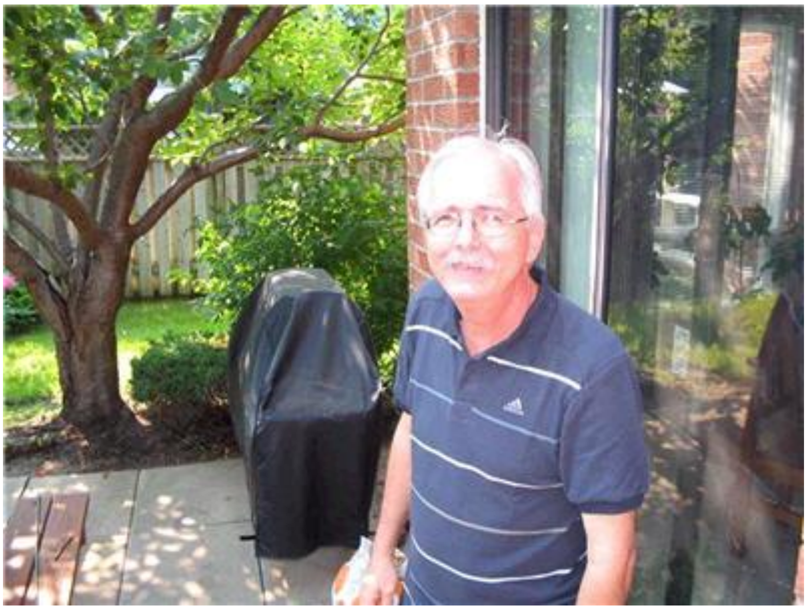


Manual de Construção de Triângulos

Todos os volumes disponibilizados ao público estão em

http://www.escolademestres.com/blogs/questoesresolvidas/matematica/306-construcoes-geometricas-de-triangulosversao-eletonica

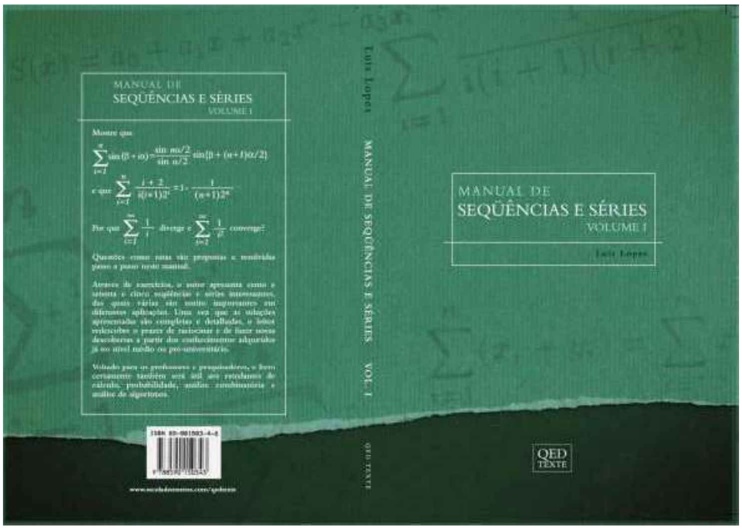
Caso você goste do trabalho, há um link na mesma página para que você possa fazer uma contribuição para projeto através do Paypal.

http://www.escolademestres.com/qedtexte

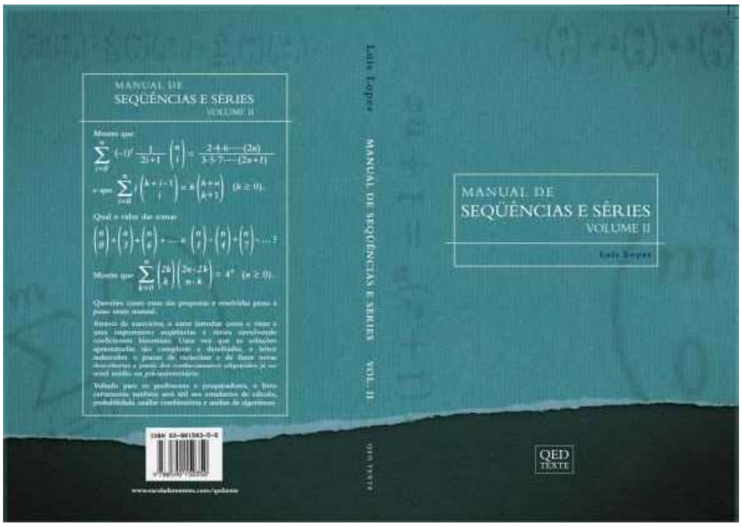
Coleção de Matemática do Prof Luís Lopes

Tópicos abordados são os seguintes:

Seqüências e Séries -
Volume 1



Volume 2

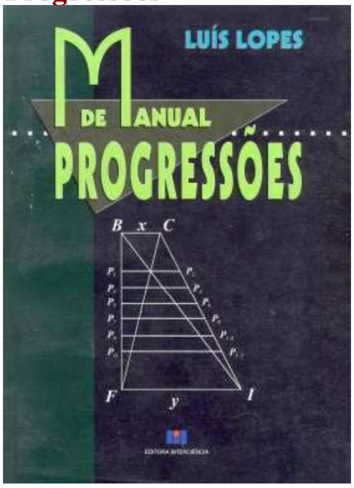


http://www.escolademestres.com/qedtexte

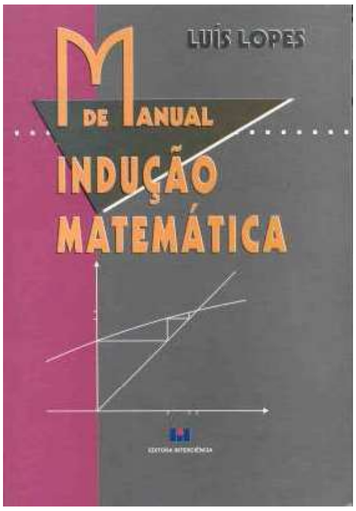
Coleção de Matemática do Prof Luís Lopes

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Progressões



Indução Matemática



This file was produced on August 28, 2015.
Montreal, CA and Rio de Janeiro, BR.
Work in progress.
Do not print. Spare the planet.
Contributions of all kinds are welcome.
Consider new constructions and insights,
algebraic developments and numerical solution,
discussion to existence and number of solutions,
references, etc.

Este arquivo foi criado em 28 de agosto de 2015.
Montreal, CA e Rio de Janeiro, BR.
Trabalho em desenvolvimento.
Não imprima. Evite desperdícios.
Colaborações de qualquer natureza são
solicitadas.

Conteúdo

4 EXERCÍCIOS **1**

5 CONSTRUÇÕES E SOLUÇÕES ALGÉBRICAS **15**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **65**

Lista de Figuras

5.1 Exercício 2 — Primeiro procedimento. . . . 67
5.2 Exercício 2 — Segundo procedimento. . . . 68
5.3 Exercício 4. . . . 69
5.4 Exercício 6. . . . 70
5.5 Exercício 8. . . . 71
5.6 Exercício 10. . . . 72
5.7 Exercício 12 — Primeiro procedimento. . . . 73
5.8 Exercício 12 — Segundo procedimento. . . . 74
5.9 Exercício 13 — Primeiro procedimento. . . . 75
5.10 Exercício 13 — Segundo procedimento. . . . 76
5.11 Exercício 14 — Primeiro procedimento. . . . 77
5.12 Exercício 14 — Segundo procedimento. . . . 78
5.13 Exercício 16 — Primeiro procedimento. . . . 79
5.14 Exercício 16 — Segundo procedimento. . . . 80
5.15 Exercício 17. . . . 81
5.16 Exercício 18. . . . 82
5.17 Exercício 19 — Primeiro procedimento. . . . 83
5.18 Exercício 19 — Segundo procedimento. . . . 84
5.19 Exercício 20 — Primeiro procedimento. . . . 85
5.20 Exercício 20 — Segundo procedimento. . . . 86
5.21 Exercício 21 — Primeiro procedimento. . . . 87
5.22 Exercício 23. . . . 88
5.23 Exercício 24 — Primeiro procedimento. . . . 89
5.24 Exercício 24 — Segundo procedimento. . . . 90
5.25 Exercício 25 — Primeiro procedimento. . . . 91

5.26 Exercício 25 — Segundo procedimento. 92
5.27 Exercício 26. 93
5.28 Exercício 27. 94
5.29 Exercício 28 — Primeiro procedimento. 95
5.30 Exercício 28 — Segundo procedimento. 96
5.31 Exercício 28 — Terceiro procedimento. 97
5.32 Exercícios 29 e 34. 98
5.33 Lugar geométrico de D_b e E_b quando $\mathbf{A}$ percorre Γ. 99
5.34 Exercício 30. 100
5.35 Exercício 32 — Primeiro procedimento. 101
5.36 Exercício 32 — Segundo procedimento. 102
5.37 Duas colinearidades com dois pontos simétricos. 103
5.38 Exercício 33 — Primeiro procedimento. 104
5.39 Exercício 33 — Segundo procedimento. 105
5.40 Exercício 35. 106
5.41 Exercício 37 — Primeiro procedimento. 107
5.42 Exercício 37 — Segundo procedimento. 108
5.43 Exercício 39. 109
5.44 Exercício 40. 110
5.45 Exercício 41. 111
5.46 Exercício 42 — Segundo procedimento. 112
5.47 Exercício 42 — Terceiro procedimento. 113
5.48 Exercício 43 — Primeiro procedimento. 114
5.49 Exercício 43 — Segundo procedimento. 115
5.50 Exercício 44. 116
5.51 Exercício 45. 117
5.52 Exercício 46. 118
5.53 Exercício 47. 119
5.54 Exercício 49 — Segundo procedimento. 120
5.55 Exercício 49 — Terceiro procedimento. 121
5.56 Exercício 49 — Quarto procedimento. 122
5.57 Exercício 49 — Quinto procedimento. 123
5.58 Exercício 49 — Sexto procedimento. 124
5.59 Exercício 50 — Primeiro procedimento. 125
5.60 Exercício 50 — Segundo procedimento. 126

CAPÍTULO 4

EXERCÍCIOS

O enunciado de todos os exercícios começa por: construir um triângulo $\triangle$ **ABC** sendo dados ...

Exercício 1) $\blacktriangle$ $<\alpha,\ \beta,\ \gamma>$ `(alpha,beta,gamma)`.

Exercício 2) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ a>$ `(alpha,beta,a)`.

Exercício 3) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ c>$ `(alpha,beta,c)`.

Exercício 4) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ h_a>$ `(alpha,beta,h_a)`.

Exercício 5) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ h_c>$ `(alpha,beta,h_c)`.

Exercício 6) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ m_a>$ `(alpha,beta,m_a)`.

Exercício 7) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ m_c>$ `(alpha,beta,m_c)`.

Exercício 8) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ d_a>$ `(alpha,beta,d_a)`.

Exercício 9) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ d_c>$ `(alpha,beta,d_c)`.

Exercício 10) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ e_a>$ `(alpha,beta,e_a)`.

Exercício 11) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ e_c>$ `(alpha,beta,e_c)`.

Exercício 12) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ R>$ `(alpha,beta,R)`.

Exercício 13) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r>$ `(alpha,beta,r)`.

Exercício 14) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r_a>$ `(alpha,beta,r_a)`.

Exercício 15) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r_c>$ `(alpha,beta,r_c)`.

Exercício 16) △ $\langle \alpha, a, b \rangle$ (alpha,a,b).

Exercício 17) △ $\langle \alpha, b, c \rangle$ (alpha,b,c).

Exercício 18) △ $\langle \alpha, a, h_a \rangle$ (alpha,a,h_a).

Exercício 19) △ $\langle \alpha, a, h_b \rangle$ (alpha,a,h_b).

Exercício 20) △ $\langle \alpha, b, h_a \rangle$ (alpha,b,h_a).

Exercício 21) △ $\langle \alpha, b, h_b \rangle$ (alpha,b,h_b).

Exercício 22) ▲ $\langle \alpha, b, h_c \rangle$ (alpha,b,h_c).

Exercício 23) △ $\langle \alpha, a, m_a \rangle$ (alpha,a,m_a).

Exercício 24) △ $\langle \alpha, a, m_b \rangle$ (alpha,a,m_b).

Exercício 25) △ $\langle \alpha, b, m_a \rangle$ (alpha,b,m_a).

Exercício 26) △ $\langle \alpha, b, m_b \rangle$ (alpha,b,m_b).

Exercício 27) △ $\langle \alpha, b, m_c \rangle$ (alpha,b,m_c).

Exercício 28) △ $\langle \alpha, a, d_a \rangle$ (alpha,a,d_a).

Exercício 29) $\langle \alpha, a, d_b \rangle$ (alpha,a,d_b).

Exercício 30) △ $\langle \alpha, b, d_a \rangle$ (alpha,b,d_a).

Exercício 31) $\langle \alpha, b, d_b \rangle$ (alpha,b,d_b).

Exercício 32) △ $\langle \alpha, b, d_c \rangle$ (alpha,b,d_c).

Exercício 33) △ $\langle \alpha, a, e_a \rangle$ (alpha,a,e_a).

Exercício 34) $\langle \alpha, a, e_b \rangle$ (alpha,a,e_b).

Exercício 35) △ $\langle \alpha, b, e_a \rangle$ (alpha,b,e_a).

Exercício 36) $\langle \alpha, b, e_b \rangle$ (alpha,b,e_b).

Exercício 37) △ $\langle \alpha, b, e_c \rangle$ (alpha,b,e_c).

Exercício 38) ▲ $\langle \alpha, a, R \rangle$ (alpha,a,R).

Exercício 39) △ $\langle \alpha, b, R \rangle$ (alpha,b,R).

Exercício 40) △ $\langle \alpha, a, r \rangle$ (alpha,a,r).

Exercício 41) △ $\langle \alpha, b, r \rangle$ (alpha,b,r).

Exercício 42) △ $\langle \alpha, a, r_a \rangle$ (alpha,a,r_a).

Exercício 43) △ $\langle \alpha, a, r_b \rangle$ (alpha,a,r_b).

Exercício 44) △ $\langle \alpha, b, r_a \rangle$ (alpha,b,r_a).

Exercício 45) △ $<\alpha, b, r_b>$ (alpha,b,r_b).

Exercício 46) △ $<\alpha, b, r_c>$ (alpha,b,r_c).

Exercício 47) △ $<\alpha, h_a, h_b>$ (alpha,h_a,h_b).

Exercício 48) △ $<\alpha, h_b, h_c>$ (alpha,h_b,h_c).

Exercício 49) △ $<\alpha, h_a, m_a>$ (alpha,h_a,m_a).

Exercício 50) △ $<\alpha, h_a, m_b>$ (alpha,h_a,m_b).

Exercício 51) △ $<\alpha, h_b, m_a>$ (alpha,h_b,m_a).

Exercício 52) △ $<\alpha, h_b, m_b>$ (alpha,h_b,m_b).

Exercício 53) △ $<\alpha, h_b, m_c>$ (alpha,h_b,m_c).

Exercício 54) △ $<\alpha, h_a, d_a>$ (alpha,h_a,d_a).

Exercício 55) $<\alpha, h_a, d_b>$ (alpha,h_a,d_b).

Exercício 56) △ $<\alpha, h_b, d_a>$ (alpha,h_b,d_a).

Exercício 57) △ $<\alpha, h_b, d_b>$ (alpha,h_b,d_b).

Exercício 58) $<\alpha, h_b, d_c>$ (alpha,h_b,d_c).

Exercício 59) △ $<\alpha, h_a, e_a>$ (alpha,h_a,e_a).

Exercício 60) $<\alpha, h_a, e_b>$ (alpha,h_a,e_b).

Exercício 61) △ $<\alpha, h_b, e_a>$ (alpha,h_b,e_a).

Exercício 62) △ $<\alpha, h_b, e_b>$ (alpha,h_b,e_b).

Exercício 63) $<\alpha, h_b, e_c>$ (alpha,h_b,e_c).

Exercício 64) △ $<\alpha, h_a, R>$ (alpha,h_a,R).

Exercício 65) △ $<\alpha, h_b, R>$ (alpha,h_b,R).

Exercício 66) △ $<\alpha, h_a, r>$ (alpha,h_a,r).

Exercício 67) △ $<\alpha, h_b, r>$ (alpha,h_b,r).

Exercício 68) △ $<\alpha, h_a, r_a>$ (alpha,h_a,r_a).

Exercício 69) △ $<\alpha, h_a, r_b>$ (alpha,h_a,r_b).

Exercício 70) △ $<\alpha, h_b, r_a>$ (alpha,h_b,r_a).

Exercício 71) △ $<\alpha, h_b, r_b>$ (alpha,h_b,r_b).

Exercício 72) △ $<\alpha, h_b, r_c>$ (alpha,h_b,r_c).

Exercício 73) △ $<\alpha, m_a, m_b>$ (alpha,m_a,m_b).

Exercício 74) $\triangle$ $<\alpha, m_b, m_c>$ `(alpha,m_b,m_c)`.

Exercício 75) $\triangle$ $<\alpha, m_a, d_a>$ `(alpha,m_a,d_a)`.

Exercício 76) $<\alpha, m_a, d_b>$ `(alpha,m_a,d_b)`.

Exercício 77) $<\alpha, m_b, d_a>$ `(alpha,m_b,d_a)`.

Exercício 78) $<\alpha, m_b, d_b>$ `(alpha,m_b,d_b)`.

Exercício 79) $<\alpha, m_b, d_c>$ `(alpha,m_b,d_c)`.

Exercício 80) $\triangle$ $<\alpha, m_a, e_a>$ `(alpha,m_a,e_a)`.

Exercício 81) $<\alpha, m_a, e_b>$ `(alpha,m_a,e_b)`.

Exercício 82) $<\alpha, m_b, e_a>$ `(alpha,m_b,e_a)`.

Exercício 83) $<\alpha, m_b, e_b>$ `(alpha,m_b,e_b)`.

Exercício 84) $<\alpha, m_b, e_c>$ `(alpha,m_b,e_c)`.

Exercício 85) $\triangle$ $<\alpha, m_a, R>$ `(alpha,m_a,R)`.

Exercício 86) $\triangle$ $<\alpha, m_b, R>$ `(alpha,m_b,R)`.

Exercício 87) $\triangle$ $<\alpha, m_a, r>$ `(alpha,m_a,r)`.

Exercício 88) $<\alpha, m_b, r>$ `(alpha,m_b,r)`.

