Problema 201)

Por II (já que Roberto é amigo de Paulo), Mário não é amigo de Roberto. Decorre de I que João não é amigo de Roberto. E de III concluímos que Antônio não é amigo nem de João nem de Mário.

Logo, a resposta (D) é correta.

Problema 202)

Vamos contar, separadamente, quantas vezes o algarismo 1 aparece na posição das centenas, das dezenas e das unidades.

centenas	1 X X, onde $\mathrm{X} = 0, 1, \ldots, 9$.
dezenas	X 1 Y, onde $\mathrm{X} = 1, 2, \ldots, 9$ e $\mathrm{Y} = 0, 1, \ldots, 9$.
unidades	X Y 1, onde $\mathrm{X} = 1, 2, \ldots, 9$ e $\mathrm{Y} = 0, 1, \ldots, 9$.

Assim, o algarismo 1 aparece 100 (10×10) vezes na posição das centenas; 90 (9×10) vezes na posição das dezenas; 90 (9×10) vezes na posição das unidades. Para um total de 280 vezes.

Problema 203)

Maria parcelou R\$ 250,00 $= P$. O total de juros cobrados a cada mês foi de

$$250 \times 0{,}02 = \frac{250}{50} = 5.$$

Se não fossem cobrados juros, e como as prestações mensais seriam iguais, a cada mês ela pagaria $P/5 = 50$. E com os juros, $P/5 + 5$.

Logo, o valor de cada prestação foi de R\$ 55,00.

Problema 204)

Desenhemos dois quadrados representando as faces superior (tampa) e inferior (base).

Seja [a,b,c,d] a notação para representar o quadrado de vértices a, b, c, d. A tampa será dada pelo quadrado [1,2,3,4] e a base, pelo quadrado [5,6,7,8]; sendo que os vértices (1,5), (2,6), (3,7) e (4,8) são ligados por arestas. Reconstituindo o cubo, através de dobraduras adequadas, vem:

[1,2,3,4]	face superior	**V**
[5,6,7,8]	face inferior	**K**
[1,3,5,7]	face lateral esquerda	**B**
[2,4,6,8]	face lateral direita	**C**
[3,4,7,8]	face anterior (frontal)	**X**
[1,2,5,6]	face posterior	**O**

Logo, **X** e **O** ficam em faces opostas.

Problema 205)

Sejam

p – quantidade de moedas que o 1º marujo encontrou
s – quantidade de moedas que o 2º marujo encontrou
t – quantidade de moedas que o 3º marujo encontrou
c – quantidade de moedas que o comandante encontrou
m – quantidade de moedas que cada marujo recebeu

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$s = \tfrac{2}{3}(p-1), \quad t = \tfrac{2}{3}(s-1) \quad \text{e} \quad c = \tfrac{2}{3}(t-1).$$

Mas $c = 3m + 1$. Assim, $3m + 1 = \frac{2}{3}(t-1)$. $(*)$
Colocando t em função de p, e substituindo em $(*)$, resulta:

$$p = \frac{81m + 65}{8}.$$

Mas sabemos que $200 < p < 300$. Basta agora, então, encontrar um m tal que p seja um inteiro entre 200 e 300. Logo,

$$\begin{array}{rcccl} 200 & < & \frac{81\,m+65}{8} & < & 300 \\ 1600 & < & 81\,m + 65 & < & 2400 \\ 1535 & < & 81\,m & < & 2335 \\ 19 & \leq & m & \leq & 28 \end{array}$$

Como $81m + 65$ tem que ser um número par (p é um número inteiro), m só pode assumir um valor ímpar. Testando então $m = 19$, 21, 23, 25 e 27, vemos que o único valor possível para m é 23. Portanto, o primeiro marujo encontrou 241 moedas.

Problema 206)

Henrique tem razão. Sendo $(600 + 900)/3 = 500$, que é a quantia que caberá a cada um, vê-se que Fernando cedeu a Cardoso apenas $600 - 500 = 100$; enquanto que Henrique cedeu a Cardoso $900 - 500 = 400$, isto é, 4 vezes mais que Fernando. Portanto, Henrique deve receber uma quantia 4 vezes maior que a de Fernando.

Problema 207)

Sejam

A – conjunto das garotas que têm olhos azuis
C – conjunto das garotas que têm olhos castanhos
L – conjunto das garotas louras
R – conjunto das garotas ruivas
U – conjunto das (todas) garotas

Se $|X|$ representa o número de elementos do conjunto X, então $|U| = 50$, $|R| = 31$ e $|U| = |L| + |R|$. Logo, $|L| = 19$, ou seja, há 19 garotas louras. Como o problema diz que há 14 louras de olhos azuis, concluímos que há 5 louras de olhos castanhos. Como há 18 garotas que têm olhos castanhos, então há 13 garotas ruivas de olhos castanhos.

Problema 208)

Calculemos, separadamente, o número de toques necessários para numerar as páginas com um algarismo, com dois e com três algarismos.

$$9 \text{ toques para numerar as páginas 1 a 9.}$$
$$2 \times 90 = 180 \text{ toques para numerar as páginas 10 a 99.}$$
$$3 \times 686 = 2058 \text{ toques para numerar as páginas 100 a 785.}$$

Para um total de $9 + 180 + 2058 = 2247$ toques.

Problema 209)

Seja p o preço de cada unidade. O custo das três unidades é $3p$. Mas só pago $2p$. Assim, tenho um desconto de p para cada 3 unidades vendidas. Logo, o desconto por unidade é $p/3p = (100/3)\%$.

Problema 210)

Vemos que a diferença entre os números de cada coluna a cada duas linhas é sempre 8. Dividamos então 1992 e 1997 por 8 e examinemos seus restos:

$$\begin{aligned} 1992 &= 249 \times 8 + 0 \\ 1997 &= 249 \times 8 + 5 \end{aligned}$$

Logo, 1992 ocupará a coluna 1 e 1997, a coluna 4 (pois o resto 5 ocupa a coluna 4 na linha 2).

Problema 211)

Vamos calcular o custo para se estacionar durante 6 horas nas duas situações:

Custo de 6 horas antes do aumento	R$ 10,00
Custo de 6 horas depois do aumento	R$ 15,00

Logo, o aumento foi de $\dfrac{15-10}{10} = 50\%$.

Problema 212)

No total são 60 pontos disputados e a EN venceu a competição com 1 ponto de vantagem sobre a AFA e 2 pontos de vantagem sobre a AMAN.

Sejam p, $p-1$ e $p-2$ os pontos feitos pela EN, AFA e AMAN, respectivamente. Então:

$$p + p - 1 + p - 2 = 60 \;\therefore\; p = 21.$$

Pontos: EN $\to$ 21, AFA $\to$ 20, AMAN $\to$ 19. No total são 30 medalhas disputadas e a AMAN ganhou 1 medalha a mais que a AFA e 2 a mais que a EN.

Sejam m, $m-1$ e $m-2$ as quantidades de medalhas ganhas pela AMAN, AFA e EN, respectivamente. Então:

$$m + m - 1 + m - 2 = 30 \;\therefore\; m = 11.$$

Quantidades de medalhas: AMAN $\to$ 11, AFA $\to$ 10, EN $\to$ 9.

Com esses dados, e valendo-se do fato de que a AMAN ganhou mais medalhas de ouro do que qualquer uma das outras duas Escolas, isto é, ganhou ao menos 4 delas, mas não pode ter ganho 5 ou mais, pois, nestes casos, seria a vencedora da competição, fica fácil montar a seguinte tabela:

	AMAN	AFA	EN
OURO	4	3	3
PRATA	0	4	6
BRONZE	7	3	0
	11 medalhas 19 pontos	10 medalhas 20 pontos	9 medalhas 21 pontos

Logo, a Escola Naval conquistou 6 medalhas de prata.

