E) Não podemos garantir. (Vide configurações I e II)

Problema 177)

Antes de qualquer coisa é preciso verificar que:

i) a cada rodada, metade dos times são eliminados; portanto, serão necessárias exatamente 6 rodadas para ter o vencedor do torneio;

ii) chamando o melhor jogador de 1, o segundo melhor, de 2, e assim por diante, está claro que o vencedor será o jogador 1.

Vamos verificar a possibilidade do jogador 10 chegar à 6ª e última rodada, isto é, devemos fazer do par $(1, 10)$ a decisão do torneio. Deixamos claro que basta exibirmos uma situação em que isto ocorra para termos "6 rodadas" como resposta ao problema. Para facilitar, indicamos essa partida decisiva por [1, 10], onde [x, y] indica a vitória de x sobre y.

1ª rodada

Vamos tentar, ao máximo, fazer com que os jogadores que vencem o jogador 10, joguem entre si. E então os jogos poderão ser:

1ª rodada	2ª rodada	3ª rodada	4ª rodada	5ª rodada	6ª rodada
32 partidas	16 partidas	8 partidas	4 partidas	2 partidas	1 partida
[1, 2]	[1, 3]	[1, 5]	[1, 9]	[1, 42]	[1, 10]
[3, 4]	[5, 7]	[9, 58]	[10, 18]	[10, 26]	
[5, 6]	[9, 62]	[10, 14]	[26, 34]		
[7, 8]	[10, 12]	[18, 22]	[42, 50]		
[9, 64]	[14, 16]	[26, 30]			
[10, 11]	[18, 20]	[34, 38]			
[12, 13]	[22, 24]	[42, 46]			
[14, 15]	[26, 28]	[50, 54]			
⋮	⋮				
[58, 59]	[54, 56]				
[58, 59]	[58, 60]				
[60, 61]					
[62, 63]					

Fica fácil perceber que, para as partidas entre os jogadores cujos números são maiores que 10, os vencedores: 1) na 1ª rodada, são os jogadores de número par. 2) na 2ª rodada, são todos os de número da forma $8k \pm 2$, com k natural; 3) na 3ª rodada, são todos os de número da forma $8k + 2$, com k natural.

Com a exposição acima, fica demostrado que o número máximo de jogos que o décimo melhor jogador consegue jogar é 6.

Problema 178)

É evidente que Oito deve rebocar Quatro. E que esses dois botes só devem atravessar o rio uma única vez. Com estas observações, estabelecemos nosso plano:

i) Dois leva Um. Dois fica e Um volta. Tempo total decorrido: 3 h.

ii) Oito leva Quatro. Os dois botes ficam e Dois volta. Tempo total decorrido: 13 h.

iii) Dois leva Um. O traslado se completa. Tempo total decorrido: 15 h.

Problema 179)

Sejam M a soma dos números precedidos por "+" e N, a soma dos números precedidos por "−". Deve-se então ter $M-N=0$, o que implica $M=N$. Como $1+2+3+\cdots+14=105$ é ímpar, então esta lista não pode ser repartida em dois grupos de mesma soma.

Problema 180)

Construímos a seguinte tabela, onde n é um número natural de três algarismos.

Intervalo	Quantidade de números	Quantidade de dígitos
De 1 até 9	$9-1+1=9$	$9\times 1=9$
De 10 até 99	$99-10+1=90$	$90\times 2=180$
De 100 até n	$n-100+1=n-99$	$(n-99)\times 3=3n-297$

$$\begin{aligned} 9+180+3n-297 &= 1999 \\ n=2107/3 &= 702\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Isto significa que para escrever até o 1999º algarismo, deve-se escrever de 1 até 702 e mais "1/3 do próximo número", ou seja, apenas o primeiro algarismo do número 703. Logo, a resposta é 7.

Problema 181)

Apenas para facilitar, visualizemos a tabela da seguinte maneira:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Com isso, teremos 4 subtabelas: [ABDE], [BCEF], [DEGH] e [EFHI].
O quadro E indica a quantidade total de operações realizadas pelas subtabelas, pois se qualquer uma delas for escolhida, haverá um acréscimo de uma unidade em E. Logo, E indica a quantidade de operações realizadas, a saber, 36.
Os quadros A, C, G e I indicam a quantidade de operações realizadas

por suas respectivas tabelas.
Os quadros B, D, F e H, por fazer cada um parte de duas subtabelas, indicam a soma do número de operações realizadas por essas duas subtabelas.