Exercício 89) $\triangle$ $<\alpha, m_a, r_a>$ `(alpha,m_a,r_a)`.

Exercício 90) $\triangle$ $<\alpha, m_a, r_b>$ `(alpha,m_a,r_b)`.

Exercício 91) $<\alpha, m_b, r_a>$ `(alpha,m_b,r_a)`.

Exercício 92) $<\alpha, m_b, r_b>$ `(alpha,m_b,r_b)`.

Exercício 93) $<\alpha, m_b, r_c>$ `(alpha,m_b,r_c)`.

Exercício 94) $<\alpha, d_a, d_b>$ `(alpha,d_a,d_b)`.

Exercício 95) $<\alpha, d_b, d_c>$ `(alpha,d_b,d_c)`.

Exercício 96) $\triangle$ $<\alpha, d_a, e_a>$ `(alpha,d_a,e_a)`.

Exercício 97) $<\alpha, d_a, e_b>$ `(alpha,d_a,e_b)`.

Exercício 98) $<\alpha, d_b, e_a>$ `(alpha,d_b,e_a)`.

Exercício 99) $\triangle$ $<\alpha, d_b, e_b>$ `(alpha,d_b,e_b)`.

Exercício 100) $<\alpha, d_b, e_c>$ `(alpha,d_b,e_c)`.

Exercício 101) $\triangle$ $<\alpha, d_a, R>$ `(alpha,d_a,R)`.

Exercício 102) $<\alpha, d_b, R>$ `(alpha,d_b,R)`.

Exercício 103) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, r>$ `(alpha,d_a,r)`.

Exercício 104) $\triangle$ $<\alpha,\, d_b,\, r>$ `(alpha,d_b,r)`.

Exercício 105) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, r_a>$ `(alpha,d_a,r_a)`.

Exercício 106) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, r_b>$ `(alpha,d_a,r_b)`.

Exercício 107) $<\alpha,\, d_b,\, r_a>$ `(alpha,d_b,r_a)`.

Exercício 108) $\triangle$ $<\alpha,\, d_b,\, r_b>$ `(alpha,d_b,r_b)`.

Exercício 109) $<\alpha,\, d_b,\, r_c>$ `(alpha,d_b,r_c)`.

Exercício 110) $<\alpha,\, e_a,\, e_b>$ `(alpha,e_a,e_b)`.

Exercício 111) $<\alpha,\, e_b,\, e_c>$ `(alpha,e_b,e_c)`.

Exercício 112) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, R>$ `(alpha,e_a,R)`.

Exercício 113) $<\alpha,\, e_b,\, R>$ `(alpha,e_b,R)`.

Exercício 114) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, r>$ `(alpha,e_a,r)`.

Exercício 115) $<\alpha,\, e_b,\, r>$ `(alpha,e_b,r)`.

Exercício 116) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, r_a>$ `(alpha,e_a,r_a)`.

Exercício 117) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, r_b>$ `(alpha,e_a,r_b)`.

Exercício 118) $\triangle$ $<\alpha,\, e_b,\, r_a>$ `(alpha,e_b,r_a)`.

Exercício 119) $<\alpha,\, e_b,\, r_b>$ `(alpha,e_b,r_b)`.

Exercício 120) $\triangle$ $<\alpha,\, e_b,\, r_c>$ `(alpha,e_b,r_c)`.

Exercício 121) $\triangle$ $<\alpha,\, R,\, r>$ `(alpha,R,r)`.

Exercício 122) $\triangle$ $<\alpha,\, R,\, r_a>$ `(alpha,R,r_a)`.

Exercício 123) $\triangle$ $<\alpha,\, R,\, r_b>$ `(alpha,R,r_b)`.

Exercício 124) $\triangle$ $<\alpha,\, r,\, r_a>$ `(alpha,r,r_a)`.

Exercício 125) $\triangle$ $<\alpha,\, r,\, r_b>$ `(alpha,r,r_b)`.

Exercício 126) $\triangle$ $<\alpha,\, r_a,\, r_b>$ `(alpha,r_a,r_b)`.

Exercício 127) $\triangle$ $<\alpha,\, r_b,\, r_c>$ `(alpha,r_b,r_c)`.

Exercício 128) $\triangle$ $<a,\, b,\, c>$ `(a,b,c)`.

Exercício 129) $\triangle$ $<a,\, b,\, h_a>$ `(a,b,h_a)`.

Exercício 130) $\triangle$ $<a,\, b,\, h_c>$ `(a,b,h_c)`.

Exercício 131) $\triangle$ $<a,\, b,\, m_a>$ `(a,b,m_a)`.

Exercício 132) $\triangle$ $<a, b, m_c>$ `(a,b,m_c).`

Exercício 133) $<a, b, d_a>$ `(a,b,d_a).`

Exercício 134) $\triangle$ $<a, b, d_c>$ `(a,b,d_c).`

Exercício 135) $<a, b, e_a>$ `(a,b,e_a).`

Exercício 136) $\triangle$ $<a, b, e_c>$ `(a,b,e_c).`

Exercício 137) $\triangle$ $<a, b, R>$ `(a,b,R).`

Exercício 138) $<a, b, r>$ `(a,b,r).`

Exercício 139) $<a, b, r_a>$ `(a,b,r_a).`

Exercício 140) $<a, b, r_c>$ `(a,b,r_c).`

Exercício 141) $\triangle$ $<a, h_a, h_b>$ `(a,h_a,h_b).`

Exercício 142) $\triangle$ $<a, h_b, h_c>$ `(a,h_b,h_c).`

Exercício 143) $\triangle$ $<a, h_a, m_a>$ `(a,h_a,m_a).`

Exercício 144) $\triangle$ $<a, h_a, m_b>$ `(a,h_a,m_b).`

Exercício 145) $\triangle$ $<a, h_b, m_a>$ `(a,h_b,m_a).`

Exercício 146) $\triangle$ $<a, h_b, m_b>$ `(a,h_b,m_b).`

Exercício 147) $\triangle$ $<a, h_b, m_c>$ `(a,h_b,m_c).`

Exercício 148) $\triangle$ $<a, h_a, d_a>$ `(a,h_a,d_a).`

Exercício 149) $<a, h_a, d_b>$ `(a,h_a,d_b).`

Exercício 150) $<a, h_b, d_a>$ `(a,h_b,d_a).`

Exercício 151) $\triangle$ $<a, h_b, d_b>$ `(a,h_b,d_b).`

Exercício 152) $\triangle$ $<a, h_b, d_c>$ `(a,h_b,d_c).`

Exercício 153) $\triangle$ $<a, h_a, e_a>$ `(a,h_a,e_a).`

Exercício 154) $<a, h_a, e_b>$ `(a,h_a,e_b).`

Exercício 155) $<a, h_b, e_a>$ `(a,h_b,e_a).`

Exercício 156) $\triangle$ $<a, h_b, e_b>$ `(a,h_b,e_b).`

Exercício 157) $\triangle$ $<a, h_b, e_c>$ `(a,h_b,e_c).`

Exercício 158) $\triangle$ $<a, h_a, R>$ `(a,h_a,R).`

Exercício 159) $\triangle$ $<a, h_b, R>$ `(a,h_b,R).`

Exercício 160) $\triangle$ $<a, h_a, r>$ `(a,h_a,r).`

Exercício 161) $\triangle$ $<a, h_b, r>$ `(a,h_b,r).`

Exercício 162) $\triangle$ $<a, h_a, r_a>$ `(a,h_a,r_a).`

Exercício 163) $\triangle$ $<a, h_a, r_b>$ `(a,h_a,r_b).`

Exercício 164) $\triangle$ $<a, h_b, r_a>$ `(a,h_b,r_a).`

Exercício 165) $\triangle$ $<a, h_b, r_b>$ `(a,h_b,r_b).`

Exercício 166) $\triangle$ $<a, h_b, r_c>$ `(a,h_b,r_c).`

Exercício 167) $\triangle$ $<a, m_a, m_b>$ `(a,m_a,m_b).`

Exercício 168) $\triangle$ $<a, m_b, m_c>$ `(a,m_b,m_c).`

Exercício 169) $\triangle$ $<a, m_a, d_a>$ `(a,m_a,d_a).`

Exercício 170) $<a, m_a, d_b>$ `(a,m_a,d_b).`

Exercício 171) $<a, m_b, d_a>$ `(a,m_b,d_a).`

Exercício 172) $<a, m_b, d_b>$ `(a,m_b,d_b).`

Exercício 173) $<a, m_b, d_c>$ `(a,m_b,d_c).`

Exercício 174) $\triangle$ $<a, m_a, e_a>$ `(a,m_a,e_a).`

Exercício 175) $<a, m_a, e_b>$ `(a,m_a,e_b).`

Exercício 176) $<a, m_b, e_a>$ `(a,m_b,e_a).`

Exercício 177) $<a, m_b, e_b>$ `(a,m_b,e_b).`

Exercício 178) $<a, m_b, e_c>$ `(a,m_b,e_c).`

Exercício 179) $\triangle$ $<a, m_a, R>$ `(a,m_a,R).`

Exercício 180) $\triangle$ $<a, m_b, R>$ `(a,m_b,R).`

Exercício 181) $<a, m_a, r>$ `(a,m_a,r).`

Exercício 182) $<a, m_b, r>$ `(a,m_b,r).`

Exercício 183) $<a, m_a, r_a>$ `(a,m_a,r_a).`

Exercício 184) $<a, m_a, r_b>$ `(a,m_a,r_b).`

Exercício 185) $<a, m_b, r_a>$ `(a,m_b,r_a).`

Exercício 186) $<a, m_b, r_b>$ `(a,m_b,r_b).`

Exercício 187) $<a, m_b, r_c>$ `(a,m_b,r_c).`

Exercício 188) $<a, d_a, d_b>$ `(a,d_a,d_b).`

Exercício 189) $<a, d_b, d_c>$ `(a,d_b,d_c).`

Exercício 190) $\triangle$ $<a, d_a, e_a>$ `(a,d_a,e_a).`

Exercício 191) $<a, d_a, e_b>$ `(a,d_a,e_b).`

Exercício 192) $<a, d_b, e_a>$ `(a,d_b,e_a).`

Exercício 193) $\triangle$ $<a, d_b, e_b>$ `(a,d_b,e_b).`

Exercício 194) $<a, d_b, e_c>$ `(a,d_b,e_c).`

Exercício 195) $\triangle$ $<a, d_a, R>$ `(a,d_a,R).`

Exercício 196) $<a, d_b, R>$ `(a,d_b,R).`

Exercício 197) $<a, d_a, r>$ `(a,d_a,r).`

Exercício 198) $<a, d_b, r>$ `(a,d_b,r).`

Exercício 199) $<a, d_a, r_a>$ `(a,d_a,r_a).`

Exercício 200) $<a, d_a, r_b>$ `(a,d_a,r_b).`

Exercício 201) $<a, d_b, r_a>$ `(a,d_b,r_a).`

Exercício 202) $<a, d_b, r_b>$ `(a,d_b,r_b).`

Exercício 203) $<a, d_b, r_c>$ `(a,d_b,r_c).`

Exercício 204) $<a, e_a, e_b>$ `(a,e_a,e_b).`

Exercício 205) $<a, e_b, e_c>$ `(a,e_b,e_c).`

Exercício 206) $\triangle$ $<a, e_a, R>$ `(a,e_a,R).`

Exercício 207) $<a, e_b, R>$ `(a,e_b,R).`

Exercício 208) $<a, e_a, r>$ `(a,e_a,r).`

Exercício 209) $<a, e_b, r>$ `(a,e_b,r).`

Exercício 210) $<a, e_a, r_a>$ `(a,e_a,r_a).`

Exercício 211) $<a, e_a, r_b>$ `(a,e_a,r_b).`

Exercício 212) $<a, e_b, r_a>$ `(a,e_b,r_a).`

Exercício 213) $<a, e_b, r_b>$ `(a,e_b,r_b).`

Exercício 214) $<a, e_b, r_c>$ `(a,e_b,r_c).`

Exercício 215) $\triangle$ $<a, R, r>$ `(a,R,r).`

Exercício 216) $\triangle$ $<a, R, r_a>$ `(a,R,r_a).`

Exercício 217) $\triangle$ $<a, R, r_b>$ `(a,R,r_b).`

Exercício 218) $\triangle$ $<a, r, r_a>$ `(a,r,r_a).`

Exercício 219) △ $<a, r, r_b>$ `(a,r,r_b)`.

Exercício 220) △ $<a, r_a, r_b>$ `(a,r_a,r_b)`.

Exercício 221) △ $<a, r_b, r_c>$ `(a,r_b,r_c)`.

Exercício 222) △ $<h_a, h_b, h_c>$ `(h_a,h_b,h_c)`.

Exercício 223) △ $<h_a, h_b, m_a>$ `(h_a,h_b,m_a)`.

Exercício 224) △ $<h_a, h_b, m_c>$ `(h_a,h_b,m_c)`.

Exercício 225) $<h_a, h_b, d_a>$ `(h_a,h_b,d_a)`.

Exercício 226) △ $<h_a, h_b, d_c>$ `(h_a,h_b,d_c)`.

Exercício 227) $<h_a, h_b, e_a>$ `(h_a,h_b,e_a)`.

Exercício 228) △ $<h_a, h_b, e_c>$ `(h_a,h_b,e_c)`.

Exercício 229) $<h_a, h_b, R>$ `(h_a,h_b,R)`.

Exercício 230) △ $<h_a, h_b, r>$ `(h_a,h_b,r)`.

Exercício 231) △ $<h_a, h_b, r_a>$ `(h_a,h_b,r_a)`.

Exercício 232) △ $<h_a, h_b, r_c>$ `(h_a,h_b,r_c)`.

Exercício 233) △ $<h_a, m_a, m_b>$ `(h_a,m_a,m_b)`.

Exercício 234) △ $<h_a, m_b, m_c>$ `(h_a,m_b,m_c)`.

Exercício 235) △ $<h_a, m_a, d_a>$ `(h_a,m_a,d_a)`.

Exercício 236) $<h_a, m_a, d_b>$ `(h_a,m_a,d_b)`.

Exercício 237) △ $<h_a, m_b, d_a>$ `(h_a,m_b,d_a)`.

Exercício 238) $<h_a, m_b, d_b>$ `(h_a,m_b,d_b)`.

Exercício 239) $<h_a, m_b, d_c>$ `(h_a,m_b,d_c)`.

Exercício 240) △ $<h_a, m_a, e_a>$ `(h_a,m_a,e_a)`.

Exercício 241) $<h_a, m_a, e_b>$ `(h_a,m_a,e_b)`.

Exercício 242) △ $<h_a, m_b, e_a>$ `(h_a,m_b,e_a)`.

Exercício 243) $<h_a, m_b, e_b>$ `(h_a,m_b,e_b)`.

Exercício 244) $<h_a, m_b, e_c>$ `(h_a,m_b,e_c)`.

Exercício 245) △ $<h_a, m_a, R>$ `(h_a,m_a,R)`.

Exercício 246) $<h_a, m_b, R>$ `(h_a,m_b,R)`.

Exercício 247) △ $<h_a, m_a, r>$ `(h_a,m_a,r)`.