Problema 213)

O trem voltará à estação de saída após ter percorrido um número de estações que terá que ser um múltiplo comum de 6 e 20. Logo, após 60 estações, ou seja, 3 voltas completas, o trem se encontrará novamente na estação de saída.

Problema 214)

Sejam

x – número de mesas ocupadas por 4 pessoas
y – número de mesas ocupadas por 2 pessoas

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} x + y &= 12 \\ 4x + 2y &= 38 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $y = 5$.

Problema 215)

A palavra "ATRAPALHA" possui 9 letras. Com esta observação, podemos resolver o item a).

a) a milésima letra vai ser dada pela posição do resto da divisão 1000/9 dentro da palavra "ATRAPALHA": $1000 = 111 \times 9 + 1$.
Logo, a milésima letra é o primeiro A.

b) pelo item anterior, Chiquinha escreveu 111 vezes a palavra "ATRAPALHA" e mais um A. Assim, se N representa o número de letras A escritas, vem: $N = 4 \times 111 + 1 = 445$.

Problema 216)

Se a cada 5,8 mil horas de vôo ocorreu um acidente, então em 105 mil horas ocorreriam $105/5{,}8 \approx 18$ acidentes.

Então, aconteceram 17 acidentes a mais.

Problema 217)

Vê-se claramente que $X = 1$. Daí tiramos que $Y = 9$ e $Z = 0$. Logo, $X + Y + Z = 10$.

Problema 218)

Seja $P_0 = 80\,000$. Ao final do primeiro mês, a dívida cresceu para P_1, onde

$$P_1 = P_0 + i \times P_0 = (1+i)P_0.$$

Ao final do segundo mês, a dívida cresceu para P_2, onde

$$P_2 = (1+i)P_1 = (1+i)^2 P_0.$$

Mas $P_2 = 115\,200$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} (1+i)^2 & = & \frac{115200}{80000} \;=\; 1{,}44 \\ 1+i & = & 1{,}2 \quad \therefore \quad i \;=\; 0{,}2 \end{array}$$

Logo, a taxa mensal de juros cobrada foi de 20%.

Problema 219)

Sejam

P_0 – preço inicial
P_1 – preço reajustado
i – porcentagem do reajuste feito

Então, $P_1 = (1+i)P_0$. Como a loja deu um desconto de 20% e o preço voltou ao seu valor inicial P_0, temos:

$$\begin{array}{rcccl} 0{,}8P_1 & = & 0{,}8(1+i)P_0 & = & P_0 \\ & & 1+i & = & \frac{1}{0{,}8} \;=\; 1{,}25 \\ & & i & = & 0{,}25 \end{array}$$

Logo, a porcentagem do reajuste foi de 25%.

Problema 220)

Por 2) e 3) concluímos que Mário erra. Por 1) deduzimos que Mário não é médico.

Por 1) e 3) concluímos que nenhum médico é ciumento.

Analisando as opções de respostas, vemos que (E) é a única correta.

Problema 221)

Sejam

A – quantia que Adriana possui
p – número de pobres

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} A &= 13p+5 \\ A &= (13+4)(p-3)+8 = 17p-43 \\ 13p+5 &= 17p-43 \Longrightarrow p=12 \end{aligned}$$

Problema 222)

Sejam

x – proporção do leite tipo B na mistura
y – proporção do leite tipo C na mistura

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} y &= 1-x \\ 170x+105y &= 144 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 39/65$ e $y = 26/65$. Logo, $y/x = 2/3$.

Problema 223)

Como os três carros desenvolvem a mesma velocidade durante o mesmo tempo, eles percorrerão a mesma distância $d = 80 \times 4 = 320$ km.

Problema 224)

Sejam $12 \times 11 \times \ldots \times 2 \times 1 = 12!$ e $13 \times 12! = 13!$. Sabemos que $12! + 14$ é divisível por 13. Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} 12!+13+1 &= 13k \\ 12!+1 &= 13\,(k-1) \\ 13!+13 &= 169\,(k-1) \\ 13! &= 169\,(k-1) - 13 - 156 + 156 \\ &= 169\,(k-2) + 156 \\ &= 169\,l + 156 \end{aligned}$$

Logo, o resto é 156.

Problema 225)

A cada hora os ponteiros formam um ângulo reto em dois momentos distintos, exceto entre 2 e 3 horas e entre 8 e 9 horas (extremos direitos exclusive).

Logo, em 12 horas os ponteiros formarão um ângulo reto 22 vezes e em 24 horas, 44 vezes.

Problema 226)

Considerando as duas declarações, temos:

i) Mariana não nos diz aonde irá ou o que fará se chover. Aliás, nada impede que ela vá à praia mesmo chovendo.

ii) como choveu o dia inteiro, podemos concluir que Kárita foi ao clube.

Analisando as opções de respostas, vemos que (A) é a única correta.

Problema 227)

Antônio constrói 20 cadeiras em 12 horas. Então, em 1 hora fará $20/12 = 5/3$ cadeiras. Severino, pelo seu lado, constrói 15 cadeiras em 16 horas. Então, em 1 hora fará $15/16$ cadeiras. Combinando seus esforços, em 1 hora eles farão

$$\frac{5}{3} + \frac{15}{16} = \frac{125}{48} \text{ cadeiras.}$$

Então, para fazer 250 cadeiras eles precisarão de 96 horas ou $96/6 = 16$ dias.

Problema 228)

Sejam N o número procurado e a e b seus algarismos das dezenas e unidades, respectivamente. Com um dos dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} N &= 10\,a + b \\ N + 270 &= 100\,a + b \end{aligned}$$

Daí tiramos que $10\,a+b+270 = 100\,a+b \Longrightarrow a = 3$. Ou seja, N é maior que 29 e menor que 40.

Para calcular b, usamos o outro dado do problema: a decomposição em fatores primos de N deve conter algum fator primo diferente de 2 e de 5 (do contrário N não seria uma dízima periódica) e a quantidade de algarismos da parte não periódica de uma dízima periódica é dada pelo maior expoente de 2 ou de 5 (na sua decomposição em fatores primos). Como os números $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^2 \cdot 7 = 28$ e $5^2 \cdot 3 = 75$ irão cair fora do intervalo $(29, 40)$, temos que $N = 2^2 \cdot 3^2 = 36$. Logo, a resposta $3+6 = 9$.

Problema 229)

O ponteiro das horas desloca-se 30° por hora ou 10° a cada 20 minutos. Às 4 h 20 min o ponteiro dos minutos encontra-se no 4. Logo, o ângulo agudo formado por eles é de 10°.

Problema 230)

Basta imaginar um polígono (convexo) no qual cada vértice representa um idioma e cada segmento, lado ou diagonal, representa um habitante. Pois, assim, tem-se só dois idiomas para cada habitante e um único habitante para cada dois idiomas. Como são quatro idiomas, tem-se quatro vértices, logo esse polígono é um quadrilátero e o número de segmentos é 6 (quatro lados e duas diagonais).

Problema 231)

Com as definições e os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
13p \div 8 &= 1p + \frac{5p}{8} = 1p + \frac{5 \cdot 12m}{8} \\
&= 1p + 7m + \frac{4m}{8} = 1p + 7m + \frac{4 \cdot 10c}{8} = 1p + 7m + 5c \\
5m \div 8 &= \frac{5 \cdot 10c}{8} = 6c + \frac{2c}{8} = 6c + \frac{2 \cdot 45f}{8} = 6c + 11f + \frac{2f}{8} \\
8c \div 8 &= 1c \\
22f \div 8 &= \frac{22f}{8}
\end{aligned}$$

Somando tudo, vem:

$$\begin{aligned}
1p + 7m + 5c + 6c + 11f + \frac{2f}{8} + 1c + \frac{22f}{8} &= \\
= 1p + 7m + 12c + 14f = 1p + 8m + 2c + 14f
\end{aligned}$$

E $1 + 8 + 2 + 14 = 25$.