Em face do exposto, temos:

$$\begin{aligned}
A+G &= D \Longrightarrow 14+G=19 \therefore G=5\\
G+I &= H \Longrightarrow 5+I=H \therefore I=9\\
A+C+G+I &= E \Longrightarrow 14+C+5+9=36 \therefore C=8\\
C+I &= F \Longrightarrow 8+9=F \therefore F=17\\
A+C &= B \Longrightarrow 14+8=B \therefore B=22
\end{aligned}$$

Logo, a tabela completa fica:

14	22	8
19	36	17
5	14	9

Problema 182)

Sendo x o número de pessoas do ônibus branco, temos:

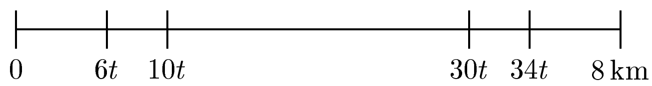
$$\begin{aligned}
\text{Branco} &\rightarrow x\\
\text{Vermelho} &\rightarrow 3x\\
\text{Amarelo} &\rightarrow 6x
\end{aligned}$$

As diferenças possíveis são $3x-x=2x$, ou $6x-3x=3x$ ou $6x-x=5x$. Dessas, apenas a última convém, já que x é um número natural e devemos ter $5x=25$. Portanto, $x=5$.

Então o amarelo ia para a Zona Sul e o branco, para a Norte. O que dá a seguinte configuração: o ônibus amarelo, com 30 pessoas, ia para a Zona Sul; o vermelho, com 15 pessoas, para a Zona Leste; o branco, com 5 pessoas, para a zona Norte.

Problema 183)

Seja t o tempo em horas gasto para o motorista Bernardo deixar Cláudio no marco $30t$. Enquanto isso, André fez um percurso de $6t$ e ficou a uma distância de $24t$ de Bernardo, que viaja com uma velocidade 5 vezes maior do que a sua. Portanto, Bernardo terá que percorrer uma distância $5x$ quando voltar para apanhar André que, por sua vez, percorrerá uma distância x, donde tiramos $5x+x=24t$, ou seja, $x=4t$. Logo, o ponto onde Bernardo apanha André é o marco $10t$. Neste instante, Cláudio também percorreu $4t$ e se encontra no marco $34t$, como mostra o esquema abaixo:



Partindo do marco $10t$, o carro com Bernardo e André deverá viajar por T horas para chegar à cidade destino, marco 8 km, no mesmo instante em que Cláudio. O que produz $10t+30T=34t+6T$, ou seja, $t=T$. E daí vem $10t+30t=8$, ou ainda, $t=1/5$. Logo, do marco $10t$ até a cidade destino, foram gastos 12 minutos. Faltando contar apenas o tempo y que André levou para chegar ao marco $10t$:

$$y=\frac{\text{espaço}}{\text{velocidade}}=\frac{10\,t}{6}=\frac{1}{3},$$

ou seja, $y=20$ minutos.

Portanto, a viagem durou $20+12=32$ minutos.

Problema 184)

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} 100-85 &= 15 \ \text{ não são casados.}\\ 100-70 &= 30 \ \text{ não têm telefone.}\\ 100-75 &= 25 \ \text{ não têm automóvel.}\\ 100-80 &= 20 \ \text{ não têm casa própria.} \end{aligned}$$

Na pior das hipóteses, todos estes homens são diferentes, não sendo mais que 90 $(15+30+25+20)$. O número mínimo dos que possuem simultaneamente todas as características é 10.

Problema 185)

Chamando de x o número do tijolo entre os tijolos de números 2 e 6 (tijolo apontado pela seta) e de y o número do tijolo entre os tijolos de números 6 e 10, temos os seguintes números para os tijolos da segunda camada (da esquerda para a direita):

$$2+x;\ 6+x;\ 6+y;\ 10+y$$

Para os da terceira camada, vem:

$$8+2x;\ 12+x+y;\ 16+2y$$

Logo,

$$\begin{aligned} 8+2x+12+x+y &= 44 \Longrightarrow 3x+y=24 \\ 12+x+y+16+2y &= 60 \Longrightarrow x+3y=32 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x=5$.

Problema 186)

Se 1 diz a verdade, então 2 também, o que é um absurdo, pois 1 estaria mentindo. Analogamente, se 3 diz a verdade, então 4 e 2 também, o que é um absurdo, pois 3 estaria mentindo. E, finalmente, se 5 diz a verdade, então 6, 4 e 2 também, o que é um absurdo, pois 5 estaria mentindo. Logo, todos mentem.

Problema 187)

Entre 11 h e 1 h os ponteiros se sobrepõem somente uma vez (às 12 h). E entre 1 h e 11 h, dez vezes (uma vez a cada intervalo de uma hora). Logo, os ponteiros podem se sobrepor em 11 lugares diferentes do mostrador.