Exercício 248) △ $< h_a, m_b, r >$ `(h_a,m_b,r).`

Exercício 249) △ $< h_a, m_a, r_a >$ `(h_a,m_a,r_a).`

Exercício 250) △ $< h_a, m_a, r_b >$ `(h_a,m_a,r_b).`

Exercício 251) △ $< h_a, m_b, r_a >$ `(h_a,m_b,r_a).`

Exercício 252) △ $< h_a, m_b, r_b >$ `(h_a,m_b,r_b).`

Exercício 253) △ $< h_a, m_b, r_c >$ `(h_a,m_b,r_c).`

Exercício 254) $< h_a, d_a, d_b >$ `(h_a,d_a,d_b).`

Exercício 255) $< h_a, d_b, d_c >$ `(h_a,d_b,d_c).`

Exercício 256) ▲ $< h_a, d_a, e_a >$ `(h_a,d_a,e_a).`

Exercício 257) $< h_a, d_a, e_b >$ `(h_a,d_a,e_b).`

Exercício 258) $< h_a, d_b, e_a >$ `(h_a,d_b,e_a).`

Exercício 259) $< h_a, d_b, e_b >$ `(h_a,d_b,e_b).`

Exercício 260) $< h_a, d_b, e_c >$ `(h_a,d_b,e_c).`

Exercício 261) △ $< h_a, d_a, R >$ `(h_a,d_a,R).`

Exercício 262) $< h_a, d_b, R >$ `(h_a,d_b,R).`

Exercício 263) △ $< h_a, d_a, r >$ `(h_a,d_a,r).`

Exercício 264) $< h_a, d_b, r >$ `(h_a,d_b,r).`

Exercício 265) △ $< h_a, d_a, r_a >$ `(h_a,d_a,r_a).`

Exercício 266) △ $< h_a, d_a, r_b >$ `(h_a,d_a,r_b).`

Exercício 267) $< h_a, d_b, r_a >$ `(h_a,d_b,r_a).`

Exercício 268) $< h_a, d_b, r_b >$ `(h_a,d_b,r_b).`

Exercício 269) $< h_a, d_b, r_c >$ `(h_a,d_b,r_c).`

Exercício 270) $< h_a, e_a, e_b >$ `(h_a,e_a,e_b).`

Exercício 271) $< h_a, e_b, e_c >$ `(h_a,e_b,e_c).`

Exercício 272) △ $< h_a, e_a, R >$ `(h_a,e_a,R).`

Exercício 273) $< h_a, e_b, R >$ `(h_a,e_b,R).`

Exercício 274) △ $< h_a, e_a, r >$ `(h_a,e_a,r).`

Exercício 275) $< h_a, e_b, r >$ `(h_a,e_b,r).`

Exercício 276) △ $< h_a, e_a, r_a >$ `(h_a,e_a,r_a).`

Exercício 277) △ $<h_a, e_a, r_b>$ `(h_a,e_a,r_b).`

Exercício 278) $<h_a, e_b, r_a>$ `(h_a,e_b,r_a).`

Exercício 279) $<h_a, e_b, r_b>$ `(h_a,e_b,r_b).`

Exercício 280) $<h_a, e_b, r_c>$ `(h_a,e_b,r_c).`

Exercício 281) △ $<h_a, R, r>$ `(h_a,R,r).`

Exercício 282) △ $<h_a, R, r_a>$ `(h_a,R,r_a).`

Exercício 283) △ $<h_a, R, r_b>$ `(h_a,R,r_b).`

Exercício 284) ▲ $<h_a, r, r_a>$ `(h_a,r,r_a).`

Exercício 285) △ $<h_a, r, r_b>$ `(h_a,r,r_b).`

Exercício 286) △ $<h_a, r_a, r_b>$ `(h_a,r_a,r_b).`

Exercício 287) ▲ $<h_a, r_b, r_c>$ `(h_a,r_b,r_c).`

Exercício 288) △ $<m_a, m_b, m_c>$ `(m_a,m_b,m_c).`

Exercício 289) $<m_a, m_b, d_a>$ `(m_a,m_b,d_a).`

Exercício 290) $<m_a, m_b, d_c>$ `(m_a,m_b,d_c).`

Exercício 291) $<m_a, m_b, e_a>$ `(m_a,m_b,e_a).`

Exercício 292) $<m_a, m_b, e_c>$ `(m_a,m_b,e_c).`

Exercício 293) $<m_a, m_b, R>$ `(m_a,m_b,R).`

Exercício 294) $<m_a, m_b, r>$ `(m_a,m_b,r).`

Exercício 295) $<m_a, m_b, r_a>$ `(m_a,m_b,r_a).`

Exercício 296) $<m_a, m_b, r_c>$ `(m_a,m_b,r_c).`

Exercício 297) $<m_a, d_a, d_b>$ `(m_a,d_a,d_b).`

Exercício 298) $<m_a, d_b, d_c>$ `(m_a,d_b,d_c).`

Exercício 299) △ $<m_a, d_a, e_a>$ `(m_a,d_a,e_a).`

Exercício 300) $<m_a, d_a, e_b>$ `(m_a,d_a,e_b).`

Exercício 301) $<m_a, d_b, e_a>$ `(m_a,d_b,e_a).`

Exercício 302) △ $<m_a, d_b, e_b>$ `(m_a,d_b,e_b).`

Exercício 303) $<m_a, d_b, e_c>$ `(m_a,d_b,e_c).`

Exercício 304) △ $<m_a, d_a, R>$ `(m_a,d_a,R).`

Exercício 305) $<m_a, d_b, R>$ `(m_a,d_b,R).`

Exercício 306) $< m_a, d_a, r >$ `(m_a,d_a,r).`

Exercício 307) $< m_a, d_b, r >$ `(m_a,d_b,r).`

Exercício 308) $< m_a, d_a, r_a >$ `(m_a,d_a,r_a).`

Exercício 309) $< m_a, d_a, r_b >$ `(m_a,d_a,r_b).`

Exercício 310) $< m_a, d_b, r_a >$ `(m_a,d_b,r_a).`

Exercício 311) $< m_a, d_b, r_b >$ `(m_a,d_b,r_b).`

Exercício 312) $< m_a, d_b, r_c >$ `(m_a,d_b,r_c).`

Exercício 313) $< m_a, e_a, e_b >$ `(m_a,e_a,e_b).`

Exercício 314) $< m_a, e_b, e_c >$ `(m_a,e_b,e_c).`

Exercício 315) $\triangle$ $< m_a, e_a, R >$ `(m_a,e_a,R).`

Exercício 316) $< m_a, e_b, R >$ `(m_a,e_b,R).`

Exercício 317) $< m_a, e_a, r >$ `(m_a,e_a,r).`

Exercício 318) $< m_a, e_b, r >$ `(m_a,e_b,r).`

Exercício 319) $< m_a, e_a, r_a >$ `(m_a,e_a,r_a).`

Exercício 320) $< m_a, e_a, r_b >$ `(m_a,e_a,r_b).`

Exercício 321) $< m_a, e_b, r_a >$ `(m_a,e_b,r_a).`

Exercício 322) $< m_a, e_b, r_b >$ `(m_a,e_b,r_b).`

Exercício 323) $< m_a, e_b, r_c >$ `(m_a,e_b,r_c).`

Exercício 324) $< m_a, R, r >$ `(m_a,R,r).`

Exercício 325) $< m_a, R, r_a >$ `(m_a,R,r_a).`

Exercício 326) $< m_a, R, r_b >$ `(m_a,R,r_b).`

Exercício 327) $\triangle$ $< m_a, r, r_a >$ `(m_a,r,r_a).`

Exercício 328) $\triangle$ $< m_a, r, r_b >$ `(m_a,r,r_b).`

Exercício 329) $\triangle$ $< m_a, r_a, r_b >$ `(m_a,r_a,r_b).`

Exercício 330) $\triangle$ $< m_a, r_b, r_c >$ `(m_a,r_b,r_c).`

Exercício 331) $< d_a, d_b, d_c >$ `(d_a,d_b,d_c).`

Exercício 332) $< d_a, d_b, e_a >$ `(d_a,d_b,e_a).`

Exercício 333) $< d_a, d_b, e_c >$ `(d_a,d_b,e_c).`

Exercício 334) $< d_a, d_b, R >$ `(d_a,d_b,R).`

Exercício 335) $<d_a, d_b, r>$ (d_a,d_b,r).

Exercício 336) $<d_a, d_b, r_a>$ (d_a,d_b,r_a).

Exercício 337) $<d_a, d_b, r_c>$ (d_a,d_b,r_c).

Exercício 338) $<d_a, e_a, e_b>$ (d_a,e_a,e_b).

Exercício 339) $<d_a, e_b, e_c>$ (d_a,e_b,e_c).

Exercício 340) $\triangle$ $<d_a, e_a, R>$ (d_a,e_a,R).

Exercício 341) $<d_a, e_b, R>$ (d_a,e_b,R).

Exercício 342) $\triangle$ $<d_a, e_a, r>$ (d_a,e_a,r).

Exercício 343) $<d_a, e_b, r>$ (d_a,e_b,r).

Exercício 344) $\triangle$ $<d_a, e_a, r_a>$ (d_a,e_a,r_a).

Exercício 345) $\triangle$ $<d_a, e_a, r_b>$ (d_a,e_a,r_b).

Exercício 346) $<d_a, e_b, r_a>$ (d_a,e_b,r_a).

Exercício 347) $<d_a, e_b, r_b>$ (d_a,e_b,r_b).

Exercício 348) $<d_a, e_b, r_c>$ (d_a,e_b,r_c).

Exercício 349) $<d_a, R, r>$ (d_a,R,r).

Exercício 350) $<d_a, R, r_a>$ (d_a,R,r_a).

Exercício 351) $<d_a, R, r_b>$ (d_a,R,r_b).

Exercício 352) $\triangle$ $<d_a, r, r_a>$ (d_a,r,r_a).

Exercício 353) $<d_a, r, r_b>$ (d_a,r,r_b).

Exercício 354) $<d_a, r_a, r_b>$ (d_a,r_a,r_b).

Exercício 355) $\triangle$ $<d_a, r_b, r_c>$ (d_a,r_b,r_c).

Exercício 356) $<e_a, e_b, e_c>$ (e_a,e_b,e_c).

Exercício 357) $<e_a, e_b, R>$ (e_a,e_b,R).

Exercício 358) $<e_a, e_b, r>$ (e_a,e_b,r).

Exercício 359) $<e_a, e_b, r_a>$ (e_a,e_b,r_a).

Exercício 360) $<e_a, e_b, r_c>$ (e_a,e_b,r_c).

Exercício 361) $<e_a, R, r>$ (e_a,R,r).

Exercício 362) $<e_a, R, r_a>$ (e_a,R,r_a).

Exercício 363) $<e_a, R, r_b>$ (e_a,R,r_b).

Exercício 364) △ < e_a, r, r_a > `(e_a,r,r_a).`

Exercício 365) < e_a, r, r_b > `(e_a,r,r_b).`

Exercício 366) < e_a, r_a, r_b > `(e_a,r_a,r_b).`

Exercício 367) △ < e_a, r_b, r_c > `(e_a,r_b,r_c).`

Exercício 368) △ < R, r, r_a > `(R,r,r_a).`

Exercício 369) △ < R, r_a, r_b > `(R,r_a,r_b).`

Exercício 370) △ < r, r_a, r_b > `(r,r_a,r_b).`

Exercício 371) △ < r_a, r_b, r_c > `(r_a,r_b,r_c).`

CAPÍTULO 5

CONSTRUÇÕES E SOLUÇÕES ALGÉBRICAS

Exercício 1) $<\alpha, \beta, \gamma>$

Definição: *três ou mais elementos de um triângulo formam um* datum *se dados dois quaisquer destes elementos os demais ficam determinados.*

Sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Assim, se conhecermos dois ângulos, o terceiro (isto é, seu valor numérico ou gráfico) ficará determinado. Portanto, pode-se dizer que $<\alpha, \beta, \gamma>$ formam um datum.

Problemas onde os elementos formam um datum são impossíveis ou indeterminados. Se $\alpha + \beta + \gamma \neq 180°$, o problema é impossível; se $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, pode-se construir um número ilimitado de triângulos e o problema é indeterminado.

Teremos oportunidade de ver outros problemas onde os elementos formam um datum.

Exercício 2) $<\alpha, \beta, a>$

Primeiro procedimento

Como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, conhecemos $<\alpha, \beta, \gamma>$. Logo, podemos desenhar a *forma* ($\triangle\, \mathrm{A}'\mathbf{B}\mathrm{C}'$) do triângulo procurado (ver a figura 5.1, na página 67).

Agora queremos que $\mathbf{BC} = a$. Na reta $\mathfrak{a}$ marcamos o ponto $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{BC} = a$ e a partir do ponto $\mathbf{C}$ obtemos facilmente o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$).

Como $\triangle\,\mathrm{A}'\mathbf{B}\mathrm{C}' \sim \triangle\,\mathbf{ABC}$, diremos que esta maneira de proceder faz apelo ao *método das figuras semelhantes*. Todos os problemas de construção de triângulo nos quais dois ângulos são conhecidos podem ser resolvidos com este método.

Deve-se também notar que o $\triangle\,\mathbf{ABC}$ é a *imagem* (ou o *transformado*) do $\triangle\,\mathrm{A}'\mathbf{B}\mathrm{C}'$ obtida pela *homotetia* ou *transformação homotética* com centro $\mathbf{B}$ e razão (ou característica) $k = \frac{a}{\mathbf{BC}'}$ (ver [3], ou [6] ou [8]).

Segundo procedimento

Uma análise da figura 5.1 (ver a página 67) nos mostrará que o ponto $\mathbf{A}$ possui duas propriedades:

i) pertence à reta $\mathfrak{c}$;

ii) um observador colocado em $\mathbf{A}$ enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo α ($\mathbf{A}$ pertence ao arco capaz—Γ—do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.2, na página 68):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o círculo (arco) Γ;

iii) construir a reta $\mathfrak{c}$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{c} \cap \Gamma$).

Discussão: o problema é sempre possível[†] e possui uma única solução.

Observações:

i) notar que o arco capaz de 90° sobre um segmento é a circunferência do círculo cujo diâmetro é o próprio segmento;

ii) notar que $\frac{a}{2} = R\sin\alpha$ ou $a = 2R\sin\alpha$. Portanto, $<\alpha, a, R>$ formam um datum.

Com este procedimento pôde-se determinar um ponto—o ponto $\mathbf{A}$—que satisfaz duas condições bem precisas, isto é, $\mathbf{A} \in \mathfrak{c}$ e $\mathbf{A} \in \Gamma$ ou $\mathbf{A} = \mathfrak{c} \cap \Gamma$. Esta maneira de proceder faz apelo ao *método da determinação de um ponto pela interseção de dois de seus lugares geométricos*. Veremos que diversos problemas de construção de triângulo terão sua resolução baseada neste método.

[†] Suporemos sempre que $\alpha + \beta < 180°$.

Exercício 3) $<\alpha, \beta, c>$

Método das figuras semelhantes

Como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, conhecemos $<\alpha, \beta, \gamma>$. Logo, podemos construir o $\triangle\,\mathrm{A}'\mathbf{B}\mathrm{C}'$ (ver a figura 5.1, na página 67). Na reta $\mathfrak{c}$ marcamos o ponto $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{BA} = c$ e a partir do ponto $\mathbf{A}$ obtemos facilmente o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$).

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução.

Exercício 4) $<\alpha, \beta, h_a>$

Método das figuras semelhantes

Como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, conhecemos $<\alpha, \beta, \gamma>$. Logo, podemos desenhar a forma ($\triangle\,\mathbf{A}\mathrm{B}'\mathrm{C}'$) do triângulo procurado (ver a figura 5.3, na página 69).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.3):

i) construir o $\triangle\,\mathbf{A}\mathrm{B}'\mathrm{C}'$, obtendo a reta $\mathfrak{a}'$, a reta $\mathfrak{h}_a$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{h}_a \perp \mathfrak{a}'$) e o ponto H'_a ($H'_a = \mathfrak{h}_a \cap \mathfrak{a}'$);

ii) na reta $\mathfrak{h}_a$ marcar o ponto H_a tal que $\mathbf{A}H_a = h_a$;

iii) traçar, pelo ponto H_a, a reta $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{a}'$) e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução.

Observação: reparar na transformação homotética de centro $\mathbf{A}$ levando os pontos B', H'_a e C' nos pontos $\mathbf{B}$, H_a e $\mathbf{C}$, respectivamente.

Exercício 5) $<\alpha, \beta, h_c>$

Método do problema já resolvido

Como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, obtemos o ângulo γ e o problema é equivalente ao do exercício anterior, que já sabemos como resolver. Esta maneira de proceder faz apelo ao *método da transformação do problema original para colocá-lo na forma de um problema que já sabemos como resolver.* Veremos que diversos problemas de construção de triângulo terão sua solução baseada neste método.

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução.

Exercício 6) $<\alpha, \beta, m_a>$

Método das figuras semelhantes

Como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, conhecemos $<\alpha, \beta, \gamma>$. Logo, podemos desenhar a forma ($\triangle\,\mathbf{A}B'C'$) do triângulo procurado (ver a figura 5.4, na página 70).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.4):

i) construir o $\triangle\,\mathbf{A}B'C'$, obtendo a reta $\mathfrak{a}'$, o ponto M'_a médio de $\overline{B'C'}$ e a reta $\mathfrak{m}_a = (\mathbf{A}, M'_a)$;

ii) na reta $\mathfrak{m}_a$ marcar o ponto M_a tal que $\mathbf{A}M_a = m_a$;

iii) traçar, pelo ponto M_a, a reta $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{a}'$) e obter os pontos **B** e **C**.

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução.

Observação: reparar na transformação homotética de centro **A** levando os pontos B', M'_a e C' nos pontos **B**, M_a e **C**, respectivamente.

Exercício 7) $<\alpha, \beta, m_c>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, \beta, \gamma>$ formam um datum, conhecemos $<\gamma, \beta, m_c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 6).

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução.

Exercício 8) $<\alpha, \beta, d_a>$

Método das figuras semelhantes

Como $<\alpha, \beta, \gamma>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, \beta, \gamma>$. Logo, podemos desenhar a forma ($\triangle\,\mathbf{A}B'C'$) do triângulo procurado (ver a figura 5.5, na página 71).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.5):

i) construir o $\triangle\,\mathbf{A}B'C'$, obtendo a reta $\mathfrak{a}'$, a reta $\mathfrak{d}_a$ (bissetriz interna que parte do vértice **A**) e o ponto D'_a ($D'_a = \mathfrak{d}_a \cap \mathfrak{a}'$);

ii) na reta $\mathfrak{d}_a$ marcar o ponto D_a tal que $\mathbf{A}D_a = d_a$;

iii) traçar, pelo ponto D_a, a reta $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{a}'$) e obter os pontos **B** e **C**.

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução.

Observação: reparar na transformação homotética de centro **A** levando os pontos B′, D'_a e C′ nos pontos **B**, D_a e **C**, respectivamente.

Exercício 9) $<\alpha, \beta, d_c>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, \beta, \gamma>$ formam um datum, conhecemos $<\gamma, \beta, d_c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 8).

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução.

Exercício 10) $<\alpha, \beta, e_a>$

Método das figuras semelhantes

Como $<\alpha, \beta, \gamma>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, \beta, \gamma>$. Logo, podemos desenhar a forma ($\triangle\,\mathbf{A}$B′C′) do triângulo procurado (ver a figura 5.6, na página 72).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.6):

i) construir o $\triangle\,\mathbf{A}$B′C′, obtendo a reta $\mathfrak{a}'$, a reta $\mathfrak{e}_a$ (bissetriz externa que parte do vértice **A**) e o ponto E'_a ($E'_a = \mathfrak{e}_a \cap \mathfrak{a}'$);

ii) na reta $\mathfrak{e}_a$ marcar o ponto E_a tal que $\mathbf{A}E_a = e_a$;

iii) traçar, pelo ponto E_a, a reta $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{a}'$) e obter os pontos **B** e **C**.

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução.

Observação: reparar na transformação homotética de centro **A** levando os pontos E'_a, B′ e C′ nos pontos E_a, **B** e **C**, respectivamente.

Exercício 11) $<\alpha, \beta, e_c>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, \beta, \gamma>$ formam um datum, conhecemos $<\gamma, \beta, e_c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 10).

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução.

Exercício 12) $<\alpha, \beta, R>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, R, a>$ formam um datum (ver o exercício 2), conhecemos $<\alpha, \beta, a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 2).

Observação: supondo $\alpha > 90°$ (para $\alpha \leq 90°$ ver a figura 5.2, na página 68), podemos imaginar a seguinte construção (ver a figura 5.7, na página 73):

i) construir o ângulo de vértice **C** e medida $\alpha - 90°$, obtendo as retas $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{u}$;

ii) traçar o arco $\phi = (\mathbf{C}, R)$ e obter o ponto O ($O = \mathfrak{u} \cap \phi$), centro do círculo circunscrito Γ;

iii) traçar o círculo $\Gamma = (O, R)$ e obter o ponto **B** ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$);

iv) servindo-se do ponto **B** como vértice e usando a reta $\mathfrak{a}$ como um dos lados, construir o ângulo β e obter a reta $\mathfrak{c}$;

v) obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \mathfrak{c} \cap \Gamma$).

Discussão: o problema é sempre possível (supondo-se $\alpha+\beta < 180°$) e possui uma única solução.