Problema 232)

Vendo as ordens das dezenas e das unidades, temos que, se $x \geq 4$, então $14 - 8 = b = 6$, ou, se $x < 4$, então $13 - 8 = b = 5$. Mas $b = 6$ nos conduz, pela ordem das centenas, a $x = 1 < 4$, o que já é um absurdo, além de termos, ao mesmo tempo, $x = 0$ na ordem das unidades de milhar. Então, somos forçados a admitir que $b = 5$, o que nos dará $x = 1$ e $z = 7$.

Logo, $x + b + z = 13$.

Problema 233)

Em um dia há $24 \cdot 60 = 1440$ minutos. O dispositivo que dispara de 46 em 46 minutos abrirá o cofre, nesse intervalo de um dia, 31 vezes, enquanto que o outro dispositivo abrirá 42 vezes. Como $\text{mmc}(34, 46) = 782$ e a parte inteira de $1440 \div 782$ é igual a 1, haverá uma única ocasião em que ambos os dispositivos serão disparados no mesmo instante, abrindo o cofre juntos. Logo, o cofre será aberto $31 + 42 - 1 = 72$ vezes.

Observação: entenda-se por *o cofre será aberto* 72 *vezes* ao número de vezes em que pelo menos um dos dispositivos entra em ação.

Problema 234)

Sejam

$$\begin{aligned} p &\text{ – número de pessoas no grupo} \\ s &\text{ – preço de cada sobremesa} \\ s + 3 &\text{ – preço de cada prato principal} \end{aligned}$$

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} p\,(s+3) &= 56 \\ p \times s &= 35 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, resulta:

a) $3\,p = 21 \therefore p = 7$.

b) $s + 3 = 8$. Ou seja, o preço de cada prato principal é de R\$ 8,00.

Problema 235)

Sejam

N número de alunos do colégio
x número de alunos que têm só o pai professor
y número de alunos que têm só a mãe professora

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} x + 120 &= y + 130 = N - 5 \\ x + y &= 50 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, resulta: $x = 30$, $y = 20$ e $N = 5 + x + 120 = 155$.

Problema 236)

Cada nativo, sendo Arbu ou Bosnin, em se lhe perguntando qual a sua casta, sempre responderá que é Arbu. Então, é óbvio que Abl respondeu que era Arbu. Daí se conclui que Bsl é um Arbu, por ter dito a verdade, e Crl é um Bosnin, por ter mentido.

Problema 237)

Sejam

m – massa do minério B em kg
M – massa de ferro na mistura em kg

Como a mistura contém 62% de ferro, podemos escrever:

$$\frac{M}{5+m} = 0{,}62$$

Mas $M = 0{,}72 \cdot 5 + 0{,}58 \cdot m$. Então:

$$\begin{aligned} 0{,}72 \cdot 5 + 0{,}58 \cdot m &= 0{,}62(5+m) \\ m &= 12{,}5 \end{aligned}$$

Problema 238)

Sejam

a – número de pessoas altas
b – número de pessoas baixas
g – número de pessoas gordas
m – número de pessoas magras

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$a + b = g + m = 30.$$

Como $b = 11$ e $g = 13$, obtemos $a = 19$ e $m = 17$. Como 5 são altas e gordas, então 14 $(19-5)$ são altas e magras. E deduzimos que 3 $(17-14)$ são baixas e magras.

Problema 239)

Sejam

x – produtividade (cópias por minuto) da máquina velha
y – produtividade (cópias por minuto) da máquina nova
t – tempo de trabalho (em minutos) da máquina nova

Como a máquina nova é 50% mais veloz, então $y = 1{,}5x$. E como vão realizar o mesmo trabalho (fazer o mesmo número de cópias), podemos escrever:

$$\begin{aligned} t \times y &= 60\,x \\ t &= 60/1{,}5 = 40 \end{aligned}$$

Problema 240)

O consumidor na verdade só está levando 2,100 kg de peixe. E está pagando $2{,}5 \times 12{,}60 = 31{,}5$. Logo, o verdadeiro preço por kg é de $31{,}5 \div 2{,}1 = \text{R\$}\,15,00$.

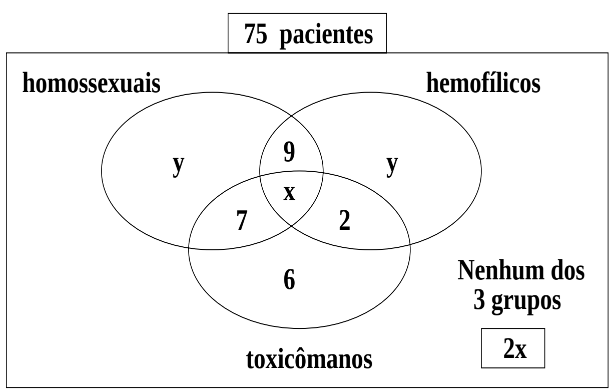
Problema 241)

Sejam

x – nº de pacientes pertencendo simultaneamente aos 3 grupos de risco
y – nº de hemofílicos não pertencendo aos outros 2 grupos de risco

O número de homossexuais é: $x + y + 7 + 9 = 41 \Longrightarrow x + y = 25$.
O número total de pacientes é $2x + y + 2 + 6 + 41 = 75 \Longrightarrow 2x + y = 26$.

Resolvendo o sistema formado por estas duas equações, resulta: $x = 1$ e $y = 24$. Logo, somente 1 paciente pertence simultaneamente aos três grupos de risco.



Problema 242)

Sejam

x – quantidade de selos que Roberto possui
y – número de sétimos do total de selos

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{2}{10}\,x + \frac{y}{7}\,x + 303 &= x\\ 7\,x + 5\,y\,x + 3\cdot 5\cdot 7\cdot 101 &= 35\,x\\ (28-5\,y)\,x &= 3\cdot 5\cdot 7\cdot 101\end{aligned}$$

Para resolver esta equação, devemos observar que y tem que ser um número ímpar e $28 - 5\,y > 0$. Os três valores possíveis para y são 1, 3 e 5. Testando-os, o único que serve é $y = 5$, dando para x o valor $x = 5\cdot 7\cdot 101 = 3535$.

Problema 243)

Vemos que a diferença entre os números das linhas de cada coluna é sempre 7. Então, na divisão de 107 por 7, o quociente mais 1 dará a linha e o resto, a coluna da posição do número 107. Assim, $107 = 7\times 15 + 2$. Logo, 107 ocupa a 16ª linha e a 2ª coluna.

Problema 244)

Sejam

q^2 – número de habitantes em 1993
Q^2 – número de habitantes em 1994

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned}Q^2 - q^2 &= 101\\ (Q-q)(Q+q) &= 101 \Longrightarrow Q-q=1 \quad \text{e} \quad Q+q=101\end{aligned}$$

Obtemos então $Q = 51$ e $q = 50$. Logo, em

1994 havia $51^2 = 2601$ habitantes
1993 havia $50^2 = 2500$ habitantes
1992 havia $2500 - 99 = 2401 = 49^2$ habitantes.

Problema 245)

De imediato vemos que $q = 2$ e $p = 2$ ou $p = 4$. Os dois quadrados vazios da última coluna são ocupados por 2 (primeira linha) e 4 (segunda linha). Concluímos então que $p = 4$ e $p + q = 6$.