Problema 188)

Estudemos o quadro das potências de 2:

$$\begin{array}{llllll} 2^1 = 2 & 2^5 = 32 & 2^9 = 512 & \ldots & 2^{1997} = \ldots 2 \\ 2^2 = 4 & 2^6 = 64 & 2^{10} = 1024 & \ldots & 2^{1998} = \ldots 4 \\ 2^3 = 8 & 2^7 = 128 & 2^{11} = 2048 & \ldots & 2^{1999} = \ldots 8 \\ 2^4 = 16 & 2^8 = 256 & 2^{12} = 4096 & \ldots & 2^{2000} = \ldots 6 \end{array}$$

Como $1999 = 4 \cdot 499 + 3$, concluímos que 2^{1999} termina pelo mesmo algarismo que 2^3, ou seja, 8.

Dito de outra maneira: verificamos uma periodicidade dos algarismos das unidades simples das potências: $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, \ldots$. Como são apenas 4 possibilidades, basta fazermos $1999 \div 4$ para observarmos que o resto é 3, logo o algarismo procurado é o mesmo algarismo das unidades simples de 2^3, ou seja, 8.

Problema 189)

Seja x o número de convidados cuja língua é o português; e também o número de convidados cuja língua não é o português.

Cada um dos x convidados cuja língua não é o português dirá "bom dia" em português a cada um dos x convidados cuja língua é o português. Contando, portanto, x^2 desses cumprimentos.

Cada um dos x convidados cuja língua é o português dirá "bom dia" em português a cada um dos outros $(x-1)$ convidados cuja língua é o português. Contando, portanto, $x(x-1)$ desses cumprimentos.

Cada um dos $2x$ convidados dirá "bom dia" em português ao ministro. Contando, portanto, $2x$ desses cumprimentos.

Somando todos os cumprimentos, vem:

$$x^2 + x(x-1) + 2x = 78 \therefore x = 6.$$

Logo, há 12 convidados na recepção.

Problema 190)

Sejam

$$\begin{array}{lcl} C & \rightarrow & \text{preço de cada colher} \\ F & \rightarrow & \text{preço de cada faca} \\ G & \rightarrow & \text{preço de cada garfo} \end{array}$$

Com os dados do problema, montamos o seguinte sistema:

$$\begin{array}{rcl} 1F + 2C + 3G & = & 23{,}50 \\ 2F + 5C + 6G & = & 50{,}00 \\ 2F + 3C + 4G & = & 36{,}00 \end{array}$$

Multiplicada a primeira igualdade por 4 e dela subtraindo a soma das outras duas, obteremos:

$$2G = 8 \therefore G = 4.$$

Agora, a primeira e a segunda igualdades podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} 1F + 2C &= 11{,}50 \\ 2F + 5C &= 26 \end{aligned}$$

Subtraindo da segunda igualdade o dobro da primeira, obteremos:

$$C = 3 \quad \text{e} \quad F = 5{,}50.$$

Assim: colher: R\$ 3,00; faca: R\$ 5,50; garfo: R\$ 4,00.

Problema 191)

Em preparação.

Problema 192)

Inicialmente, tem-se

vinho	água
100	0

Após a primeira substituição, tem-se:

vinho	água
100	0
$100 - x$	x

Na segunda substituição, retiram-se x litros da mistura, sendo a quantidade v de vinho retirada dessa mistura diretamente proporcional à quantidade de vinho lá existente. A quantidade a de água retirada dessa mistura também será diretamente proporcional à quantidade de água lá existente. Portanto, cabem as igualdades $v = k(100 - x)$ e $a = kx$, sendo $v + a = x$, o que fornece o valor da constante de proporcionalidade $k = x/100$. Logo, as respectivas quantidades de vinho e água no barril passam a ser expressas pela última linha da seguinte tabela:

vinho	água
100	0
$100 - x$	x
$100 - x - \frac{(100-x)x}{100} = \frac{(100-x)^2}{100}$	$x - \frac{x^2}{100} + x = 2x - \frac{x^2}{100}$

Daí, segue-se que

$$2x - \frac{x^2}{100} = 36 \therefore x = 20.$$

Problema 193)

Seja S_n o número de maneiras de Clarita chegar ao n-ésimo batente. Clarita pode chegar ao primeiro batente de uma maneira apenas. Logo, $S_1 = 1$. Clarita pode chegar ao segundo batente de duas maneiras apenas: $1+1$, ou seja, subindo um batente de cada vez, ou 2, ou seja, subindo logo dois batentes. Assim, $S_2 = 2$. Clarita pode chegar ao terceiro batente de três maneiras diferentes: $1 + 1 + 1$, ou $1 + 2$ ou $2 + 1$. Logo, $S_3 = 3$. E assim por diante.

Fica bem claro que para Clarita chegar ao batente n ela tem que ter vindo ou do batente $n - 1$ ou do batente $n - 2$. No primeiro caso, basta subir mais um batente e no segundo, basta subir dois batentes de uma só vez. Por conseguinte, salta aos olhos a seguinte lei de recorrência:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}.$$

Então, o número de maneiras de Clarita chegar ao sexto batente é 13. E, analogamente, o número de maneiras de ela ir do sexto ao décimo batente é 5. Pelo princípio multiplicativo, temos: $S_{10} = S_6 \cdot S_4 = 13 \cdot 5 = 65$.