Segundo procedimento – Método das figuras semelhantes

Como $<\alpha, \beta, \gamma>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, \beta, \gamma>$. Logo, podemos desenhar a forma ($\triangle\, \mathrm{A'B'C'}$) do triângulo procurado (ver a figura 5.8, na página 74).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.8):

i) construir o $\triangle\,\mathrm{A'B'C'}$ e o centro O do círculo circunscrito Γ (o centro O encontra-se na interseção de duas mediatrizes quaisquer dos segmentos $\overline{\mathrm{A'B'}}$, $\overline{\mathrm{A'C'}}$ e $\overline{\mathrm{B'C'}}$);

ii) marcar na reta $(O, \mathrm{A'})$ o ponto $\mathbf{A}$ tal que $O\mathbf{A} = R$ e desenhar o círculo $\Gamma = (O, R)$;

iii) traçar, pelo ponto $\mathbf{A}$, duas retas paralelas: a reta $\mathfrak{c}$ paralela à reta $(\mathrm{A'}, \mathrm{B'})$ e a reta $\mathfrak{b}$ paralela à reta $(\mathrm{A'}, \mathrm{C'})$;

iv) obter os pontos $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \Gamma$) e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \Gamma$).

Observação: reparar na transformação homotética de centro O e razão $k = \frac{R}{O\mathrm{A'}}$ levando os pontos $\mathrm{A'}$, $\mathrm{B'}$ e $\mathrm{C'}$ nos pontos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, respectivamente.

Dito de outra maneira, o $\triangle\,\mathbf{ABC}$ é a imagem do $\triangle\,\mathrm{A'B'C'}$ gerada pela *homotetia* ou *transformação homotética* com centro O e razão (ou característica) $k = \frac{R}{O\mathrm{A'}} = \frac{R}{O\mathrm{B'}} = \frac{R}{O\mathrm{C'}}$.

Exercício 13) $<\alpha, \beta, r>$

Primeiro procedimento – Método das figuras semelhantes

Como $<\alpha, \beta, \gamma>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, \beta, \gamma>$. Logo, podemos desenhar a forma ($\triangle\,\mathrm{A'}\mathbf{B}\mathrm{C'}$) do triângulo procurado (ver a figura 5.9, na página 75).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.9):

i) construir o $\triangle\,\mathrm{A'}\mathbf{B}\mathrm{C'}$, obtendo as retas $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathrm{C'})$ e $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, \mathrm{A'})$;

ii) construir a reta $\mathfrak{d}_b$ (bissetriz interna que parte do vértice $\mathbf{B}$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando r desta; obter o ponto I ($I = \mathfrak{d}_b \cap \mathfrak{a}'$) e traçar o círculo inscrito $\gamma_i = (I, r)$;

iv) traçar, pelo ponto I, a reta $(\mathfrak{u})$ perpendicular à reta $\mathfrak{b}' = (\mathrm{A'}, \mathrm{C'})$ e obter o ponto Y ($Y = \mathfrak{u} \cap \gamma_i$);

v) traçar, pelo ponto Y, a reta $(\mathfrak{b})$ paralela à reta $\mathfrak{b}'$ e obter os pontos $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$) e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$).

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução.

Observação: reparar na transformação homotética de centro **B** levando os pontos A′ e C′ nos pontos **A** e **C**, respectivamente.

Segundo procedimento – Método das figuras semelhantes

Como $<\alpha, \beta, \gamma>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, \beta, \gamma>$. Logo, podemos desenhar a forma ($\triangle$ A′B′C′) do triângulo procurado (ver a figura 5.10, na página 76).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.10):

i) construir o $\triangle$ A′B′C′ e o centro I do círculo inscrito γ_i' (o centro I encontra-se na interseção de duas bissetrizes internas quaisquer dos ângulos α, β e γ). Em seguida, determinar os pontos de contato (de tangência) X', Y' e Z' e desenhar o círculo $\gamma_i' = (I, IX') = (I, r')$;

ii) nas retas (I, X'), (I, Y') e (I, Z') marcar os pontos X, Y e Z tais que $IX = IY = IZ = r$;

iii) traçar pelos pontos X, Y e Z as paralelas às retas (B′, C′), (A′, C′) e (A′, B′), respectivamente; obter os pontos **A**, **B** e **C**.

Observação: reparar na transformação homotética de centro I e razão $k = \frac{IX}{IX'} = \frac{r}{r'}$ levando os pontos A′, B′ e C′ nos pontos **A**, **B** e **C**, respectivamente.

Dito de outra maneira, o $\triangle$ **ABC** é a imagem do $\triangle$ A′B′C′ gerada pela *homotetia* ou *transformação homotética* com centro I e razão (ou característica) $k = \frac{IX}{IX'} = \frac{IY}{IY'} = \frac{IZ}{IZ'} = \frac{r}{r'}$.

Exercício 14) $<\alpha, \beta, r_a>$

Primeiro procedimento – Método das figuras semelhantes

Como $<\alpha, \beta, \gamma>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, \beta, \gamma>$. Logo, podemos desenhar a forma ($\triangle$ A′**B**C′) do triângulo procurado (ver a figura 5.11, na página 77).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.11), onde resolvemos o problema equivalente supondo $<\alpha, \beta, r_b>$ conhecidos:

i) construir o $\triangle \mathrm{A}'\mathbf{B}\mathrm{C}'$, obtendo as retas $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathrm{C}')$ e $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, \mathrm{A}')$;

ii) construir a reta $\mathfrak{d}_b$ (bissetriz interna que parte do vértice $\mathbf{B}$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando r_b desta; obter o ponto I_b ($I_b = \mathfrak{d}_b \cap \mathfrak{a}'$) e traçar o círculo exinscrito $\gamma_b = (I_b, r_b)$;

iv) traçar, pelo ponto I_b, a reta ($\mathfrak{u}$) perpendicular à reta $\mathfrak{b}' = (\mathrm{A}', \mathrm{C}')$ e obter o ponto Y_b ($Y_b = \mathfrak{u} \cap \gamma_b$);

v) traçar, pelo ponto Y_b, a reta ($\mathfrak{b}$) paralela à reta $\mathfrak{b}'$ e obter os pontos $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$) e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$).

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução.

Observação: reparar na transformação homotética de centro $\mathbf{B}$ levando os pontos A' e C' nos pontos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$, respectivamente.

Segundo procedimento – Método das figuras semelhantes

Como $<\alpha, \beta, \gamma>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, \beta, \gamma>$. Logo, podemos desenhar a forma ($\triangle \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$) do triângulo procurado (ver a figura 5.12, na página 78).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.12):

i) construir o $\triangle \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ e o centro I_a do círculo exinscrito γ_a' (o centro I_a encontra-se na interseção de duas bissetrizes quaisquer dos ângulos α, $180° - \beta$ e $180° - \gamma$). Em seguida, determinar os pontos de contato (de tangência) X_a', Y_a' e Z_a' e desenhar o círculo $\gamma_a' = (I_a, I_a X_a') = (I_a, r_a')$;

ii) nas retas (I_a, X_a'), (I_a, Y_a') e (I_a, Z_a') marcar os pontos X_a, Y_a e Z_a tais que $I_a X_a = I_a Y_a = I_a Z_a = r_a$;

iii) traçar pelos pontos X_a, Y_a e Z_a as paralelas às retas $(\mathrm{B}', \mathrm{C}')$, $(\mathrm{A}', \mathrm{C}')$ e $(\mathrm{A}', \mathrm{B}')$, respectivamente; obter os pontos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

Observação: reparar na transformação homotética de centro I_a e razão $k = \frac{I_a X_a}{I_a X_a'} = \frac{r_a}{r_a'}$ levando os pontos A', B' e C' nos pontos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, respectivamente.

Dito de outra maneira, o $\triangle$ **ABC** é a imagem do $\triangle$ A′B′C′ gerada pela *homotetia* ou *transformação homotética* com centro I_a e razão (ou característica) $k = \frac{I_a X_a}{I_a X_a'} = \frac{I_a Y_a}{I_a Y_a'} = \frac{I_a Z_a}{I_a Z_a'} = \frac{r_a}{r_a'}$.

Exercício 15) $<\alpha, \beta, r_c>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, \beta, \gamma>$ formam um datum, conhecemos $<\gamma, \beta, r_c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 14).

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução.

Exercício 16) $<\alpha, a, b>$

Primeiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Construir o ângulo α de vértice **A** (ver a figura 5.13, na página 79), obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$; traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{A}, b)$ e obter o ponto **C** ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi_1$); traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{C}, a)$ e obter o ponto **B** ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \phi_2$).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.14 (ver a página 80) nos mostrará que o ponto **A** possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **C** vale b, ou seja, $\mathbf{CA} = b$;

ii) um observador colocado em **A** enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo α (**A** pertence ao arco capaz—Γ—do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.14, na página 80):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir Γ;

iii) traçar o arco $\phi = (\mathbf{C}, b)$ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \Gamma \cap \phi$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle$ **ABC** e $\triangle$ **A′BC**) soluções.

Exercício 17) $<\alpha, b, c>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$ (ver a figura 5.15, na página 81), obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$; traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{A}, b)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi_1$); traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{A}, c)$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \phi_2$).

Discussão: o problema é sempre possível ($0 < \alpha < 180°$) e possui uma única solução.

Exercício 18) $<\alpha, a, h_a>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.16 (ver a página 82) nos mostrará que o ponto $\mathbf{A}$ possui duas propriedades:

i) a distância entre o ponto $\mathbf{A}$ e a reta $\mathfrak{a}$ vale h_a;

ii) um observador colocado em $\mathbf{A}$ enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo α ($\mathbf{A}$ pertence ao arco capaz—Γ—do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.16, na página 82):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir Γ;

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando h_a desta; obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (reparar que os triângulos $\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$ são congruentes, isto é, $\triangle\,\mathbf{ABC} \cong \triangle\,\mathbf{A'BC}$ e neste caso tem-se somente uma solução).

Exercício 19) $<\alpha, a, h_b>$

Primeiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.17 (ver a página 83) nos mostrará que o ponto **B** possui duas propriedades:

i) **B** pertence à reta $\mathfrak{c}$;

ii) a distância entre o ponto **B** e a reta $\mathfrak{b}$ vale h_b.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.17, na página 83):

i) construir o ângulo α de vértice **A**, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) traçar a reta $\mathfrak{b}'$ paralela à reta $\mathfrak{b}$ e distando h_b desta; obter o ponto **B** ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}'$);

iii) traçar o arco $\phi = (\mathbf{B}, a)$ e obter o ponto **C** ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi$).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{BC}H_b$. Uma análise da figura 5.18 (ver a página 84) nos mostrará que o ponto H_b possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **B** vale h_b;

ii) um observador colocado em H_b enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo reto (H_b pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.18, na página 84):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o círculo ϕ_1;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{B}, h_b)$ e obter o ponto H_b ($H_b = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, H_b)$ e obter **A** ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \Gamma$, onde Γ é o arco capaz do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

Observação: reparar que tivemos que construir o $\triangle\,\mathbf{BC}H_b$ ($\triangle\,\mathbf{BC}H_b'$) antes de obter o $\triangle\,\mathbf{ABC}$ ($\triangle\,\mathbf{A'BC}$). Por esta razão, diremos que esta maneira de proceder fará apelo ao *método da figura auxiliar*.

Veremos que diversos problemas de construção de triângulo terão sua resolução baseada na construção de uma figura auxiliar onde um dos seus pontos se encontra na interseção de dois lugares geométricos. Nestes problemas, a caracterização de um método de construção pode se revelar discutível e o leitor poderá discordar daquele escolhido pelo autor.

Exercício 20) $<\alpha, b, h_a>$

Primeiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.19 (ver a página 85) nos mostrará que o ponto $\mathbf{C}$ possui duas propriedades:

i) $\mathbf{C}$ pertence à reta $\mathfrak{a}$;

ii) sua distância ao ponto $\mathbf{A}$ vale b.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.19, na página 85):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto H_a; construir a reta $\mathfrak{h}_a$ ($H_a \in \mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{h}_a \perp \mathfrak{a}$) e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{h}_a$ e $H_a\mathbf{A} = h_a$);

ii) traçar o arco $\phi = (\mathbf{A}, b)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \phi$);

iii) servindo-se do ponto $\mathbf{A}$ como vértice e usando a reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{A}, \mathbf{C})$ como um dos lados, construir o ângulo α e obter a reta $\mathfrak{c}$;

iv) obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{AC}H_a$. Uma análise da figura 5.20 (ver a página 86) nos mostrará que o ponto H_a possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **A** vale h_a;

ii) um observador colocado em H_a enxerga o segmento $\overline{\mathbf{AC}}$ segundo um ângulo reto (H_a pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{AC}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.20, na página 86):

i) construir o ângulo α de vértice **A**, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) colocar **C** na reta $\mathfrak{b}$ tal que $\mathbf{AC} = b$;

iii) construir ϕ_1;

iv) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{A}, h_a)$ e obter o ponto H_a ($H_a = \phi_1 \cap \phi_2$);

v) traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, H_a)$ e obter **B** ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{AB'C}$) soluções.

Exercício 21) $<\alpha, b, h_b>$

Primeiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.17 (ver a página 83) nos mostrará que o ponto **B** possui duas propriedades:

i) **B** pertence à reta $\mathfrak{c}$;

ii) sua distância à reta $\mathfrak{b}$ vale h_b.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.21, na página 87):

i) construir o ângulo α de vértice **A**, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) traçar a reta $\mathfrak{b}'$ paralela à reta $\mathfrak{b}$ e distando h_b desta; obter o ponto **B** ($\mathbf{B} = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{c}$);

iii) colocar **C** na reta $\mathfrak{b}$ tal que $\mathbf{AC} = b$.

Observação: como na figura 5.17, a figura 5.21 mostra que o $\triangle \mathbf{AB}H_b$ (triângulo retângulo) fica determinado dados dois quaisquer dos elementos $<\alpha, c, h_b>$. Logo, dados α e c, h_b fica determinado; dados α e h_b, c fica determinado. Entretanto, dados c e h_b, α não fica determinado pois $\sin\alpha = h_b/c$ e o ângulo no vértice **A** pode assumir dois valores: $\alpha = \measuredangle\mathbf{BAC}$ e $180° - \alpha = \measuredangle\mathbf{B'AC}$. Portanto, o problema $<b, c, h_b>$ (ver também os exercícios 129 e 130) possui 0, 1 ou 2 soluções.

Segundo procedimento – Método do problema já resolvido

Como $c = \frac{h_b}{\sin\alpha}$ (ver as figuras 5.17 e 5.21, nas páginas 83 e 87, respectivamente), conhecemos $<\alpha, b, c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 17).

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução.

Exercício 22) $<\alpha, b, h_c>$

Datum

Como $h_c = b\sin\alpha$, $<\alpha, b, h_c>$ formam um datum. Logo, o problema é impossível ou indeterminado.

Exercício 23) $<\alpha, a, m_a>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.22 (ver a página 88) nos mostrará que o ponto **A** possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto M_a vale m_a;

ii) um observador colocado em **A** enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo α (**A** pertence ao arco capaz—Γ—do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.22, na página 88):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o ponto M_a, médio de $\overline{\mathbf{BC}}$, e o arco Γ;

iii) traçar o arco $\phi = (M_a, m_a)$ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \Gamma \cap \phi$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (reparar que os triângulos $\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$ são congruentes, isto é, $\triangle\,\mathbf{ABC} \cong \triangle\,\mathbf{A'BC}$ e neste caso tem-se somente uma solução).

Observação: sabemos que no triângulo retângulo, $m_a = a/2$. Assim, $<\alpha = 90°, a, m_a>$ formam um datum. Se $m_a \neq a/2$, o problema é impossível; por outro lado, se $m_a = a/2$, pode-se construir um número ilimitado de triângulos e o problema é indeterminado. Para os casos em que $\alpha \neq 90°$ (ver a figura 5.22), seja $h_a^{\max} = M_a E = \frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2}$. Veremos no primeiro procedimento de resolução do exercício 49 que $h_a = \frac{(4m_a^2 - a^2)\tan\alpha}{4a}$. Portanto, h_a assume somente um valor e o problema possui 0 (se $h_a \leq 0$ ou $h_a > h_a^{\max}$) ou 1 (se $0 < h_a \leq h_a^{\max}$) solução. Neste último caso, uma das duas condições abaixo é satisfeita:

i) $0 < \alpha < 90°$ $\quad \frac{a}{2} < m_a \leq h_a^{\max}$;

ii) $90° < \alpha < 180°$ $\quad h_a^{\max} \leq m_a < \frac{a}{2}$.

Exercício 24) $\quad <\alpha, a, m_b>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

Seja C′ o simétrico do ponto **C** em relação ao ponto **B**, ou seja, **B** é o ponto médio do segmento $\overline{\mathbf{CC'}}$. Uma análise da figura 5.23 (ver a página 89)nos mostrará que o ponto **A** possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto C′ vale $2m_b$;

ii) um observador colocado em **A** enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo α (**A** pertence ao arco capaz—Γ—do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.23, na página 89):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) traçar C′, simétrico de **C** em relação a **B**;

iii) construir Γ;

iv) traçar o arco $\phi = (C', 2m_b)$ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \Gamma \cap \phi$).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\, M_b\mathbf{BC}$. Uma análise da figura 5.23 (ver a página 89) nos mostrará que um observador colocado em $\mathbf{A}$ enxerga o segmento $\overline{\mathbf{B}M_b}$ segundo um ângulo α ($\mathbf{A}$ pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{B}M_b}$). Além disso, sabemos que o ponto $\mathbf{C}$ é simétrico do ponto $\mathbf{A}$ em relação ao ponto M_b. Logo, se ϕ_1' representa a imagem da simetria de ϕ_1 em relação ao ponto M_b, temos duas propriedades para o ponto $\mathbf{C}$:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{B}$ vale a;

ii) $\mathbf{C}$ pertence a ϕ_1'.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.24, na página 90):

i) numa reta $\mathfrak{m}_b$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e M_b tais que $\mathbf{B}M_b = m_b$;

ii) construir ϕ_1 e ϕ_1';

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{B}, a)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \phi_1' \cap \phi_2$);

iv) se $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, M_b)$ $\big(\mathfrak{b}' = (\mathbf{C'}, M_b)\big)$, então $\mathbf{A}\,(\mathbf{A'}) = \mathfrak{b}\,(\mathfrak{b}') \cap \phi_1$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC'}$) soluções.