Problema 246)

Sejam

x – número mínimo de dias
y – número de dias de serviço de cada guarnição

Devemos ter

$$6\,x = 15\,y, \quad \text{ou ainda,} \quad x = \frac{15\,y}{6} = \frac{5\,y}{2}.$$

Sendo x e y inteiros positivos, o menor valor de x ocorre quando $y = 2$, isto é, o menor valor de x é 5.

Problema 247)

As crianças formam 25% da população, num total de 50000. Logo, a população da cidade é de $4 \times 50000 = 200000$ habitantes.

Problema 248)

Sejam

v – preço de venda dos carros
c_l – preço de compra do carro com lucro
c_p – preço de compra do carro com prejuízo

Com os dados do problema, sabemos que $v = 1{,}3\,c_l$ e $v = 0{,}8\,c_p$. Logo, o capital total investido (C) foi de

$$\frac{v}{1{,}3} + \frac{v}{0{,}8} = \frac{2{,}1\,v}{1{,}3 \cdot 0{,}8} = C$$

Como $C > 2\,v$ (montante arrecadado), o negócio efetuado resultou em prejuízo.

Problema 249)

Sejam

m_0 – preço (na moeda X) de 1 g de ouro antes do aumento
m_1 – preço (na moeda X) de 1 g de ouro depois do aumento
d_0 – preço (na moeda X) do dólar antes do aumento
d_1 – preço (na moeda X) do dólar depois do aumento

Com os dados do problema, temos:

$$\frac{m_0}{d_0} = 12, \quad m_1 = 1{,}4m_0 \quad \text{e} \quad d_1 = 1{,}2d_0.$$

Calculando m_1/d_1, resulta:

$$\frac{m_1}{d_1} = \frac{1{,}4m_0}{1{,}2d_0} = 12\frac{1{,}4}{1{,}2} = 14.$$

Assim, a nova relação entre as cotações do ouro e do dólar passou a ser de 1 para 14.

Problema 250)

Seja v o volume das jarras. A primeira jarra contém $3v/10$ de álcool e $7v/10$ de água. A segunda, $3v/8$ de álcool e $5v/8$ de água. Juntando-se o conteúdo das duas jarras, obtemos $2v$ de uma mistura que conterá as seguintes proporções:

$$\begin{array}{lcc} \text{álcool} & \dfrac{\frac{3}{10}+\frac{3}{8}}{2} = & \dfrac{27}{80} \\ \text{água} & \dfrac{\frac{7}{10}+\frac{5}{8}}{2} = & \dfrac{53}{80} \end{array}$$

Assim, a proporção álcool/água resultante é $27/53$.

Problema 251)

Para $n = 1$, temos $Q = 1$; para $n = 3$, temos $Q = 1 + 2 + 6 = 9$. Para mostrar que estes valores de Q são os únicos quadrados perfeitos, vemos que, para $n = 4$, $Q = 9 + 24 = 33$; e para $n \geq 5$, todos os valores de Q terminam por 3 pois para $n \geq 5$, $n!$ termina por 0 por ser múltiplo de 10. E como nenhum quadrado termina por 3, somente para $n = 1$ e $n = 3$ tem-se Q quadrado perfeito.

Problema 252)

O intervalo de tempo transcorrido até a colisão foi de $60/(60 + 60) = 1/2$ hora. Como a mosca voa a 120 km/h, ela percorre 60 km.

Problema 253)

a) 32; esta escolha dá a maior quantidade de números (32) vencedores.

b) O que escolher 75.

O 1° ganha com os números no intervalo [1, 32], o 2°, com os números em [33, 53] e o 3°, com os números em [55, 100]. E não há vencedor (pelas regras apresentadas) dando 54 pois 54 está igualmente afastado de 33 e 75.

Problema 254)

Sejam

A – quantidade de pontos obtidos pelos aprovados antes da atribuição dos 5 pontos

R – quantidade de pontos obtidos pelos reprovados antes da atribuição dos 5 pontos

Então

$$\begin{aligned} A &= 12 \times 77 = 924 \\ R &= 8 \times 65 = 520 \end{aligned}$$

a) chamando de M a média aritmética da classe toda antes da atribuição dos 5 pontos extras, temos:

$$M = \frac{A+R}{20} = \frac{361}{5} = 72{,}2$$

b) após a atribuição dos 5 pontos extras, a quantidade de pontos obtidos pela classe toda foi de: $A + R + 5 \times 20 = 1544$.

Seja m o número de alunos aprovados com a atribuição dos 5 pontos. Tem-se então:

$$1544 = (12+m)80 + (8-m)68{,}8 \implies 33{,}6 = 11{,}2m \therefore m = 3.$$

Logo, mais 3 alunos juntaram-se aos 12 inicialmente aprovados.

Problema 255)

Sejam

t_x – tempo (em h) do 1° carro para fazer a viagem de ida e volta
t_y – tempo (em h) do 2° carro para fazer a viagem de ida e volta
l – distância (em km) entre A e B (igual entre B e A)

Então temos:

$$t_x = \frac{2l}{50} = \frac{l}{25}\,\text{h} \quad \text{e} \quad t_y = \frac{l}{60} + \frac{l}{40} = \frac{5l}{120} = \frac{l}{24}\,\text{h}$$

Assim, $t_x < t_y$ e o 1° carro é o primeiro a chegar.

Problema 256)

Vamos mostrar inicialmente que nenhuma parcela deve ser maior do que 4.

De fato, se existir uma parcela k, $k > 4$ e par, a substituição de k por $(k/2 + k/2)$ aumenta o valor do produto, uma vez que $k^2/4 > k$. Para k ímpar, a substituição de k por $[(k+1)/2 + (k-1)/2]$ também aumenta o valor do produto pois $(k^2 - 4k - 1) > 0$, para $k \geq 5$.

Se observarmos que uma parcela igual a 4 pode ser substituída por $2 + 2$ sem alterar o produto, concluiremos que podemos nos restringir a parcelas iguais a 2 e 3.

Vamos mostrar em seguida que o número de parcelas iguais a 3 deve ser o maior possível.

De fato, se existirem $n \geq 3$ parcelas iguais a 2, a substituição de cada grupo de 3 parcelas por duas parcelas iguais a 3 aumenta o valor do produto $(9 > 8)$.

Segue-se que a decomposição de 2000, que corresponde ao maior valor do produto, é formada por 667 parcelas, uma igual a 2 e as demais a 3.

Observação: esta solução foi reproduzida com adaptações da Revista do Professor de Matemática, No. 37, 1998, p. 48.

Problema 257)

Primeira solução

Daremos dois exemplos de como proceder com os números 83 e 8, respectivamente.

Ordem das perguntas

1ª)	Maior que 50?	Sim	Possibilidades	$[51, 52, 53, \dots, 100]$
2ª)	Menor que 75?	Não	Possibilidades	$[75, 76, 77, \dots, 100]$
3ª)	Maior que 88?	Não	Possibilidades	$[75, 76, 77, \dots, 88]$
4ª)	Maior que 81?	Sim	Possibilidades	$[82, 83, 84, \dots, 88]$
5ª)	Maior que 85?	Não	Possibilidades	$[82, 83, 84, 85]$
6ª)	Maior que 83?	Não	Possibilidades	$[82, 83]$
7ª)	82?	Não	É 83.	

Ordem das perguntas

1ª)	Menor que 50?	Sim	Possibilidades	$[1, 2, 3, \dots, 49]$
2ª)	Menor que 25?	Sim	Possibilidades	$[1, 2, 3, 24]$
3ª)	Menor que 13?	Sim	Possibilidades	$[1, 2, 3, \dots, 12]$
4ª)	Menor que 7?	Não	Possibilidades	$[7, 8, 9, 10, 11, 12]$
5ª)	Menor que 10?	Sim	Possibilidades	$[7, 8, 9]$
6ª)	Menor que 8?	Não	Possibilidades	$[8, 9]$
6ª)	8?	Sim	É 8.	