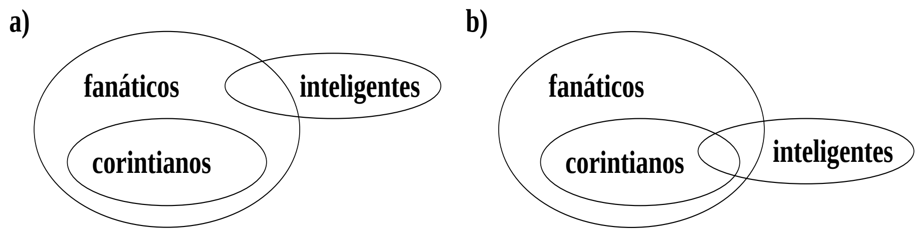
Problema 194)

Basta analisar as duas seguintes configurações possíveis (entre outras) para reconhecer que a resposta é dada pela opção da letra "e".

Problema 195)

A quantidade de carros que entram no quarteirão é igual à quantidade de carros que saem. Logo:

$$380 + 540 + 470 + 450 = x + 430 + 420 + 400 \therefore x = 590.$$



Problema 196)

a) Se Y pertence ao grupo, então F não pertence. Logo, os dois homens escolhidos serão (G,H); mas como Y se recusa a trabalhar com Z e G se recusa a trabalhar com W, o outro membro do grupo será X. Assim, os membros serão G, H e X.

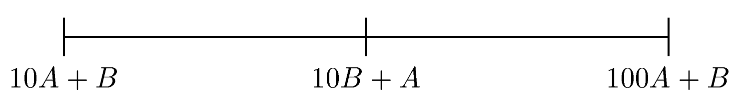
b) I. Se F não é escolhido, então os dois homens escolhidos serão G e H, mas como G se recusa a trabalhar com W, implica que W também não será escolhido. (VERDADEIRO)

II. Se H não é escolhido, então os dois homens escolhidos serão F e G, mas como W se recusa a trabalhar com G e Y com F, implica que as duas mulheres escolhidas serão X e Z. (VERDADEIRO)

III. Se G não é escolhido, então os dois homens escolhidos serão F e H, mas como Y se recusa a trabalhar com F, implica que as duas mulheres escolhidas estão entre W, X e Z. (FALSO)

Problema 197)

Seja A o algarismo das dezenas e B, o das unidades do primeiro marco (quilométrico). Com os dados do problema, podemos imaginar a seguinte configuração para os marcos:



Como a velocidade é constante e os intervalos de tempos para se percorrer a distância entre os marcos são iguais, concluímos que esses marcos estão igualmente espaçados, o que nos dá:

$$(10B + A) - (10A + B) = (100A + B) - (10B + A) \therefore B = 6A.$$

Mas só podemos fazer $A = 1$, donde vem $B = 6$. Logo, os marcos são 16, 61 e 106, e a velocidade, $v = 61 - 16 = 45\,\text{km/h}$.
Observação: a configuração 10A + B, 10B + A e 100B + A revela-se impossível.

Problema 198)
Sim, Roberto tem mais chances de ganhar. Se, e somente se, a primeira escolha de Roberto não for a porta do carro, ele ganhará o carro, logo ele possui duas chances de ganhar contra uma de não ganhar. Rodrigo ganhará o carro se, e somente se, escolher a porta do carro, logo ele possui uma chance de ganhar contra duas chances de não ganhar o carro.

Problema 199)
Se $325-180 = 145\,\text{g}$ correspondem à metade do "peso" da água, então toda a água "pesa" $290\,\text{g}$. Logo, o copo vazio "pesa" $325 - 290 = 35\,\text{g}$.

Problema 200)
Vindo de trás para frente, no fim da terceira parada, vemos que se desceram metade das crianças e mais 0,5 criança, resultando em zero criança no ônibus, então metade das crianças que lá havia, era igual a 0,5 criança, o que indica que após a segunda parada havia apenas uma criança no ônibus.

Na segunda parada, vemos que se desceram metade das crianças e mais 0,5 criança, resultando em apenas uma criança no ônibus, então metade das crianças que lá havia, era igual a $0{,}5 + 1 = 1{,}5$ criança, o que indica que após a primeira parada havia apenas três crianças no ônibus.

Na primeira parada, vemos que se desceram metade das crianças e mais 0,5 criança, resultando em três crianças no ônibus, então metade das crianças que lá havia, era igual a $0{,}5 + 3 = 3{,}5$ crianças, o que indica que inicialmente havia apenas sete crianças no ônibus.