Exercício 25) $<\alpha, b, m_a>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{A}M_aM_b$. Já conhecemos $\mathbf{A}M_a = m_a$, $\mathbf{A}M_b = \frac{b}{2}$ e uma análise da figura 5.23 (ver a página 89) nos mostrará que $\measuredangle\mathbf{A}M_bM_a = 180° - \alpha$.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.25, na página 91):

i) construir o ângulo α de vértice M_b, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}'$; colocar $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$ na reta $\mathfrak{b}$ tais que $M_b\mathbf{A} = b/2$ e $M_b\mathbf{C} = b/2$;

ii) traçar o arco $\phi = (\mathbf{A}, m_a)$;

iii) se $\mathfrak{c}'$ é a reta do lado "esquerdo" do ângulo α, obter o ponto M_a ($M_a = \mathfrak{c}' \cap \phi$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{c}$ $(\mathbf{A} \in \mathfrak{c}$ e $\mathfrak{c} \parallel \mathfrak{c}')$;

v) traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, M_a)$ $\big(\mathfrak{a}' = (\mathbf{C}, M'_a)\big)$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ $\big(\mathbf{B'}\big)$ $(\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$ e $\mathbf{B'} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}')$.

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Seja A′ o simétrico do ponto $\mathbf{A}$ em relação ao ponto M_a, ou seja, M_a é o ponto médio do segmento $\overline{\mathbf{A}\mathrm{A}'}$. Uma análise da figura 5.26 (ver a página 92) nos mostrará que o quadrilátero $\diamondsuit\, \mathrm{A}'\mathbf{BAC}$ é um paralelogramo pois suas diagonais se intersectam nos seus pontos médios. Assim, o ponto A′ possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{A}$ vale $2m_a$;

ii) A′ pertence à reta $\mathfrak{c}'$ $(\mathbf{C} \in \mathfrak{c}'$ e $\mathfrak{c}' \parallel \mathfrak{c})$.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.26, na página 92):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$; colocar $\mathbf{C}$ na reta $\mathfrak{b}$ tal que $\mathbf{AC} = b$;

ii) traçar a reta $\mathfrak{c}'$ $(\mathbf{C} \in \mathfrak{c}'$ e $\mathfrak{c}' \parallel \mathfrak{c})$;

iii) traçar o arco $\phi = (\mathbf{A}, 2m_a)$ e obter o ponto A′ $(\mathrm{A}' = \mathfrak{c}' \cap \phi)$;

iv) traçar a reta $\mathfrak{b}'$ $(\mathrm{A}' \in \mathfrak{b}'$ e $\mathfrak{b}' \parallel \mathfrak{b})$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ $(\mathbf{B} = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{c})$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 $(\triangle\, \mathbf{ABC}$ e $\triangle\, \mathbf{AB'C})$ soluções.

Exercício 26) $\langle \alpha, b, m_b \rangle$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.27 (ver a página 93) nos mostrará que o ponto $\mathbf{B}$ possui duas propriedades:

i) $\mathbf{B}$ pertence a um dos lados (reta $\mathfrak{c}$) do ângulo α;

ii) sua distância ao ponto M_b vale m_b.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.27, na página 93):

i) construir o ângulo α de vértice **A**, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{A}, b)$ e obter o ponto **C** ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi_1$);

iii) construir o ponto M_b, médio do segmento $\overline{\mathbf{AC}}$;

iv) traçar o arco $\phi_2 = (M_b, m_b)$ e obter o ponto **B** ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \phi_2$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{AB'C}$) soluções.

Exercício 27) $<\alpha, b, m_c>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.28 (ver a página 94) nos mostrará que o ponto **A** possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **C** vale b;

ii) um observador colocado em **A** enxerga o segmento $\overline{M_c\mathbf{C}}$ segundo um ângulo α (**A** pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo α sobre o segmento $\overline{M_c\mathbf{C}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.28, na página 94):

i) numa reta $\mathfrak{m}_c$ qualquer colocar os pontos M_c e **C** tais que $M_c\mathbf{C} = m_c$;

ii) construir ϕ_1;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{C}, b)$ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) o ponto **B** (**B′**) é o simétrico do ponto **A** (**A′**) em relação ao ponto M_c.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'B'C}$) soluções.

Exercício 28) $<\alpha, a, d_a>$

Primeiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.29 (ver a página 95) nos mostrará que o ponto **A** possui duas propriedades:

i) um observador colocado em $\mathbf{A}$ enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo α ($\mathbf{A}$ pertence ao arco capaz—Γ—do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$);

ii) se x representa sua distância au ponto D ($\mathbf{A}D = x$), então

$$x(x - d_a) = D\mathbf{C}^2 \tag{5.1}$$

Para provar o resultado dado pela equação (5.1), notamos que $\triangle\,\mathbf{AB}D \sim \triangle\,\mathbf{B}DD_a$ ($\angle D$ é comum aos dois triângulos e $\measuredangle\mathbf{BA}D = \measuredangle D\mathbf{B}D_a$). Logo, podemos escrever:

$$\frac{\mathbf{B}D}{D_aD} = \frac{\mathbf{A}D}{\mathbf{B}D} \tag{5.2}$$

Mas $D_aD = \mathbf{A}D - \mathbf{A}D_a = x - d_a$ e assim (5.2) torna-se

$$x(x - d_a) = \mathbf{B}D^2 \quad \text{ou} \quad x(x - d_a) = D\mathbf{C}^2 \qquad \blacksquare$$

O comprimento $\mathbf{A}D = x = D\mathbf{A}$ pode ser facilmente construído e com isso termina-se a construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$.

Para construir x, usamos o conceito de potência de um ponto em relação a um círculo. Se ϕ_1 é o círculo tangente à reta $\mathfrak{s} = (D, \mathbf{C})$ no ponto $\mathbf{C}$ com raio $d_a/2$ (ver a figura 5.29, na página 95), tem-se:

$$D\mathbf{C}^2 = DU \cdot DV$$

Mas $DU = DV - UV$ e $\overline{UV}$ é um diâmetro. Logo, $UV = d_a$. Assim,

$$D\mathbf{C}^2 = (DV - d_a)DV$$

Portanto,

$$DV = x$$

Daí a construção que segue (ver a figura 5.29, na página 95):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir Γ (círculo circunscrito ao triângulo e arco capaz (sua "parte superior") do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$) e obter o ponto D;

iii) construir o círculo ϕ_1 e obter o ponto V ($V = (D, \mathfrak{D}) \cap \phi_1$);

iv) traçar o arco $\phi_2 = (D, DV)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \Gamma \cap \phi_2$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (reparar que os triângulos $\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$ são congruentes, isto é, $\triangle\,\mathbf{ABC} \cong \triangle\,\mathbf{A'BC}$ e neste caso tem-se somente uma solução).

Observações:

i) como $DU = DV - UV = DV - d_a$ e $DD_a = D\mathbf{A} - D_a\mathbf{A} = DV - d_a$ tem-se $DU = DD_a$;

ii) veremos no exercício 148 que

$$R = \frac{d_a^4 - 2d_a^2h_a^2 + d_a^2\sqrt{a^2(d_a^2 - h_a^2) + d_a^4}}{4h_a(d_a^2 - h_a^2)}$$

Determinando h_a a partir deste resultado com um programa de computação algébrica (cálculos simbólicos), vem:

$$h_a = \frac{d_a\left(d_a \pm \sqrt{d_a^2 + 8R^2 \pm 4R\sqrt{4R^2 - a^2}}\right)}{4R}$$

Podemos então construir h_a. Conhecemos assim $<\alpha, a, h_a>$ e já sabemos resolver este problema (ver o exercício 18).

iii) dissemos ao final da demonstração do teorema 2.4 em [5] que apresentaríamos aqui uma outra demonstração para aquele teorema. Assim, os triângulos $\triangle\,\mathbf{AB}D$ e $\triangle\,\mathbf{A}D_a\mathbf{C}$ são semelhantes, como pode ser facilmente verificado. Logo, podemos escrever:

$$\frac{c}{d_a} = \frac{\mathbf{A}D}{b}$$

$$\begin{aligned} bc &= d_a(d_a + D_aD) \\ &= d_a^2 + d_a \cdot D_aD \end{aligned}$$

E pela potência do ponto D_a em relação ao círculo Γ, vem:

$$bc = d_a^2 + \mathbf{B}D_a \cdot D_a\mathbf{C} \qquad \blacksquare$$

iv) se a solução (construção) geométrica se revela difícil ou impossível, podemos sempre recorrer ao *método algébrico* para resolver nosso problema. Neste método, devemos escrever e resolver um sistema de equações não lineares para obter a solução de nosso problema. O sistema pode ser resolvido algebricamente ou numericamente e teremos oportunidade de aplicar o método em diversos problemas, a começar pelo próximo.

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.30 (ver a página 96) nos mostrará que o ponto $\mathbf{A'}$ possui duas propriedades:

i) um observador colocado em $\mathbf{A'}$ enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo α ($\mathbf{A'}$ pertence ao arco capaz—Γ—do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$);

ii) se x representa sua distância au ponto D ($\mathbf{A'}D = x$), então

$$x(x - d_a) = D\mathbf{C}^2 \tag{5.3}$$

Para provar o resultado dado pela equação (5.3), notamos que $\measuredangle \mathbf{CA'}D = \measuredangle \mathbf{C}ED = \measuredangle D'_a\mathbf{C}D$. Assim, a reta $\mathfrak{s} = (D, \mathbf{C})$ é tangente ao círculo Υ que passa pelos pontos $<\mathbf{A'}, D'_a, \mathbf{C}>$. Então, pela potência do ponto D em relação ao círculo Υ, pode-se escrever:

$$D\mathbf{A'} \cdot DD'_a = D\mathbf{C}^2 \quad \text{ou} \quad x(x - d_a) = D\mathbf{C}^2 \qquad \blacksquare$$

Resolvendo (5.3),vem:

$$x = \frac{d_a}{2} + \sqrt{D\mathbf{C}^2 + \left(\frac{d_a}{2}\right)^2}$$

O comprimento $D\mathbf{A'} = x = D\mathbf{A}$ pode ser facilmente construído e com isso termina-se a construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.30, na página 96):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir Γ (círculo circunscrito ao triângulo e arco capaz (sua “parte superior”) do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$) e obter os pontos D e E;

iii) construir o ponto P no segmento $\overline{\mathbf{C}E}$ tal que $\mathbf{C}P = \frac{d_a}{2}$ e traçar a reta $\mathfrak{r} = (D, P)$;

iv) traçar o círculo $\phi_1 = (P, P\mathbf{C})$; obter os pontos $U = \mathfrak{r} \cap \phi_1$ e $V = \mathfrak{r} \cap \phi_1$ com $DV > DU$;

v) traçar o arco $\phi_2 = (D, DV)$ e obter os pontos $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \Gamma \cap \phi_2$) e $\mathbf{A'}$ ($\mathbf{A'} = \Gamma \cap \phi_2$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (reparar que os triângulos $\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$ são congruentes, isto é, $\triangle\,\mathbf{ABC} \cong \triangle\,\mathbf{A'BC}$ e neste caso tem-se somente uma solução).

Observação: este procedimento foi reproduzido de [9], p. 81.

Terceiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.31 (ver a página 97) nos mostrará que o ponto $\mathbf{A}$ possui duas propriedades:

i) um observador colocado em $\mathbf{A}$ enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo α ($\mathbf{A}$ pertence ao arco capaz—Γ—do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$);

ii) pertence à curva $\mathfrak{C}$ dada por (5.7).

Seja D_a um ponto livre que se move sempre no interior do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ e considere tanto o círculo $\phi = (D_a, d_a)$ quanto o ponto E_a tal que $\langle D_a, E_a \rangle$ são os conjugados harmônicos do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$. Se $\phi_{\mathscr{A}}$ é o círculo que tem o segmento $\overline{D_aE_a}$ como diâmetro, então a curva $\mathfrak{C}$ definida por $\mathfrak{C} = \phi \cap \phi_{\mathscr{A}}$ representa um lugar geométrico descrito por $\mathbf{A}$.

Para provar o que acaba de ser afirmado, coloquemos o $\triangle\,\mathbf{ABC}$ num sistema de coordenadas cartesianas retangulares onde o ponto M_a é a origem e a reta $\mathfrak{a}$, a reta $y = 0$ (eixo x). Assim, as coordenadas dos pontos $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, M_a, D_a (pé da bissetriz interna) e E_a (pé da bissetriz externa) valem $\mathbf{B} = (-\frac{a}{2}, 0)$, $\mathbf{C} = (\frac{a}{2}, 0)$, $M_a = (0,0)$, $D_a = (-z, 0)$ e $E_a = (-\frac{a^2}{4z}, 0)$. Portanto, o ponto M (ponto médio do segmento $\overline{D_aE_a}$ e centro do círculo $\phi_{\mathscr{A}}$) tem por coordenadas $M = (-\frac{a^2+4z^2}{8z}, 0)$. Podemos escrever:

$$\text{círculo } \Gamma\text{:} \quad x^2 + \left(y - \frac{a}{2\tan\alpha}\right)^2 = \left(\frac{a}{2\sin\alpha}\right)^2 \tag{5.4}$$

$$\text{círculo } \phi\text{:} \quad (x+z)^2 + y^2 = d_a^2 \tag{5.5}$$

$$\text{círculo } \phi_{\mathscr{A}}\text{:} \quad \left(x + \frac{a^2+4z^2}{8z}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a^2-4z^2}{8z}\right)^2 \tag{5.6}$$

Eliminando z usando as equações (5.5) e (5.6), vem:

$$\sqrt{a^4 - 8a^2x^2 + 16x^4 + 8a^2y^2 + 32x^2y^2 + 16y^4}\Big(4x^2 - 4y^2 - a^2 + \\ + \sqrt{a^4 - 8a^2x^2 + 16x^4 + 8a^2y^2 + 32x^2y^2 + 16y^4}\Big) - 32d_a^2x^2 = 0 \quad (5.7)$$

∎

Seja $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}})$. Como $\mathbf{A} = \Gamma \cap \mathfrak{C}$ (ver a figura 5.31, na página 97), usando as equações (5.4) e (5.7) obtém-se $y_{\mathbf{A}} = h_a$ e daí $x_{\mathbf{A}}$. Podemos então construir o vértice $\mathbf{A}$, terminando assim a construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$.

Exercício 29) $<\alpha, a, d_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad (5.8)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad (5.9)$$

$$d_b = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c} \Longrightarrow \cos\tfrac{\beta}{2} = \frac{(a+c)d_b}{2ac} \quad (5.10)$$

Como $\cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1$, temos (utilizando as equações (5.10) e (5.9)):

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\Big(1 - \frac{(a+c)^2d_b^2}{2a^2c^2}\Big)$$

$$b^2 = \Big(1 - \frac{d_b^2}{ac}\Big)(a+c)^2$$

$$b = (a+c)\sqrt{1 - \frac{d_b^2}{ac}} \quad (5.11)$$

Substituímos o valor de b dado pela equação (5.11) na equação (5.8), obtendo

$$c^4 - \frac{d_b^2}{a}c^3 + \frac{d_b^2(d_b^2 - 4a^2)}{4a^2(1-\cos^2\alpha)}c^2 + \frac{d_b^4}{2a(1-\cos^2\alpha)}c + \frac{d_b^4}{4(1-\cos^2\alpha)} = 0 \quad (5.12)$$

Se $d_b \geq 2a$, devemos resolver a equação

$$c^4 - t_3c^3 + t_2c^2 + t_1c + t_0 = 0 \qquad (t_k \geq 0,\ k = 0,1,2,3)$$

Se $d_b < 2a$, devemos resolver a equação

$$c^4 - t_3c^3 - t_2c^2 + t_1c + t_0 = 0 \qquad (t_k \geq 0,\ k = 0,1,2,3)$$

Nos dois casos, a regra de Descartes (número de variações nos sinais dos coeficientes) nos diz que as equações terão 2 ou 0 raízes positivas (ver [1], [2], [4] ou [7]).

Se a equação (5.12) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Se a equação (5.12) possui duas raízes positivas, o problema terá uma (se as duas raízes são iguais) ou duas (se as duas raízes são diferentes) soluções[‡].

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $a = 5\,\text{cm}$ e $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$.

A equação (5.12) torna-se

$$c^4 - \Big(162240c^3 + 1517824c^2 - 6021120c - 15052800\Big)\frac{1}{28561} = 0 \qquad (\dagger)$$

Resolvendo (†), obtemos (com seis algarismos decimais exatos):

$$c_1 = 8\,\text{cm} \implies b_1 = 7\,\text{cm}$$
$$c_2 = 5{,}727505\,6\,\text{cm} \implies b_2 = 0{,}972106\,1\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $\langle a, b_1, c_1 \rangle$ e $\langle a, b_2, c_2 \rangle$ satisfazem todas as condições do problema.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Observação: para dar uma interpretação geométrica a estas soluções, vamos calcular o lugar geométrico do ponto D_b quando o vértice **A** percorre o círculo circunscrito Γ.

Conhecidos α e a, fixamos o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ de comprimento a considerando, por exemplo, $\mathbf{B} = (0, 0)$ e $\mathbf{C} = (a, 0)$. Então o vértice **A** estará sobre o arco capaz do ângulo α. Tal arco (que está contido em Γ) é a circunferência de equação

$$\Big(x - \frac{a}{2}\Big)^2 + \Big(y - \frac{a}{2\tan\alpha}\Big)^2 = \Big(\frac{a}{2\sin\alpha}\Big)^2$$

Considerando-se que a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, \mathbf{A})$ tem equação $y = mx$, podemos calcular as coordenadas do ponto **A**:

$$\mathbf{A} = \Big(\frac{a(1 + m\cot\alpha)}{m^2 + 1}, \frac{am(1 + m\cot\alpha)}{m^2 + 1}\Big)$$

Agora podemos calcular a equação da reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, \mathbf{A})$; e sua interseção com a reta $\mathfrak{d}_b$ (bissetriz interna do $\angle\mathbf{ABC}$) é o ponto D_b.

[‡] Os lados devem satisfazer $a < b + c$, $b < a + c$ e $c < a + b$ e os ângulos, $-1 < \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma < 1$.