É claro que poderíamos ter descoberto com menos de 7 perguntas (até mesmo com uma, acertando na mosca). Mas ao final de 7 perguntas podemos *sempre* descobrir qual é o número.

Segunda solução

Seja $n = 83$ o número que queremos descobrir. Ponha n na base 2 com 7 algarismos (use zeros à esquerda se necessário). Logo, $83_2 = 1010011$.

As perguntas podem ser assim: (comece com $X = 0$)
Pergunta 0: O último algarismo é 1?
Se SIM, $X = X + 1$; se não, X permanece inalterado. Aqui $X = 1$.
Pergunta 1: O penúltimo algarismo é 1?
Se SIM, $X = X + 2$; se não, X permanece inalterado. Aqui $X = 3$.
$\vdots$
Pergunta 5: O segundo algarismo é 1?
Se SIM, $X = X + 32$; se não, X permanece inalterado. Aqui $X = 19$.
Pergunta 6: O primeiro algarismo é 1?
Se SIM, $X = X + 64$; se não, X permanece inalterado. Aqui $X = 83$.
O valor final de X é o valor original de n.

Esta solução nos mostra claramente que:

1) É impossível resolver o problema com 6 perguntas pois só existem $2^6 = 64 < 100$ respostas possíveis a um questionário com 6 perguntas.

2) Com sete perguntas podemos descobrir qual é o número no intervalo $[1, 127]$.

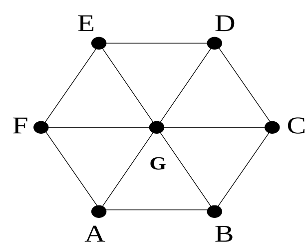
Obs: esta solução nos foi enviada por Nicolau Corção Saldanha.

Problema 258)

Precisamos de 50 colunas com 1 ladrilho claro em cada e 49 colunas com 3 ladrilhos claros em cada. Logo, precisamos de $50 + 3 \times 49 = 197$ ladrilhos claros.

Problema 259)

Seja G um navio qualquer, sendo bombardeado pelos 6 navios A, B, C, D, E e F.



Se A atirou em G, em vez de atirar em B, então $\overline{AG} < \overline{AB}$. Se B atirou em G, ao invés de atirar em A, então $\overline{BG} < \overline{AB}$. Portanto, AB é o maior lado do triângulo ABG e $A\hat{G}B > 60°$. Por raciocínio análogo, conclui-se que $B\hat{G}C$, $C\hat{G}D$, $D\hat{G}E$, $E\hat{G}F$ e $F\hat{G}A$ são todos maiores que $60°$.

A soma desses 6 ângulos perfaz uma volta que tem mais de $360°$, o que é impossível. Logo, nenhum navio poderá receber 6 ou mais tiros.

Problema 260)

Pensando nos dias 31 de dezembro e 1º de janeiro, vemos que Flávia fez 19 anos dia 31 de dezembro e hoje é 1º de janeiro. Anteontem (dia 30 de dezembro), Flávia tinha 18 anos. Fará 20 anos neste ano e 21 anos no ano seguinte.

Problema 261)

Sejam $p = a^2$ e $q = b^2$, com a e b naturais. Temos então que $p - q = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 92$. Mas $92 = 2 \times 2 \times 23$ e as três únicas maneiras de escrever-se 92 como produto de 2 números naturais são:

$$\begin{array}{ccc} \text{i) } 92 \times 1 & \text{ii) } 46 \times 2 & \text{iii) } 23 \times 4 \\ \left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 92 \\ a-b & = & 1 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 46 \\ a-b & = & 2 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 23 \\ a-b & = & 4 \end{array} \right. \end{array}$$

Dos sistemas acima, o único que apresenta valores inteiros para a e b é o sistema ii. Portanto, $a = 24$ e $b = 22$ e com isso, $p = 24^2 = 576$ e $q = 22^2 = 484$.

Problema 262)

Julho e agosto são os dois únicos meses seguidos *no mesmo ano* com 31 dias. Pensando nisso, e sabendo que a única maneira de satisfazer as condições do problema é admitir que a segunda-feira caiu dia 31 e a quinta-feira dia 7, fazemos a seguinte tabela:

31 julho	segunda-feira
01 agosto	terça-feira
29 agosto	terça-feira
31 agosto	quinta-feira
01 setembro	sexta-feira
07 setembro	quinta-feira

Logo, o mês corrente é agosto.

Problema 263)

Nas seqüências abaixo, o X representa qualquer um dos algarismos 0 ou 1. Enumerando as seqüências que satisfazem a condição do problema, vem:

Seqüência	Quantidade
01000	1
11000	1
1000X	2
000XX	4

Logo, 8 seqüências possuem pelo menos três zeros em posições consecutivas.

Problema 264)

A idéia de que cada corte produzirá 2 pedaços nos conduz à resposta 8, porém os dois últimos cortes não produzirão, cada um, 2 pedaços, mas sim apenas 1 pedaço cada, pois irão passar por cortes feitos anteriormente.

Problema 265)

Sejam

$$\begin{array}{rl} t & \text{– tempo, em horas, gasto na ida} \\ 4-t & \text{– tempo, em horas, gasto na volta} \end{array}$$

Como o avião se afastou de uma distância d do aeroporto na ida, então $t = d/(300+v)$. E como voltou, $4-t = d/(300-v) \Longrightarrow t = 4-d/(300-v)$. Comparando essas duas igualdades, vem:

$$\frac{d}{300+v} + \frac{d}{300-v} = 4.$$

O que nos dá como resposta:

a) $d = (600 - v^2/150)\,\text{km}$.

b) $v = 0\,\text{km/h}$.

Problema 266)

a) A distância percorrida será máxima quando os quatro pneus acabarem juntos. Sendo assim, todos os pneus deverão rodar um mesmo número de quilômetros como traseiros. Mas como para cada quilômetro que um pneu roda como traseiro, outro pneu roda como dianteiro, temos que a distância que um dado pneu deve rodar como dianteiro deve ser igual à distância que ele deve rodar como traseiro. Seja x essa distância.

O desgaste do pneu é função da distância percorrida. Após percorrer $2x$ quilômetros, o desgaste é dado por

$$d = \frac{x}{40000} + \frac{x}{60000},$$

onde $d = 0$ (ou 0% de desgaste) para $x = 0$ e $d = 1$ (ou 100% de desgaste) para a maior distância percorrida (pois ele deverá ter se desgastado todo). Assim,

$$\frac{x}{40000} + \frac{x}{60000} = 1 \Longrightarrow x = 24000.$$

Então o carro poderá rodar 48000 km.

Observação: uma coisa interessante desse resultado é que ele é a média harmônica entre 40000 e 60000.

b) Chamando de a, b, c, d as quatro posições dos pneus nas rodas e de e a posição do pneu como estepe, vemos que podemos reproduzir a resposta do item anterior se cada pneu percorrer 12000 km em cada uma das quatro posições a, b, c, d e 0 km como estepe (ou 0 km na posição e).

   Contando agora com o estepe e fazendo um rodízio circular, com cada pneu ocupando cada uma das 5 posições a cada rodízio, teremos 5 rodízios de 12000 km, sendo a distância máxima de 60000 km.

Observação: esta solução nos foi enviada por Bruno Paleontólogel.

Problema 267)
O século XIX vai de 1801 a 1900. No ano x, ele tinha $\sqrt{x}$ anos. Então

$$\begin{aligned} \sqrt{1801} &\approx 42{,}44 \\ \sqrt{1900} &\approx 43{,}59 \end{aligned}$$

Logo, Augustus De Morgan tinha 43 anos no ano de 1849 e, portanto, nasceu em 1806.