Considerando que $\mathfrak{d}_b$ tem como equação $y = nx$, com $\frac{2n}{1-n^2} = m$, podemos calcular as coordenadas de D_b:

$$D_b = \left(\frac{2an\cos\alpha + a(1-n^2)\sin\alpha}{(n^2+1)(n\cos\alpha+\sin\alpha)}, \frac{2an^2\cos\alpha + an(1-n^2)\sin\alpha}{(n^2+1)(n\cos\alpha+\sin\alpha)}\right)$$

Denotando por (x, y) estas coordenadas e eliminando n tem-se que D_b pertence à curva

$$y(x^2 - 2ax + y^2)\cos\alpha + (x^3 - ax^2 + y^2x + ay^2)\sin\alpha = 0 \qquad (5.13)$$

As interseções (pontos D_b e D_b') do círculo (ϕ) $x^2 + y^2 = d_b^2$ com a curva (5.13) (ramo em violeta) resolvem o problema $<\alpha, a, d_b>$ (ver a figura 5.32, na página 98).

O problema $<\alpha, a, e_b>$ (exercício 34) pode ser resolvido da mesma maneira. Neste caso, estamos interessados no lugar geométrico do ponto E_b quando o vértice **A** percorre o círculo circunscrito Γ.

Então a equação da reta $\mathfrak{e}_b$ (bissetriz externa do $\angle$**ABC**) é dada por $y = px$, com $p = -1/n$. Isto leva a $\frac{2p}{1-p^2} = m$ e daí ao mesmo resultado, ou seja, E_b percorre outro ramo (em verde) da mesma curva dada por (5.13).

Finalmente, o ramo em azul é o lugar geométrico de D_b quando o vértice **A** percorre a parte "inferior" do arco capaz.

A figura 5.33, na página 99, ilustra o que acaba de ser dito e dá mais detalhes sobre a curva definida por (5.13).

Exercício 30) $<\alpha, b, d_a>$

Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle$ **AC**D_a. Conhecemos **AC** $= b$, **A**$D_a = d_a$ e uma análise da figura 5.34 (ver a página 100) nos mostrará que $\measuredangle$**CA**$D_a = \alpha/2$.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.34, na página 100):

i) construir o ângulo α de vértice **A**, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) construir a bissetriz interna do ângulo α (reta $\mathfrak{d}_a$);

iii) traçar o círculo $\phi_1 = (\mathbf{A}, b)$ e obter o ponto **C** ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi_1$);

iv) traçar o círculo $\phi_2 = (\mathbf{A}, d_a)$ e obter o ponto D_a ($D_a = \mathfrak{d}_a \cap \phi_2$);

v) traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, D_a)$ e obter o ponto **B** ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 31) $<\alpha, b, d_b>$

Método algébrico

Com os resultados dos teoremas 2.2 e 2.4 vistos em [5], podemos escrever $ac = d_b^2 + \frac{acb^2}{(a+c)^2}$. Tem-se o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Longrightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} \tag{5.14}$$

$$ac = d_b^2 + \frac{acb^2}{(a+c)^2} \tag{5.15}$$

Com o valor de a dado por (5.14) vamos em (5.15), obtendo

$$\begin{aligned} c^6 - 2b\cos\alpha c^5 + \frac{b^2 - b^2\cos^2\alpha - d_b^2}{1-\cos^2\alpha}c^4 + \frac{2bd_b^2\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c^3 + \\ + \frac{d_b^2(d_b^2\cos^2\alpha - b^2)}{1-\cos^2\alpha}c^2 - \frac{bd_b^4\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c + \frac{b^2d_b^4}{4(1-\cos^2\alpha)} = 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Se a equação (5.16) não tem raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $b = 7\,\text{cm}$ e $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm. A equação (5.16) torna-se

$$\begin{aligned} c^6 - 11c^5 + \Big(-720447c^4 + 23319296c^3 - 66705664c^2 + \\ - 331161600c + 737587200\Big)\frac{1}{28561} = 0 \end{aligned} \tag{‡}$$

Resolvendo (‡) com algum programa, obtemos duas raízes complexas, duas raízes negativas e duas raízes positivas as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$c_1 = 8\,\text{cm} \implies a_1 = 5\,\text{cm}$$
$$c_2 = 1{,}9318695\,\text{cm} \implies a_2 = 5{,}6108426\,\text{cm}$$

Verificação: o sistema que foi resolvido não levou em conta a restrição $-1 < \cos\beta < 1$. Sabemos que $\cos\beta = \frac{(a+c)^2 d_b^2}{2a^2c^2} - 1$. Logo,

$$\cos\beta_1 = \frac{(5+8)^2(40\sqrt{3}/13)^2}{2(5\cdot 8)^2} - 1 = \frac{1}{2} \qquad \checkmark$$

$$\cos\beta_2 = \frac{(a_2+c_2)^2(40\sqrt{3}/13)^2}{2a_2^2c_2^2} - 1 \approx 5{,}9 \qquad \text{: solução estranha.}$$

Exercício 32) $<\alpha, b, d_c>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{AC}D_c$. Conhecemos (ver a figura 5.35, na página 101) $\measuredangle\mathbf{CA}D_c = \alpha$, $\mathbf{AC} = b$ e $\mathbf{C}D_c = d_c$.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.35, na página 101):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) traçar o círculo $\phi_1 = (\mathbf{A}, b)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi_1$);

iii) traçar o círculo $\phi_2 = (\mathbf{C}, d_c)$ e obter o ponto D_c ($D_c = \mathfrak{c} \cap \phi_2$);

iv) como $\measuredangle\mathbf{AC}D_c = \gamma/2$ ($\mathfrak{d}_c = (\mathbf{C}, D_c)$ é a bissetriz interna do ângulo γ), construir o ângulo γ (retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a}$) e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{AB'C}$) soluções.

Observação: dada uma reta $\mathfrak{r}$, diz-se que o ponto $\mathcal{P}'$ é simétrico do ponto $\mathcal{P}$ em relação à $\mathfrak{r}$ quando $\mathfrak{r}$ é *mediatriz* de $\overline{\mathcal{P}\mathcal{P}'}$. Se $\mathcal{P} \in \mathfrak{r}$, então o seu simétrico em relação à $\mathfrak{r}$ é ele próprio.

A *reflexão* em torno da reta $\mathfrak{r}$ (também chamada de simetria em relação à $\mathfrak{r}$) é a transformação geométrica $S_\mathfrak{r}$ que faz corresponder a cada ponto $\mathcal{P}$ do plano o ponto $\mathcal{P}' = \mathcal{S}_\mathfrak{r}(\mathcal{P})$, simétrico de $\mathcal{P}$ em relação à $\mathfrak{r}$.

Sabendo disso, deve-se reparar que a reta $\mathfrak{a}$ é a reflexão da reta $\mathfrak{b}$ em torno da reta $\mathfrak{d}_c$ e com isso sua construção é facilmente efetuada (ver a figura 5.35, na página 101).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.36 (ver a página 102) nos mostrará que o ponto $\mathbf{A}$ possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{C}$ vale b;

ii) um observador colocado em $\mathbf{A}$ enxerga o segmento $\overline{D_c\mathbf{C}}$ segundo um ângulo α ($\mathbf{A}$ pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo α sobre o segmento $\overline{D_c\mathbf{C}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.36, na página 102):

i) numa reta $\mathfrak{d}_c$ qualquer colocar os pontos D_c e $\mathbf{C}$ tais que $D_c\mathbf{C} = d_c$;

ii) construir ϕ_1;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{C}, b)$ e obter os pontos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A'}$ ($\mathbf{A}, \mathbf{A'} = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar as retas $\mathfrak{c} = (\mathbf{A}, D_c)$ e $\mathfrak{c}' = (\mathbf{A'}, D_c)$ e obter os pontos $P_1 = \mathfrak{c} \cap \phi_2$ e $P_2 = \mathfrak{c}' \cap \phi_2$. Os pontos P_1 e P_2 são os simétricos de $\mathbf{A'}$ e $\mathbf{A}$, respectivamente, em relação à reta $\mathfrak{d}_c$ (ver o teorema 4.1);

v) traçar as retas $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, P_2)$ e $\mathfrak{a}' = (\mathbf{C}, P_1)$ e obter os pontos $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$ e $\mathbf{B'} = \mathfrak{c}' \cap \mathfrak{a}'$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'B'C}$) soluções.

Teorema 4.1: sejam um círculo ϕ_1 com uma corda $\overline{UV}$ e ϕ_2 o círculo com centro em V tal que ϕ_1 e ϕ_2 se intersectam em dois pontos P e Q. Se os pontos M e N são as interseções das retas $\mathfrak{r} = (P, U)$ e $\mathfrak{s} = (Q, U)$ com o círculo ϕ_2, ou seja, $M = \mathfrak{r} \cap \phi_2$ e $N = \mathfrak{s} \cap \phi_2$, então M e N são os simétricos de Q e P, respectivamente, em relação à reta $\mathfrak{d} = (U, V)$.

Demonstração: sejam ϕ_1 e ϕ_2 os círculos da figura 5.37 (ver a página 103). Se $\theta = \measuredangle PUV$, então $\measuredangle QUV = 180° - \theta$ e $\measuredangle QUT = \theta$. Daí, a reta $\mathfrak{d}$ é uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{s}$. Seja Q' o simétrico de $Q \in \mathfrak{s}$ em relação à reta $\mathfrak{d}$. Então $Q' \in \mathfrak{r}$ e $Q' \in \phi_2$, pois $\mathfrak{d}$ é um diâmetro de ϕ_2. Logo, Q' é a segunda interseção de $\mathfrak{r}$ com ϕ_2, ou seja, $Q' \equiv M$. Do mesmo modo, N é o simétrico de P em relação à reta $\mathfrak{d}$. ∎

Observação: pode-se ter também $\measuredangle PUV = \measuredangle QUV$ (ver a figura 5.42, na página 108). Mas neste caso o resultado permanece válido e a demonstração é feita da mesma maneira, como pode ser facilmente verificado.

Exercício 33) $<\alpha, a, e_a>$

Primeiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.38 (ver a página 104) nos mostrará que o ponto $\mathbf{A}$ possui duas propriedades:

i) um observador colocado em $\mathbf{A}$ enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo α ($\mathbf{A}$ pertence ao arco capaz—Γ—do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$);

ii) se x representa sua distância au ponto E ($\mathbf{A}E = x$), então

$$x(x + e_a) = E\mathbf{C}^2 \tag{5.18}$$

Para provar o resultado dado pela equação (5.18), notamos que $\triangle\,\mathbf{AB}E \sim \triangle\,\mathbf{B}EE_a$ $\big[\angle E$ é comum aos dois triângulos e $\measuredangle\mathbf{AB}E = \measuredangle\mathbf{B}E_aE$ pois

$$\measuredangle\mathbf{B}E_aE = \frac{\widehat{\mathbf{C}E}}{2} - \frac{\widehat{\mathbf{BA}}}{2} = \frac{\widehat{\mathbf{B}E}}{2} - \frac{\widehat{\mathbf{BA}}}{2} = \frac{\widehat{\mathbf{BA}} + \widehat{\mathbf{A}E}}{2} - \frac{\widehat{\mathbf{BA}}}{2} = \frac{\widehat{\mathbf{A}E}}{2}$$

e $\measuredangle\mathbf{AB}E = \widehat{\mathbf{A}E}/2$. Ou, de outra maneira, notar também que $\measuredangle\mathbf{B}E_a\mathbf{A} = (\beta-\gamma)/2$, de acordo com o corolário 2.6 em [5], $2\beta = \widehat{\mathbf{A}E} + \widehat{E\mathbf{C}}$ e $2\gamma = \widehat{E\mathbf{B}} - \widehat{E\mathbf{A}}$. Como $\widehat{E\mathbf{B}} = \widehat{E\mathbf{C}}$ e $\widehat{\mathbf{A}E} = \widehat{E\mathbf{A}}$, obtemos $\widehat{\mathbf{A}E} = \beta - \gamma$ e $\measuredangle\mathbf{AB}E = \widehat{\mathbf{A}E}/2 = (\beta-\gamma)/2\big]$. Logo, podemos escrever:

$$\frac{\mathbf{B}E}{\mathbf{A}E} = \frac{E_aE}{\mathbf{B}E} \tag{5.19}$$

Mas $E_aE = \mathbf{A}E + \mathbf{A}E_a$ e assim (5.19) torna-se

$$\frac{\mathbf{B}E}{x} = \frac{x + e_a}{\mathbf{B}E} \Longrightarrow x(x + e_a) = E\mathbf{B}^2 \quad \text{ou} \quad x(x + e_a) = E\mathbf{C}^2 \qquad \blacksquare$$

O comprimento $\mathbf{A}E = x = E\mathbf{A}$ pode ser facilmente construído e com isso termina-se a construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$.

Para construir x, usamos o conceito de potência de um ponto em relação a um círculo. Se ϕ_1 é o círculo tangente à reta $\mathfrak{s} = (E, \mathbf{C})$ no ponto $\mathbf{C}$ com raio $e_a/2$ (ver a figura 5.38, na página 104), tem-se:

$$E\mathbf{C}^2 = EU \cdot EV$$

Mas $EV = EU + UV$ e $\overline{UV}$ é um diâmetro. Logo, $UV = e_a$. Assim,

$$E\mathbf{C}^2 = EU(EU + e_a)$$

Portanto,

$$EU = x$$

Daí a construção que segue (ver a figura 5.38, na página 104):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir Γ (círculo circunscrito ao triângulo e arco capaz (sua "parte superior") do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$) e obter o ponto E;

iii) construir o círculo ϕ_1 e obter o ponto U ($U = (E, \mathfrak{O}) \cap \phi_1$);

iv) traçar o arco $\phi_2 = (E, EU)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \Gamma \cap \phi_2$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (reparar que os triângulos $\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$ são congruentes, isto é, $\triangle\,\mathbf{ABC} \cong \triangle\,\mathbf{A'BC}$ e neste caso tem-se somente uma solução).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.39 (ver a página 105) nos mostrará que o ponto $\mathbf{A}$ possui duas propriedades:

i) um observador colocado em $\mathbf{A}$ enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo α ($\mathbf{A}$ pertence ao arco capaz—Γ—do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$);

ii) se x representa sua distância au ponto E ($\mathbf{A}E = x$), então

$$x(x + e_a) = E\mathbf{C}^2 \tag{5.20}$$

Para provar o resultado dado pela equação (5.20), notamos que $\measuredangle \mathbf{CA}E = \measuredangle \mathbf{C}DE = \measuredangle \mathbf{BC}E = \measuredangle E_a\mathbf{C}E$. Assim, a reta $\mathfrak{s} = (E, \mathbf{C})$ é tangente ao círculo Υ que passa pelos pontos $<\mathbf{A}, E_a, \mathbf{C}>$. Então, pela potência do ponto E em relação ao círculo Υ, pode-se escrever:

$$E\mathbf{A} \cdot EE_a = E\mathbf{C}^2 \quad \text{ou} \quad x(x + e_a) = E\mathbf{C}^2 \qquad \blacksquare$$

Resolvendo (5.20),vem:

$$x = \sqrt{E\mathbf{C}^2 + \left(\frac{e_a}{2}\right)^2} - \frac{e_a}{2}$$

O comprimento $x = E\mathbf{A}$ pode ser facilmente construído e com isso termina-se a construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.39, na página 105):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir Γ (círculo circunscrito ao triângulo e arco capaz (sua “parte superior”) do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$) e obter os pontos D e E;

iii) construir o ponto P no segmento $\overline{\mathbf{C}D}$ tal que $\mathbf{C}P = \frac{e_a}{2}$ e traçar a reta $\mathfrak{r} = (E, P)$;

iv) traçar o círculo $\phi_1 = (P, P\mathbf{C})$; obter os pontos $U = \mathfrak{r} \cap \phi_1$ e $V = \mathfrak{r} \cap \phi_1$ com $EV > EU$;

v) traçar o arco $\phi_2 = (E, EU)$ e obter os pontos $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \Gamma \cap \phi_2$) e $\mathbf{A'}$ ($\mathbf{A'} = \Gamma \cap \phi_2$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (reparar que os triângulos $\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$ são congruentes, isto é, $\triangle\,\mathbf{ABC} \cong \triangle\,\mathbf{A'BC}$ e neste caso tem-se somente uma solução).

Exercício 34) $\langle \alpha, a, e_b \rangle$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ e_b^2 &= \frac{4a^2c^2\sin^2\frac{\beta}{2}}{(a-c)^2} \Longrightarrow \sin^2\tfrac{\beta}{2} = \left[\frac{(a-c)e_b}{2ac}\right]^2 \end{aligned}$$

Sabemos que $\cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1$ e que $\sin^2\frac{\beta}{2} = 1 - \cos^2\frac{\beta}{2}$. Obtemos

$$b = \sqrt{(a-c)^2 + \frac{[(a-c)e_b]^2}{ac}}$$

e

$$c^4 + \frac{e_b^2}{a}c^3 + \frac{e_b^2(e_b^2 - 4a^2)}{4a^2(1-\cos^2\alpha)}c^2 - \frac{e_b^4}{2a(1-\cos^2\alpha)}c + \frac{e_b^4}{4(1-\cos^2\alpha)} = 0 \qquad (5.21)$$

Se $e_b \geq 2a$, devemos resolver a equação

$$c^4 + t_3c^3 + t_2c^2 - t_1c + t_0 = 0 \qquad (t_k \geq 0,\ k = 0,1,2,3)$$

Se $e_b < 2a$, devemos resolver a equação

$$c^4 + t_3c^3 - t_2c^2 - t_1c + t_0 = 0 \qquad (t_k \geq 0,\ k = 0,1,2,3)$$

Nos dois casos, a regra de Descartes (número de variações nos sinais dos coeficientes) nos diz que as equações terão 2 ou 0 raízes positivas (ver [1], [2], [4] ou [7]).

Se a equação (5.21) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Se a equação (5.21) possui duas raízes positivas, o problema terá uma (se as duas raízes são iguais) ou duas (se as duas raízes são diferentes) soluções.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $a = 5\,\text{cm}$ e $e_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$.

A equação (5.21) torna-se

$$c^4 + \Big(8640c^3 + 87808c^2 - 2007040c + 5017600\Big)\frac{1}{243} = 0 \qquad (\ddagger)$$

Resolvendo (‡) com algum programa, obtemos (com seis algarismos decimais exatos):

$$c_1 = 3{,}032692\,2\,\text{cm} \implies b_1 = 7{,}017552\,3\,\text{cm}$$
$$c_2 = 8\,\text{cm} \implies b_2 = 7\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $<a, b_1, c_1>$ e $<a, b_2, c_2>$ satisfazem todas as condições do problema.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Observação: para uma interpretação geométrica destas soluções, ver a figura 5.32, na página 98, bem como a discussão ao final da solução do exercício 29.

Exercício 35) $<\alpha, b, e_a>$

Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{AC}E_a$. Conhecemos (ver a figura 5.40, na página 106) $\mathbf{AC} = b$, $\mathbf{A}E_a = e_a$ e a figura 5.40 nos mostra que $\mathbf{C} \in \mathfrak{b}$ e $E_a \in \mathfrak{e}_a$.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.40, na página 106):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) construir a bissetriz externa do ângulo α (reta $\mathfrak{e}_a$);

iii) traçar o círculo $\phi_1 = (\mathbf{A}, b)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi_1$);

iv) traçar o círculo $\phi_2 = (\mathbf{A}, e_a)$ e obter o ponto E_a ($E_a = \mathfrak{c}_a \cap \phi_2$);

v) traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, E_a)$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{AB'C}$) soluções.

Exercício 36) $<\alpha, b, e_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ e_b^2 &= \frac{4a^2c^2\sin^2\frac{\beta}{2}}{(a-c)^2} \Longrightarrow \sin^2\tfrac{\beta}{2} = \left[\frac{(a-c)e_b}{ac}\right]^2 \end{aligned}$$

Sabemos que $\cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1$ e que $\sin^2\frac{\beta}{2} = 1 - \cos^2\frac{\beta}{2}$. Obtemos

$$b^2 = (a-c)^2 + \frac{[(a-c)e_b]^2}{ac}$$

Em seguida, com $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$, obtemos

$$c^6 - 2b\cos\alpha c^5 + \frac{b^2 - b^2\cos^2\alpha - e_b^2}{1-\cos^2\alpha}c^4 + \frac{2be_b^2\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c^3 + \\ + \frac{e_b^2(e_b^2\cos^2\alpha - b^2)}{1-\cos^2\alpha}c^2 - \frac{be_b^4\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c + \frac{b^2e_b^4}{4(1-\cos^2\alpha)} = 0 \qquad (5.23)$$

Se a equação (5.23) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $b = 7\,\text{cm}$ e $e_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$.

A equação (5.23) torna-se

$$c^6 - 11c^5 + \Big(-100989c^4 + 1241856c^3 + 6858496c^2 + \\ - 110387200c + 245862400\Big)\frac{1}{243} = 0 \qquad (\ddagger)$$

Resolvendo (‡) com algum programa, obtemos (com seis algarismos decimais exatos):

$$\begin{aligned} c_1 &= 3{,}027761\,0\,\text{cm} &\Longrightarrow a_1 &= 4{,}986177\,4\,\text{cm} \\ c_2 &= 8\,\text{cm} &\Longrightarrow a_2 &= 5\,\text{cm} \\ c_3 &= 12{,}811892\,7\,\text{cm} &\Longrightarrow a_3 &= 8{,}497868\,9\,\text{cm} \\ c_4 &= 16{,}300899\,1\,\text{cm} &\Longrightarrow a_4 &= 11{,}636555\,4\,\text{cm} \end{aligned}$$

Verificação: no processo de resolução do sistema pode-se ter introduzido soluções estranhas. Devemos sempre verificar se as raízes formam realmente um triângulo e que além disso o triângulo obtido satisfaz as condições do problema.

Os lados a_k, $k = 1, 2, 3, 4$ foram calculados segundo a fórmula

$$a_k = \sqrt{b^2 + c_k^2 - 2bc_k \cos\alpha}$$

onde $b = 7$ e $\cos\alpha = 11/14$. Portanto, os triângulos cujos lados valem a_k, $b = 7$ e c_k satisfazem duas condições do problema. Resta saber se $e_{b_k} \approx 40/3 = 13{,}3333333\ldots$ $k = 1, 2, 3, 4$. Utilizando a fórmula

$$e_b = \frac{2}{|a - c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}$$

obtemos:

$$e_{b_1} = e_{b_2} = e_{b_3} = 13{,}333333 \qquad \checkmark$$
$$e_{b_4} = 15{,}412109 \qquad : \text{solução estranha.}$$

Logo, podemos "construir" três triângulos que satisfazem as condições do problema.

Exercício 37) $<\alpha, b, e_c>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\, \mathbf{AC}E_c$. Uma análise da figura 5.41 (ver a página 107) nos mostrará que o ponto **B** possui duas propriedades:

i) pertence à reta $\mathfrak{c}$;

ii) pertence à reta $\mathfrak{a}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.41, na página 107):

i) construir o ângulo α de vértice **A**, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) traçar o círculo $\phi_1 = (\mathbf{A}, b)$ e obter o ponto **C** ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi_1$);

iii) traçar o círculo $\phi_2 = (\mathbf{C}, e_c)$ e obter o ponto E_c ($E_c = \mathfrak{c} \cap \phi_2$);

iv) construir a reta $\mathfrak{a} = (\mathrm{A}', \mathbf{C})$, reflexão da reta $\mathfrak{b}$ em torno da reta $\mathfrak{e}_c = (\mathbf{C}, E_c)$; obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{AB'C}$) soluções.

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.42 (ver a página 108) nos mostrará que o ponto $\mathbf{A}$ possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{C}$ vale b;

ii) um observador colocado em $\mathbf{A}$ enxerga o segmento $\overline{E_c\mathbf{C}}$ segundo um ângulo α ou $180° - \alpha$ ($\mathbf{A}$ pertence ao arco capaz — ϕ_1 — do ângulo α ou $180° - \alpha$ sobre o segmento $\overline{E_c\mathbf{C}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.42, na página 108):

i) numa reta $\mathfrak{e}_c$ qualquer colocar os pontos E_c e $\mathbf{C}$ tais que $E_c\mathbf{C} = e_c$;

ii) construir ϕ_1;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{C}, b)$ e obter os pontos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ ($\mathbf{A}, \mathbf{A}' = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar as retas $\mathfrak{c} = (\mathbf{A}, E_c)$ e $\mathfrak{c}' = (\mathbf{A}', E_c)$ e obter os pontos $P_1 = \mathfrak{c} \cap \phi_2$ e $P_2 = \mathfrak{c}' \cap \phi_2$. Os pontos P_1 e P_2 são os simétricos de $\mathbf{A}'$ e $\mathbf{A}$, respectivamente, em relação à reta $\mathfrak{e}_c$ (ver o teorema 4.1, na página 43)

v) traçar as retas $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, P_2)$ e $\mathfrak{a}' = (\mathbf{C}, P_1)$ e obter os pontos $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$ e $\mathbf{B}' = \mathfrak{c}' \cap \mathfrak{a}'$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'B'C}$) soluções.

Exercício 38) $<\alpha, a, R>$

Datum

Como $a = 2R\sin\alpha$ (ver as figuras 5.2 e 5.7, nas páginas 68 e 73, respectivamente), $<\alpha, a, R>$ formam um datum. Logo, o problema é impossível ou indeterminado.

Observação: o comentário feito no exercício 21 pode ser aplicado aqui: a figura 5.2 mostra que o $\triangle\,\mathbf{BC}O$ (triângulo isósceles) fica determinado dados dois quaisquer dos elementos $<\alpha, a, R>$. Logo, dados α e a, R fica determinado; dados α e R, a fica determinado. Entretanto, dados a e R, α não fica determinado pois $\sin\alpha = a/2R$ e o ângulo no vértice $\mathbf{A}$ pode assumir dois valores: α e $180° - \alpha$ (ver também todos os exercícios onde a e R são dados).

Exercício 39) $<\alpha, b, R>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, R, a>$ formam um datum (ver o exercício 38), conhecemos $<\alpha, a, b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 16).

Observação: para construir a, ver as figuras 5.2 e 5.7, nas páginas 68 e 73, respectivamente.

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{AC}O$ e o círculo Γ. Uma análise da figura 5.43 (ver a página 109) nos mostrará que o ponto O possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{A}$ vale R;

ii) pertence à mediatriz (reta $\mathfrak{u}$) do segmento $\overline{\mathbf{AC}}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.43, na página 109):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) traçar o círculo $\phi_1 = (\mathbf{A}, b)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b}\cap\phi_1$). Construir a reta $\mathfrak{u}$;

iii) traçar o círculo $\phi_2 = (\mathbf{A}, R)$ e obter o ponto O ($O = \mathfrak{u}\cap\phi_2$);

iv) traçar o círculo $\Gamma = (O, O\mathbf{A})$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c}\cap\Gamma$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{AB'C}$) soluções.

Exercício 40) $<\alpha, a, r>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Uma análise da figura 5.44 (ver a página 110) nos mostrará que podemos construir o $\triangle\,\mathbf{A}IY$ pois $\measuredangle\mathbf{A}YI = 90°$, $\measuredangle I\mathbf{A}Y = \alpha/2$ e $IY = r$. Portanto, $\mathbf{A}Y = p - a = \ell$ é conhecido. Logo, $a + \ell = p$ é conhecido. E como $ah_a = 2pr$, podemos construir h_a. Conhecemos então $<\alpha, a, h_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 18).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.44 (ver a página 110) nos mostrará que o ponto I possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale r;

ii) pertence ao arco capaz (ϕ) do ângulo $90° + \frac{\alpha}{2}$ sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$.

Para provar o resultado dado por ii), notamos que

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Longrightarrow \frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

No triângulo $\triangle\,\mathbf{BC}I$, temos $\measuredangle I\mathbf{BC} = \frac{\beta}{2}$ e $\measuredangle I\mathbf{CB} = \frac{\gamma}{2}$. Logo:

$$\measuredangle\mathbf{B}I\mathbf{C} = 180° - \frac{\beta+\gamma}{2} \Longrightarrow \measuredangle\mathbf{B}I\mathbf{C} = 90° + \frac{\alpha}{2} \qquad \blacksquare$$

Daí a construção que segue (ver a figura 5.44, na página 110):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o arco ϕ;

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando r desta; obter o ponto I ($I = \mathfrak{a}' \cap \phi$), centro do círculo inscrito γ_i, e o ponto de tangência (X) deste círculo com o lado $\overline{\mathbf{BC}}$ ($\overline{IX} \perp \overline{\mathbf{BC}}$). Traçar o círculo $\gamma_i = (I, IX)$;

iv) obter os pontos de tangência Y e Z ($Y \in \gamma_i$ e $\mathbf{C}Y = \mathbf{C}X$; $Z \in \gamma_i$ e $\mathbf{B}Z = \mathbf{B}X$);

v) se $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, Z)$ é a reta definida pelos pontos $\mathbf{B}$ e Z e $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, Y)$ é aquela definida pelos pontos $\mathbf{C}$ e Y, então $\mathbf{A} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (notar que o triângulo que seria gerado por I' é congruente ao triângulo $\triangle\mathbf{ABC}$).

Observação: reparar que o centro do círculo ϕ é o ponto D e com isso temos mais uma maneira para resolver este problema (ver o exercício 215).

Exercício 41) $<\alpha, b, r>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.45 (ver a página 111) nos mostrará que o ponto I possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{b}$ vale r;

ii) pertence à bissetriz interna (reta $\mathfrak{d}_a$) do ângulo α.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.45, na página 111):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) traçar o círculo $\phi = (\mathbf{A}, b)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi$). Construir a reta $\mathfrak{d}_a$;

iii) traçar a reta $\mathfrak{b}'$ paralela à reta $\mathfrak{b}$ e distando r desta; obter o ponto I ($I = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{d}_a$), centro do círculo inscrito γ_i, e o ponto de tangência (Y) deste círculo com o lado $\overline{\mathbf{AC}}$ ($\overline{IY} \perp \overline{\mathbf{AC}}$). Traçar o círculo $\gamma_i = (I, IY)$;

iv) obter o ponto de tangência X ($X \in \gamma_i$ e $\mathbf{C}X = \mathbf{C}Y$);

v) se $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, X)$ é a reta definida pelos pontos $\mathbf{C}$ e X, então $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 42) $<\alpha, a, r_a>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Uma análise da figura 5.46 (ver a página 112) nos mostrará que podemos construir o $\triangle \mathbf{A} I_a Y_a$ pois $\measuredangle \mathbf{A} Y_a I_a = 90°$, $\measuredangle I_a \mathbf{A} Y_a = \alpha/2$ e $I_a Y_a = r_a$. Portanto, $\mathbf{A} Y_a = p$ é conhecido. Logo, $p - a = \ell$ é conhecido. E como $a h_a = 2\ell r_a$, podemos construir h_a. Conhecemos então $<\alpha, a, h_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 18).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.46 (ver a página 112) nos mostrará que o ponto I_a possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale r_a;

ii) pertence ao arco capaz (ϕ) do ângulo $90° - \frac{\alpha}{2}$ sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$.

Para provar o resultado dado por ii), notamos que

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Longrightarrow \frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

No triângulo $\triangle \mathbf{BC} I_a$, temos $\measuredangle I_a \mathbf{BC} = 90° - \frac{\beta}{2}$ e $\measuredangle I_a \mathbf{CB} = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Logo:

$$\measuredangle \mathbf{B} I_a \mathbf{C} = 180° - \measuredangle I_a \mathbf{BC} - \measuredangle I_a \mathbf{CB} \Longrightarrow \measuredangle \mathbf{B} I_a \mathbf{C} = 90° - \frac{\alpha}{2} \qquad \blacksquare$$

Daí a construção que segue (ver a figura 5.46, na página 112):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$. Construir ϕ;

ii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando r_a desta; obter o ponto I_a ($I_a = \mathfrak{a}' \cap \phi$), centro do círculo exinscrito γ_a, e o ponto de tangência (X_a) deste círculo com o lado $\overline{\mathbf{BC}}$ ($\overline{I_a X_a} \perp \overline{\mathbf{BC}}$). Traçar o círculo $\gamma_a = (I_a, I_a X_a)$;

iii) obter os pontos de tangência Y_a e Z_a ($Y_a \in \gamma_a$ e $\mathbf{C} Y_a = \mathbf{C} X_a$; $Z_a \in \gamma_a$ e $\mathbf{B} Z_a = \mathbf{B} X_a$);

iv) se $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, Z_a)$ é a reta definida pelos pontos $\mathbf{B}$ e Z_a e $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, Y_a)$ é aquela definida pelos pontos $\mathbf{C}$ e Y_a, então $\mathbf{A} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (notar que o triângulo que seria gerado por I'_a é congruente ao triângulo $\triangle\,\mathbf{ABC}$).

Observação: reparar que o centro do círculo ϕ é o ponto D e com isso temos mais uma maneira para resolver este problema (ver o exercício 216).

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

Uma análise da figura 5.47 (ver a página 113) nos mostrará que a reta $\mathfrak{a}$ é uma tangente comum interior aos círculos γ_a e γ_i. Assim, o problema estará resolvido se pudermos construir o ponto I e o círculo γ_i.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.47, na página 113):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$; construir a reta $\mathfrak{d}_a$ (bissetriz interna que parte do vértice $\mathbf{A}$) e, servindo-se do raio r_a, coloca-se o ponto I_a na reta $\mathfrak{d}_a$; traçar a reta $\mathfrak{r}$ ($I_a \in \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{b}$) e obter o ponto Y_a ($Y_a = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{b}$);

ii) traçar o círculo exinscrito γ_a; traçar o arco $\phi = (Y_a, a)$ e obter o ponto Y ($Y = \mathfrak{b} \cap \phi$); traçar a reta $\mathfrak{r}'$ ($Y \in \mathfrak{r}'$ e $\mathfrak{r}' \parallel \mathfrak{r}$) e obter o ponto I ($I = \mathfrak{d}_a \cap \mathfrak{r}'$);

iii) traçar o círculo $\gamma_i = (I, IY)$;

iv) construir as tangentes comuns interiores aos círculos γ_a e γ_i (retas $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}'$) e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

Observação: o ponto $\mathbf{A}$ (D_a) é o centro de semelhança exterior (interior) dos círculos γ_a e γ_i. Diz-se também que $\mathbf{A}$ (D_a) é o centro de homotetia direta (inversa) de γ_a e γ_i.

Exercício 43) $<\alpha, a, r_b>$

Primeiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.48 (ver a página 114) nos mostrará que o ponto I_b possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale r_b;

ii) pertence ao arco capaz (ϕ) do ângulo $\frac{\alpha}{2}$ sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$.