Problema 268)
Sejam

v – velocidade (em km/h) do 3º carro
t – tempo (em h) que o 3º carro levou para encontrar o 2º

No momento do encontro, a distância percorrida pelos 2º e 3º carros é a mesma. Logo:

$$(0{,}5 + t)40 = vt \Longrightarrow 40t + 20 = vt.$$

No momento do encontro, a distância percorrida pelos 2º e 1º carros é a mesma. Logo:

$$(0{,}5 + t)50 + 1{,}5 \cdot 50 = (1{,}5 + t)v \implies 50t + 100 = 1{,}5v + vt.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $t = 1\,\mathrm{h}$ e $v = 60\,\mathrm{km/h}$.

Problema 269)

Sejam

p – preço de compra das calculadoras
v – preço de venda dos carros
c_l – preço de compra do carro com lucro
c_p – preço de compra do carro com prejuízo

Para Suely, temos:

Capital investido	–	$2p$
Preço de venda com lucro	–	$1{,}2p$
Preço de venda com prejuízo	–	$0{,}8p$
Resultado líquido	–	$\big(2 - [1{,}2 + 0{,}8]\big)p = 0$

Para Mauro, temos:

Capital arrecadado	–	$2v$
Preço de compra com lucro	–	$v = 1{,}2c_l \ \therefore\ c_l = v/1{,}2$
Preço de compra com prejuízo	–	$v = 0{,}8c_p \ \therefore\ c_p = v/0{,}8$
Capital investido	–	$c_l + c_p = 5v/2{,}4 = C$
Resultado líquido	–	$\frac{5v}{2{,}4} - 2v = \frac{0{,}2v}{2{,}4} = P$

Logo, Suely não teve lucro nem prejuízo e Mauro teve um prejuízo de $P/C = 4\%$.

Problema 270)

Seja o momento da partida do pedestre da estação A o instante zero. Dentro do contexto do enunciado, chamemos de n_{vem}, o n-ésimo trem que vem de B para A, e de n_{vai}, o n-ésimo trem que vai de A para B.

Se o pedestre ficasse parado na estação A, assistiria à chegada do 23_{vem}, $22 \times 3 = 66\,\text{min}$ após a partida do 1_{vem}. Mas isso não aconteceu, pois o pedestre só veio a encontrar o 23_{vem} na estação B, quando este partia e aquele chegava. Portanto, o tempo que o pedestre levou para ir de A para B foi igual à diferença entre 66 min e o tempo em que um trem leva para ir de B para A. Donde tiramos:

$$66 - 3/v_t = 3/v_p,$$

onde v_t e v_p são, respectivamente, a velocidade dos trens e a do pedestre medidas em km/min.

De maneira análoga, se o pedestre ficasse parado em A, assistiria à partida do 17_{vai}, $16 \times 3 = 48\,\text{min}$ após a partida do 1_{vai}. Mas isso não aconteceu, pois o pedestre só veio a encontrar o 17_{vai} na estação B, quando ambos chegavam lá. Portanto, o tempo que o pedestre levou para ir de A para B foi igual à soma de 48 min com o tempo em que um trem leva para ir de A para B. Donde tiramos:

$$48 + 3/v_t = 3/v_p.$$

Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, obtemos:

$$v_t = \frac{1}{3}\,\text{km/min} \quad \text{e} \quad v_p = \frac{1}{19}\,\text{km/min}.$$

Problema 271)

Um número ímpar será o resultado da soma de dois números se e somente se um deles for par e o outro ímpar. O único primo par é 2. E como 495 não é primo, não é possível escrever 497 como soma de dois números primos.

Problema 272)

Seja t o tempo que os loucos levam, em média, para escapar. Então:

$$t = \frac{1}{3}5 + \frac{1}{3}10 + \frac{1}{3}(12 + t),$$

pois os loucos do terceiro túnel estarão de volta à situação inicial após 12 horas (e escaparão após um tempo t em média). Assim.,

$$t = 9 + \frac{t}{3} \;\therefore\; t = 13\,\text{h}\ 30\,\text{min}.$$

Problema 273)

Com os dados do problema, podemos escrever:

1 operário da primeira turma faz $\frac{3}{8\cdot 20\cdot 25}$ da obra por dia;

1 operário da segunda turma faz $\frac{5}{7\cdot 20\cdot 25}$ da obra por dia.

Se x representa o número de operários transferidos da segunda turma para a primeira, ao final de 35 $(60-25=35)$ dias o trabalho da primeira estará concluído, ou seja, os $20+x$ operários terão feito 5/8 do serviço. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{3\cdot 20\cdot 35}{8\cdot 20\cdot 25}+\frac{5\cdot x\cdot 35}{7\cdot 20\cdot 25} &= \frac{5}{8}\\
\frac{3\cdot 7}{8\cdot 5}+\frac{x}{20} &= \frac{5\cdot 5}{8\cdot 5}\\
\frac{x}{20} &= \frac{4}{40}\ \therefore\ x=2.
\end{aligned}$$

Problema 274)

Na pior das hipóteses, podemos supor que nos 20 primeiros jogos cada jogador jogou duas vezes, perdendo um dos jogos e ganhando o outro. Assim, ainda há 20 jogadores no torneio e, até aqui, cada jogador tem apenas uma derrota. A partir daí, serão necessários mais 19 jogos para se eliminar 19 jogadores (cada jogo elimina um jogador), restando apenas um: o campeão.

Problema 275)

Como 9966334 e 9966332 são, respectivamente, números que podem ser escritos como $3k+1$ e $3k-1$, então $(3k+1)(3k-1)=9k^2-1=$ 99327A93466888 e $9k^2=$ 99327A93466889, o que indica que o segundo membro desta última igualdade é um múltiplo de 9. Portanto, a soma de seus algarismos deve ser um múltiplo de 9. Assim, deve-se ter $A=7$.

Problema 276)

Designemos o ônibus que saiu de Algebrilândia 7 horas antes de Abel partir de Aritpópolis por "-7". O que saiu 6 horas antes por "-6", e assim por diante, até o que saiu 1 hora antes, que indicaremos por "-1". O ônibus que saiu de Algebrilândia no mesmo instante em que Abel partiu de Aritpópolis, designaremos por "0". De maneira análoga, designemos o ônibus que partiu de Algebrilândia 1 hora depois de Abel ter partido de Aritpópolis por "+1", 2 horas depois, por "+2", e assim por diante, até o que saiu 7 horas depois, que indicaremos por "+7".

Quando Abel partir de Aritpópolis, -7 estará chegando, e quando Abel chegar a Algebrilândia, $+7$ estará partindo desta cidade. Como esses dois ônibus não deverão ser contados, Abel cruzará, no caminho, com -6, -5, $-4, \ldots, 0, 1 \ldots, 6$. Logo, Abel encontrará 13 ônibus.

Problema 277)

a) Sim. Aquele que conseguir atingir antes de seu adversário a soma 89, chegará a 100 e ganhará o jogo. Mas quem atingir antes de seu adversário a soma 78, assegurará sua chegada à soma 89. Continuando este raciocínio, vemos então que, para assegurar a vitória, basta que sejam atingidas as somas 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 e 89. Logo, o primeiro jogador, utilizando essa estratégia, assegurará sua vitória.

b) Sejam os três jogadores A, B e C, que jogam nesta ordem, sem que necessariamente A tenha iniciado o jogo. Para que A ganhe, C tem que ter atingindo no mínimo soma 90 e no máximo soma 99; para tanto, B deve ter atingido no mínimo soma 89 e no máximo soma 89, isto é, exatamente 89. Como essas circunstâncias são absoluta e definitivamente hipotéticas, não existe estratégia vencedora.

c) Aquele que conseguir atingir antes de seu adversário a soma 99, obrigará o seu adversário a atingir ou passar de 100 e ganhará o jogo. Mas quem atingir antes de seu adversário o número 88, assegurará sua chegada à soma 99. Continuando este raciocínio, vemos então que, para assegurar a vitória, basta que sejam atingidas as somas 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 e 99. Logo, o segundo jogador, utilizando essa estratégia, assegurará sua vitória.

Problema 278)

Em 6 badaladas há cinco intervalos — aqui supostos iguais — de tempo entre cada duas badaladas. Logo, o intervalo entre cada duas badaladas será de $30 \div 5 = 6$ segundos.

Em 12 badaladas há 11 intervalos (em n badaladas há $n-1$ intervalos, aqui supostos iguais). Logo, o relógio levará 66 segundos para dar as 12 badaladas.

Problema 279)

Consideremos a espiral como um círculo de raio 50 cm. Podemos assim calcular a sua área S_1.

$$S_1 = 50^2\pi = 2500\pi\,\text{cm}^2.$$

Podemos, também, desenrolar a corda e retificá-la, obtendo um retângulo muito "magrinho", de comprimento x e largura 1 cm, onde x também é o comprimento da corda. Calculando a área S_2 desse retângulo, vem:

$$S_2 = x \times 1 = x\,\text{cm}^2.$$

Mas, por conservação das áreas, é claro que devemos ter $S_1 = S_2$. Logo:

$$2500\pi = x \therefore x \approx 7850\,\text{cm} = 78{,}50\,\text{m}.$$

Problema 280)

Vemos que a linha de número i termina por i^2. Assim, as décima-primeira e décima-segunda linhas terão os seguintes números e disposição:

$$\begin{array}{ccccc} \ldots & 119 & 120 & 121 & \\ \ldots & 141 & 142 & 143 & 144 \end{array}$$

Logo, 120 é o número que fica imediatamente acima de 142.

Problema 281)

Sejam $n-1$, n e $n+1$ três inteiros consecutivos. Então um deles é múltiplo de 3. Como, por hipótese, n não é múltiplo de 3, segue-se que ou $n-1$ ou $n+1$ é um múltiplo de 3. Temos também que $n-1$ e $n+1$ são dois números pares maiores que ou iguais a 4. Então $n-1 = 2k$ e $n+1 = 2k+2 = 2(k+1)$.

Se k é par, então $n-1$ é múltiplo de 4; se k é ímpar, então $k+1$ é par e $n+1$ é múltiplo de 4. Assim, o produto $(n-1)(n+1) = n^2-1$ terá 8 e 3 como fatores. Logo, $n^2 = 24m+1$.

Problema 282)

Calculando a soma dos algarismos dos números, obtemos:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 = 285.$$

Podemos então afirmar que os números com as características do problema serão múltiplos de 3 mas não de 9 (segundo os critérios de divisibilidade por 3 e 9).

Logo, os números formados podem ser escritos como $3m$ mas não como $9m$, onde m é um número inteiro, e, conseqüentemente, não podem ser quadrados perfeitos.

Problema 283)

Para calcular o resto, começamos observando que

$$n = 8749^{207} \cdot 948^{179} \cdot 7499^{723} \cdot 75^{61}$$

é múltiplo de 5, ou seja, $n = 5l$. Logo, o resto da divisão de P por 5 será dado pelo resto de $m = 45832^{359}$ por 5. Mas

$$m = 45832^{359} = (45830+2)^{359} = (5i+2)^{359} = 5k + 2^{359} = 5k + \ldots 8 = 5j + 3.$$

Assim, $P = 5p + 3$ e o resto da divisão de P por 5 é 3.

Para entender por que 2^{359} termina por 8, estudemos o quadro das potências de 2:

$$\begin{array}{lll l} 2^1 = 2 & 2^5 = 32 & 2^9 = 512 & \ldots \\ 2^2 = 4 & 2^6 = 64 & 2^{10} = 1024 & \ldots \\ 2^3 = 8 & 2^7 = 128 & 2^{11} = 2048 & \ldots \\ 2^4 = 16 & 2^8 = 256 & 2^{12} = 4096 & \ldots \end{array}$$

Como $359 = 4 \cdot 89 + 3$, concluímos que 2^{359} termina pelo mesmo algarismo que 2^3, ou seja, 8.

Problema 284)

Escrevi
5 múltiplos de 12 (e também de 4 e 6) e não há mais múltiplos de 12.
2 múltiplos de 6 que não são múltiplos de 4 (pois do contrário seriam múltiplos de 12 também) e não há mais múltiplos de 6.
4 múltiplos de 4 que não são múltiplos de 6.
3 números primos.

Logo, escrevi 14 números.

Problema 285)

a) Seja x a distância entre os postes. Logo, x tem que dividir 2940 e 840 e ser o maior possível. Portanto, $x = \mathrm{mdc}\,(2940, 840) = 420$.

Assim, a estrada mais longa terá $2940/420+1 = 8$ postes; e a mais curta, $1680/420 + 1 = 5$ postes, para um total de 12 postes (pois contamos o poste no encontro das duas estradas duas vezes).

b) Pelo mesmo raciocínio do item anterior, $x = \text{mdc}\,(1680, 1470) = 210$.

Assim, a estrada mais longa terá $2940/210 + 1 = 15$ postes; e a mais curta, $1680/210 + 1 = 9$ postes, para um total de 23 postes.

c) Com os conhecimentos adquiridos com as resoluções dos itens anteriores, vemos que $x = \text{mdc}\,(1785, 1680, 1155) = 105$.

Assim, a estrada mais longa terá $2940/105 + 1 = 29$ postes; e a mais curta, $1680/105 + 1 = 17$ postes, para um total de 45 postes.

Problema 286)

Sejam x e y, respectivamente, as quantidades (em quilogramas) de ouro e prata adicionadas na liga.

Com os dados do problema, sabemos que a liga possui 20 kg de ouro e 5 kg de prata. A nova liga, formada com os acréscimos de x e y, deve conter 30% de ouro e 10% de prata. Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\frac{20+x}{100+x+y} &= 0{,}3 \\
\frac{5+y}{100+x+y} &= 0{,}1 \\
20+x &= 30+0{,}3x+0{,}3y \Longrightarrow \quad 0{,}7x-0{,}3y=10 \\
5+y &= 10+0{,}1x+0{,}1y \Longrightarrow -0{,}1x+0{,}9y=5
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 17{,}5$ kg e $y = 7{,}5$ kg.

Problema 287)

A média aritmética A das notas da turma é dada pela soma das notas de todos os alunos dividido pelo total de alunos da turma. Por outro lado, se a_1 representa o número de alunos da sala 1, ... e a_5 representa o número de alunos da sala 5, então a soma das notas da sala 1 é dada por $5{,}5a_1$, ... e a soma das notas da sala 5 é dada por $5{,}9a_5$. Assim, podemos escrever:

$$A = \frac{5{,}5a_1 + 5{,}2a_2 + 6{,}3a_3 + 7{,}1a_4 + 5{,}9a_5}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}.$$

Como não conhecemos os valores de a_1, ... e a_5, então não podemos calcular a média aritmética das notas da turma.

Observe entretanto que, se o número de alunos em todas as salas fosse o mesmo, ou seja, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$, então $A = (5{,}5 + 5{,}2 + 6{,}3 + 7{,}1 + 5{,}9)/5 = 6{,}0$.

Problema 288)

Marcos e Ney têm a mesma produtividade pois em oito dias trabalhando com Hélio ambos fazem 2/3 da obra. Sejam então x a produtividade (representando a quantidade da obra feita por dia) de Marcos e Ney e $2x$, a de Hélio. Pelos dados do problema, em um dia Hélio e Marcos fazem 1/12 da obra. Escrevemos:

$$x + 2\,x = \frac{1}{12} \ \therefore\ x = \frac{1}{36}\cdot$$

Logo, Marcos faria o trabalho sozinho em 36 dias.

Problema 289)

Sejam c, o comprimento da fita, v, a velocidade normal, t, o tempo (em minutos) de duração da fita sob velocidade normal e v' e t', respectivamente, a velocidade e o tempo (em minutos) para rebobiná-la. Então:

$$\begin{aligned} c &= v\,t = 156\,v \\ c &= v'\,t' = \frac{52}{3}\,v\,t' \\ 156\,v &= \frac{52}{3}\,v\,t' \ \therefore\ t' = 9 \end{aligned}$$

Problema 290)

Seja N o menor número possível de alunos. Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} 33\tfrac{1}{3}\%\,N &= \tfrac{100}{300}\,N &= \tfrac{1}{3}\,N \\ 20\%\,N &= \tfrac{20}{100}\,N &= \tfrac{1}{5}\,N \\ 12{,}5\%\,N &= \tfrac{12{,}5}{100}\,N &= \tfrac{1}{8}\,N \end{aligned}$$

Assim, N é o menor múltiplo de 3, 5 e 8, ou seja, $N = \mathrm{mmc}\,(3, 5, 8) = 120$.

Problema 291)

Seja p a população da cidade. Com os dados do problema, sabemos que $0{,}1p$ dos habitantes são doentes e $0{,}9p$, sadios.

O teste aplicado nos doentes dirá que $0{,}1p \times 0{,}9 = 0{,}09p$ habitantes são doentes; o teste aplicado nos sadios dirá que $0{,}9p \times 0{,}2 = 0{,}18p$ são doentes. Logo, a porcentagem dos indivíduos realmente doentes entre os indivíduos que o teste acusou serem doentes é

$$\frac{0{,}09p}{0{,}09p + 0{,}18p} = \frac{1}{3} = \frac{100}{3}\%.$$

Problema 292)

Seja x o número de alunos que fizeram a prova. Então $x/4$ foram reprovados e $3x/4$ foram aprovados. O número total de alunos aprovados é $3x/4 + 6$ e o número total de alunos é $x + 8$. Assim, a porcentagem de aprovação de toda a turma é

$$\frac{\frac{3x}{4} + 6}{x + 8} = \frac{3(x+8)}{4(x+8)} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

Problema 293)

Com os dados do problema, sabemos que $0{,}45 \times 0{,}25 = 11{,}25\%$ dos empregados trabalham na matriz M e se associaram ao clube; e $0{,}25 \times 0{,}45 = 11{,}25\%$ trabalham na filial A e se associaram ao clube. Então $0{,}40 - 0{,}1125 - 0{,}1125 = 17{,}5\%$ trabalham na filial B e se associaram ao clube. Além disso, 30% dos empregados trabalham na filial B.

Assim, o percentual dos empregados da filial B (x) que se associaram ao clube é de

$$x = \frac{17{,}5}{30} = 58{,}3333\ldots\% = 58\frac{1}{3}\%.$$

Problema 294)

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} A &= QB + R \\ A + 9 &= (Q+2)B \\ 9 &= 2B - R \therefore B = \frac{R+9}{2} \end{aligned}$$

Além disso, devemos ter $1 \leq R \leq B - 1$, R tem que ser um número ímpar ($R + 9$ tem que ser par) e o menor possível (pois queremos o menor valor possível para a soma $A + B$). Assim, obtemos $R = 1$ e $B = 5$. Como $A = B(Q + 2) - 9 = 5Q + 1$, colocamos $Q = 1$ e obtemos $A = 6$. Logo, $6 + 5 = 11$ é o menor valor para a soma $A + B$.

Problema 295)

Sejam

pedaço com 3 elos fechados	$\rightarrow$	- - -
elo aberto e depois fechado	$\rightarrow$	O

Deixemos 4 pedaços de corrente intactos e abramos (e fechemos) os três elos da restante. Obtemos a seguinte corrente:

- - -O- - -O- - -O- - -

Para fechar a corrente assim obtida, basta abrir e fechar o elo da extremidade. Por conseguinte, abrimos e fechamos 4 elos e a resposta será 40 minutos.

Problema 296)

De 11 horas a meio-dia, Augusto percorreu 6 km e seu amigo, 5,5 km. Logo, a distância entre eles, às 11 horas, era de $6 + 5{,}5 = 11{,}5$ km.

Problema 297)

Num relógio correto, o ponteiro das horas desloca-se 30°/h e o dos minutos, 360°/h. Ao meio-dia os dois ponteiros estão superpostos. A próxima superposição dá-se após $1\ \text{h} + x$ (x em horas), onde x é tal que

$$360x = 30(1 + x) \ \therefore\ x = \frac{1}{11}\,\text{h}.$$

Assim, os ponteiros encontram-se a cada $(60 + 60/11) = 720/11$ min, no relógio correto. Mas sabemos que a cada 61 minutos deste relógio, os ponteiros daquele que adianta já estão sobrepostos. Portanto, após 60 minutos do relógio correto, o que adianta indicará

$$\frac{60 \times 720}{61 \times 11} = 64 + \frac{256}{61 \times 11},$$

ou seja, um pouco mais de 64 minutos e 22 segundos.

O relógio adianta-se, portanto, de 4 minutos e 22 segundos por hora.

Problema 298)

Ailton dá 7 tiros em 7 segundos, logo cada um dos 6 intervalos entre seus tiros é, em média, de 7/6 segundos. Analogamente, Josias dá, em média, 1 tiro a cada 5/4 segundos. Em 25 tiros, há 24 intervalos, logo Ailton gastar $24 \cdot (7/6) = 28$ segundos e Josias, $24 \cdot (5/4) = 30$ segundos.

Problema 299)

Como há 25 carros passando por M e P e 17 passando por MNP, então somente $25 - 17 = 8$ passam por M e P *sem* passar por N.

Como há 28 carros passando por N e P, concluímos que $8 + 28 = 36$ carros chegam a C. Logo, $n = 36$ carros saíram dos pontos A ou B.

Problema 300)

Sejam P, R e A as respectivas idades atuais do pai, do Valmir e da Vilma. A primeira parte nos dá:

"Quando Valmir tiver a idade que seu pai tem", isto é, daqui a $(P-R)$ anos, as idades serão:

$$\begin{array}{rcl} \text{Pai} & \to & P + (P - R) \\ \text{Valmir} & \to & R + (P - R) \\ \text{Vilma} & \to & A + (P - R) \end{array}$$

E portanto, teremos:

$$A + (P - R) = 2A \Longrightarrow P - R = A \therefore P - A = R \qquad (*)$$

A segunda parte nos dá: "Quando Vilma tiver a idade atual do pai", isto é, daqui a $(P - A)$ anos, as idades serão:

$$\begin{array}{rcl} \text{Pai} & \to & P + (P - A) \\ \text{Valmir} & \to & R + (P - A) \\ \text{Vilma} & \to & A + (P - A) \end{array}$$

E portanto, teremos:

$$P + (P - A) = 2[R + (P - A)].$$

Usando o resultado obtido em $(*)$, vem:

$$P + R = 2(R + R) \to P = 3R.$$

E novamente de $(*)$, tiramos que $A = 2R$. Da última parte, vem:

$$R + 2R + 3R = 108 \therefore R = 18 \Longrightarrow A = 36 \quad \text{e} \quad P = 54.$$