Para provar o resultado dado por ii), notamos que

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \implies \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\beta+\gamma}{2}$$

No triângulo $\triangle\,\mathbf{BC}I_b$, temos $\measuredangle I_b\mathbf{BC} = \frac{\beta}{2}$ e $\measuredangle I_b\mathbf{CB} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Logo:

$$\measuredangle \mathbf{B}I_b\mathbf{C} = 180^\circ - \measuredangle I_b\mathbf{BC} - \measuredangle I_b\mathbf{CB} \implies \measuredangle \mathbf{B}I_b\mathbf{C} = \frac{\alpha}{2} \qquad \blacksquare$$

Daí a construção que segue (ver a figura 5.48, na página 114):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir ϕ;

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando r_b desta; obter o ponto I_b ($I_b = \mathfrak{a}' \cap \phi$), centro do círculo exinscrito γ_b, e o ponto de tangência (X_b) deste círculo com o lado $\overline{\mathbf{BC}}$ ($\overline{I_bX_b} \perp \overline{\mathbf{BC}}$). Traçar o círculo $\gamma_b = (I_b, I_bX_b)$;

iv) obter os pontos de tangência Y_b e Z_b ($Y_b \in \gamma_b$ e $\mathbf{C}Y_b = \mathbf{C}X_b$; $Z_b \in \gamma_b$ e $\mathbf{B}Z_b = \mathbf{B}X_b$);

v) se $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, Z_b)$ é a reta definida pelos pontos **B** e Z_b e $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, Y_b)$ é aquela definida pelos pontos **C** e Y_b, então $\mathbf{A} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Observação: reparar que o centro do círculo ϕ é o ponto E e com isso temos mais uma maneira para resolver este problema (ver o exercício 217).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Uma análise da figura 5.49 (ver a página 115) nos mostrará que a reta $\mathfrak{a}$ é uma tangente comum exterior aos círculos γ_b e γ_c. Assim, o problema estará resolvido se pudermos construir o ponto I_c e o círculo γ_c.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.49, na página 115):

i) construir o ângulo α de vértice **A**, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$; construir a reta $\mathfrak{e}_a$ (bissetriz externa que parte do vértice **A**) e, servindo-se do raio r_b, coloca-se o ponto I_b na reta $\mathfrak{e}_a$; traçar a reta $\mathfrak{r}$ ($I_b \in \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{b}$) e obter o ponto Y_b ($Y_b = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{b}$);

ii) traçar o círculo exinscrito γ_b; traçar o arco $\phi = (Y_b, a)$ e obter o ponto Y_c ($Y_c = \mathfrak{b} \cap \phi$); traçar a reta $\mathfrak{r}'$ ($Y_c \in \mathfrak{r}'$ e $\mathfrak{r}' \parallel \mathfrak{r}$) e obter o ponto I_c ($I_c = \mathfrak{e}_a \cap \mathfrak{r}'$);

iii) traçar o círculo exinscrito $\gamma_c = (I_c, I_c Y_c)$;

iv) construir as tangentes comuns exteriores aos círculos γ_b e γ_c (retas $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}'$) e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

Exercício 44) $<\alpha, b, r_a>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.50 (ver a página 116) nos mostrará que o ponto I_a possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{b}$ vale r_a;

ii) pertence à bissetriz interna (reta $\mathfrak{d}_a$) do ângulo α.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.50, na página 116):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) traçar o círculo $\phi = (\mathbf{A}, b)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi$). Construir a reta $\mathfrak{d}_a$;

iii) traçar a reta $\mathfrak{b}'$ paralela à reta $\mathfrak{b}$ e distando r_a desta; obter o ponto I_a ($I_a = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{d}_a$), centro do círculo exinscrito γ_a, e o ponto de tangência (Y_a) deste círculo com o lado $\overline{\mathbf{AC}}$ ($\overline{I_a Y_a} \perp \overline{\mathbf{AC}}$). Traçar o círculo $\gamma_a = (I_a, I_a Y_a)$;

iv) obter o ponto de tangência X_a ($X_a \in \gamma_a$ e $\mathbf{C}X_a = \mathbf{C}Y_a$);

v) se $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, X_a)$ é a reta definida pelos pontos $\mathbf{C}$ e X_a, então $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 45) $<\alpha, b, r_b>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.51 (ver a página 117) nos mostrará que o ponto I_b possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{b}$ vale r_b;

ii) pertence à bissetriz externa (reta $\mathfrak{e}_a$) do ângulo α.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.51, na página 117):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) traçar o círculo $\phi = (\mathbf{A}, b)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi$). Construir a reta $\mathfrak{e}_a$;

iii) traçar a reta $\mathfrak{b}'$ paralela à reta $\mathfrak{b}$ e distando r_b desta; obter o ponto I_b ($I_b = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{e}_a$), centro do círculo exinscrito γ_b, e o ponto de tangência (Y_b) deste círculo com o lado $\overline{\mathbf{AC}}$ ($\overline{I_b Y_b} \perp \overline{\mathbf{AC}}$). Traçar o círculo $\gamma_b = (I_b, I_b Y_b)$;

iv) obter o ponto de tangência X_b ($X_b \in \gamma_b$ e $\mathbf{C}X_b = \mathbf{C}Y_b$);

v) se $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, X_b)$ é a reta definida pelos pontos $\mathbf{C}$ e X_b, então $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 46) $<\alpha, b, r_c>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 5.52 (ver a página 118) nos mostrará que o ponto I_c possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{c}$ vale r_c;

ii) pertence à bissetriz externa (reta $\mathfrak{e}_a$) do ângulo α.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.52, na página 118):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) traçar o círculo $\phi = (\mathbf{A}, b)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi$). Construir a reta $\mathfrak{e}_a$;

iii) traçar a reta $\mathfrak{c}'$ paralela à reta $\mathfrak{c}$ e distando r_c desta; obter o ponto I_c ($I_c = \mathfrak{c}' \cap \mathfrak{e}_a$), centro do círculo exinscrito γ_c, e o ponto de tangência (Y_c) deste círculo com o lado $\overline{\mathbf{AC}}$ ($\overline{I_c Y_c} \perp \overline{\mathbf{AC}}$). Traçar o círculo $\gamma_c = (I_c, I_c Y_c)$;

iv) obter o ponto de tangência X_c ($X_c \in \gamma_c$ e $\mathbf{C}X_c = \mathbf{C}Y_c$);

v) se $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, X_c)$ é a reta definida pelos pontos $\mathbf{C}$ e X_c, então $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 47) $<\alpha, h_a, h_b>$

Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{AB}H_a$. Uma análise da figura 5.53 (ver a página 119) nos mostrará que o ponto H_a possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{A}$ vale h_a;

ii) um observador colocado em H_a enxerga o segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ segundo um ângulo reto (H_a pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{AB}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.53, na página 119):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) traçar a reta $\mathfrak{b}'$ paralela à reta $\mathfrak{b}$ e distando h_b desta; obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{c}$);

iii) construir o círculo ϕ_1 ($\overline{\mathbf{AB}}$ é um diâmetro);

iv) traçar o círculo $\phi_2 = (\mathbf{A}, h_a)$ e obter o ponto H_a ($H_a = \phi_1 \cap \phi_2$);

v) se $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, H_a)$ é a reta definida pelos pontos $\mathbf{B}$ e H_a, então $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{ABC'}$) soluções.

Exercício 48) $<\alpha, h_b, h_c>$

Método do problema já resolvido

Como $b = h_c / \sin\alpha$ e $c = h_b / \sin\alpha$ (ver a figura 5.17), conhecemos $<\alpha, b, c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 17).

Discussão: o problema é sempre possível e possui uma única solução ($0 < \alpha < 180°$).

Exercício 49) $<\alpha, h_a, m_a>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Usando o teorema 2.1 de [5], podemos mostrar que $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Como $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, então

$$4m_a^2 - a^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2) = 4bc\cos\alpha \implies a^2 + 4bc\cos\alpha - 4m_a^2 = 0 \quad (5.24)$$

Sabemos que $2S = ch_c = bc\sin\alpha = ah_a$. Logo,

$$\begin{aligned} bc\sin\alpha\cos\alpha &= ah_a\cos\alpha \\ bc\cos\alpha &= ah_a\cot\alpha \end{aligned} \quad (5.25)$$

Substituindo o valor de $bc\cos\alpha$ dado por (5.25) em (5.24), vem:

$$a^2 + 4h_a\cot\alpha\, a - 4m_a^2 = 0$$

e o lado a pode ser construído. Assim, conhecemos $<\alpha, a, h_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 18).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Seja A′ o simétrico do ponto **A** em relação ao ponto M_a, ou seja, M_a é o ponto médio do segmento $\overline{\mathbf{A}\mathrm{A}'}$. Uma análise da figura 5.54 (ver a página 120) nos mostrará que o quadrilátero $\diamondsuit\,\mathrm{A}'\mathbf{BAC}$ é um paralelogramo pois suas diagonais se intersectam nos seus pontos médios. Assim, o ponto **C** possui duas propriedades:

i) pertence à reta $\mathfrak{a}$;

ii) um observador colocado em **C** enxerga o segmento $\overline{\mathbf{A}\mathrm{A}'}$ segundo o ângulo $\theta = 180° - \alpha$ (**C** pertence ao arco capaz—ϕ—do ângulo θ sobre o segmento $\overline{\mathbf{A}\mathrm{A}'}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.54, na página 120):

i) colocar o ponto H_a numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer e construir o $\triangle H_a\mathbf{A}M_a$ ($H_a \in \mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{h}_a \perp \mathfrak{a}$; $\mathbf{A} \in \mathfrak{h}_a$ e $H_a\mathbf{A} = h_a$; $M_a \in \mathfrak{a}$ e $\mathbf{A}M_a = m_a$);

ii) traçar a reta $\mathfrak{m}_a = (\mathbf{A}, M_a)$ e obter o ponto A′;

iii) construir o arco capaz ϕ e obter o ponto **C** ($\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \phi$);

iv) obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} \in \mathfrak{a}$ e $M_a\mathbf{B} = M_a\mathbf{C}$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{A}M_aM_b$. Uma análise da figura 5.55 (ver a página 121) nos mostrará que o ponto M_b possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale $\frac{h_a}{2}$;

ii) um observador colocado em M_b enxerga o segmento $\overline{\mathbf{A}M_a}$ segundo o ângulo $\theta = 180° - \alpha$ (M_b pertence ao arco capaz—ϕ—do ângulo θ sobre o segmento $\overline{\mathbf{A}M_a}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.55, na página 121):

i) colocar o ponto H_a numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer e construir o $\triangle\,H_a\mathbf{A}M_a$ ($H_a \in \mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{h}_a \perp \mathfrak{a}$; $\mathbf{A} \in \mathfrak{h}_a$ e $H_a\mathbf{A} = h_a$; $M_a \in \mathfrak{a}$ e $\mathbf{A}M_a = m_a$);

ii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando $h_a/2$ desta;

iii) construir o arco de círculo ϕ e obter o ponto M_b ($M_b = \mathfrak{a}' \cap \phi$);

iv) se $\mathfrak{b} = (\mathbf{A}, M_b)$ é a reta definida pelos pontos $\mathbf{A}$ e M_b, então $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$;

v) obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} \in \mathfrak{a}$ e $M_a\mathbf{B} = M_a\mathbf{C}$).

Quarto procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,B_1'B_1\mathbf{C}$ e o ponto $\mathbf{A}$. Uma análise da figura 5.56 (ver a página 122) nos mostrará que $\measuredangle B_1'B_1\mathbf{C} = 90°$, $B_1B_1' = 2h_a$ e $\mathbf{C}B_1 = 2H_aM_a$; e o ponto $\mathbf{A}$ possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale h_a;

ii) um observador colocado em $\mathbf{A}$ enxerga o segmento $\overline{\mathbf{C}B_1'}$ segundo o ângulo $\theta = 180° - \alpha$ ($\mathbf{A}$ pertence ao arco capaz—ϕ—do ângulo θ sobre o segmento $\overline{\mathbf{C}B_1'}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.56, na página 122):

i) colocar o ponto $\mathbf{C}$ numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer e construir o $\triangle\,\mathbf{C}P_1P_2$ ($\measuredangle P_1\mathbf{C}P_2 = 90°$, $\mathbf{C}P_1 = h_a$ e $P_1P_2 = m_a$. Portanto, $\mathbf{C}P_2 = H_aM_a$);

ii) construir o ponto B_1 ($B_1 \in \mathfrak{a}$ e $\mathbf{C}B_1 = 2\mathbf{C}P_2$) e a reta $\mathfrak{s}$ ($B_1 \in \mathfrak{s}$ e $\mathfrak{s} \perp \mathfrak{a}$); construir o ponto B_1' ($B_1' \in \mathfrak{s}$ e $B_1B_1' = 2h_a$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando h_a desta;

iv) construir o arco de círculo ϕ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \phi$);

v) se $\mathfrak{c} = (\mathbf{A}, B_1')$ é a reta definida pelos pontos $\mathbf{A}$ e B_1', então $\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$.

Quinto procedimento – Método das figuras semelhantes

Uma análise da figura 5.57 (ver a página 123) nos mostrará que uma homotetia de centro M_a transforma o $\triangle\,\mathbf{ABC}$ no $\triangle\,\mathrm{A'B'C'}$ (um qualquer dos homotéticos do $\triangle\,\mathbf{ABC}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 5.57, na página 123):

i) colocar o ponto H_a numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer e construir o $\triangle\,\mathbf{A}H_aM_a$; obter as retas $\mathfrak{m}_a = (\mathbf{A}, M_a)$ e $\mathfrak{m}$ ($M_a \in \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{m} \perp \mathfrak{a}$);

ii) construir os pontos $\mathrm{B}' \in \mathfrak{a}$ e $\mathrm{C}' \in \mathfrak{a}$ tais que $M_a\mathrm{B}' = M_a\mathrm{C}' = \ell$ (ℓ é um comprimento arbitrário conveniente);

iii) construir o arco capaz (Γ') do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathrm{B'C'}}$ e obter os pontos $\mathrm{A}' = \mathfrak{m}_a \cap \Gamma'$ e O', centro de Γ';

iv) traçar a reta $\mathfrak{r}' = (\mathrm{A}', O')$ e construir a reta $\mathfrak{r}$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{r}'$); obter o ponto $O = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{m}$, centro do círculo ($\Gamma$) circunscrito ao $\triangle\,\mathbf{ABC}$;

v) traçar o círculo $\Gamma = (O, O\mathbf{A})$ e obter os pontos $\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$.

Observação: diz-se que o $\triangle\,\mathbf{ABC}$ é o transformado do $\triangle\,\mathrm{A'B'C'}$ pela homotetia de centro M_a e razão $k = M_a\mathbf{A}/M_a\mathrm{A}'$.

Sexto procedimento – Método da figura auxiliar

Uma análise da figura 3.1 em [5] nos mostrará que o problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\, C'C'_{a''}A'$ (figura auxiliar) e o ponto $\mathbf{B}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.58, na página 124):

i) colocar o ponto B' numa reta $\mathfrak{m}'_a$ $\mathfrak{m}'_a$ qualquer e construir o triângulo retângulo $\triangle\, C'C'_{a''}A'$ tal que $C'C'_{a''} = 2h_a$ e $C'A' = 2m_a$; traçar a reta $\mathfrak{a}'' = (C'_{a''}, A')$ e construir a reta $\mathfrak{a}$ ($B' \in \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{a}''$);

ii) construir o arco capaz (ϕ_2) do ângulo $\theta = 180° - \alpha$ sobre o segmento $\overline{C'A'}$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \phi_2$); traçar a reta $\mathfrak{b}' = (C', \mathbf{B})$;

iii) construir o ponto $\mathbf{A}$, simétrico de A' em relação a $\mathbf{B}$;

iv) construir a reta $\mathfrak{b}$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b} \parallel \mathfrak{b}'$) e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$).

Exercício 50) $<\alpha, h_a, m_b>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\, \mathcal{M}_b M_b \mathbf{B}$, onde $\mathcal{M}_b$ é a projeção do ponto M_b sobre a reta $\mathfrak{a}$. Uma análise da figura 5.59 (ver a página 125) nos mostrará que $\measuredangle \mathbf{B}\mathcal{M}_b M_b = 90°$, $\mathbf{B}M_b = m_b$ e $M_b\mathcal{M}_b = h_a/2$.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.59, na página 125):

i) colocar o ponto $\mathcal{M}_b$ numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer e construir o $\triangle\, \mathcal{M}_b M_b \mathbf{B}$ ($\mathcal{M}_b \in \mathfrak{h}'_a$ e $\mathfrak{h}'_a \perp \mathfrak{a}$; $M_b \in \mathfrak{h}'_a$ e $\mathcal{M}_b M_b = h_a/2$; $\mathbf{B} \in \mathfrak{a}$ e $M_b\mathbf{B} = m_b$);

ii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando h_a desta;

iii) construir o arco capaz — ϕ — do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{B}M_b}$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \phi$);

iv) se $\mathfrak{b} = (\mathbf{A}, M_b)$ é a reta definida pelos pontos $\mathbf{A}$ e M_b, então $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{ABC}$ e $\triangle\, \mathbf{A'BC'}$) soluções.

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Uma análise da figura 3.1 em [5] nos mostrará que o problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathrm{A}'\mathrm{A}'_a\,\mathbf{C}$ (figura auxiliar) e o ponto $\mathbf{B}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 5.60, na página 126):

i) colocar o ponto P B' numa reta $\mathfrak{m}'_b$ $\mathfrak{m}'_b$ qualquer e construir o triângulo retângulo $\triangle\,\mathrm{A}'\mathrm{A}'_a\,\mathbf{C}$ tal que $\mathrm{A}'\mathrm{A}'_a = h_a$ e $\mathrm{A}'\mathbf{C} = 2m_b$; traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathrm{A}'_a, \mathbf{C})$;

ii) construir o arco capaz (ϕ_2) do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathrm{A}'P}$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \phi_2$);

iii) construir o ponto $\mathbf{A}$, simétrico de A' em relação a $\mathbf{B}$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'B'C}$) soluções.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] S. Borofsky. *Elementary Theory of Equations.* The Macmillan Company, 1961.

[2] F. Cajori. *An Introduction to the Theory of Equations.* Dover, 1969.

[3] H. G. Calfa and L. A. de Almeida e R. C. Barbosa. *Desenho Geométrico Plano*, volume 2, Tomo I of *Coleção Marechal Trompowski.* Biblioteca do Exército Editora, 1995.

[4] L. E. Dickson. *New First Course in the Theory of Equations.* John Wiley & Sons, 1947.

[5] L. Lopes. *Manual de Construção de Triângulos*, volume 1. A ser publicado, Rio de Janeiro, 2015.

[6] A. C. de O. Morgado and E. Wagner e M. Jorge. *Geometria II.* Editora Francisco Alves, Rio de Janeiro, 1973.

[7] J. V. Uspensky. *Theory of Equations.* McGraw-Hill, 1948.

[8] E. Wagner. *Construções Geométricas.* Coleção do Professor de Matemática. IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1993.

[9] P. Yiu. Elegant geometric constructions. http://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200512.pdf, 2005. Último acesso: março de 2010.

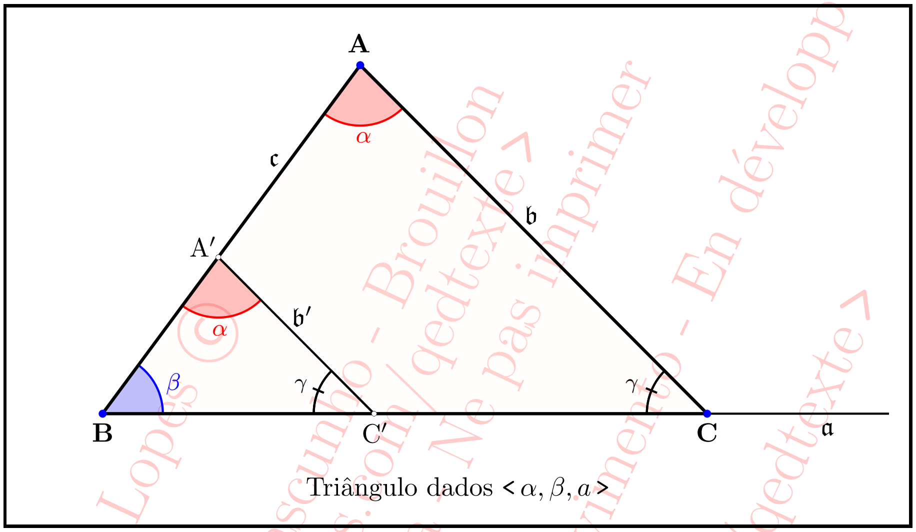


Figura 5.1: Exercício 2 — Primeiro procedimento.

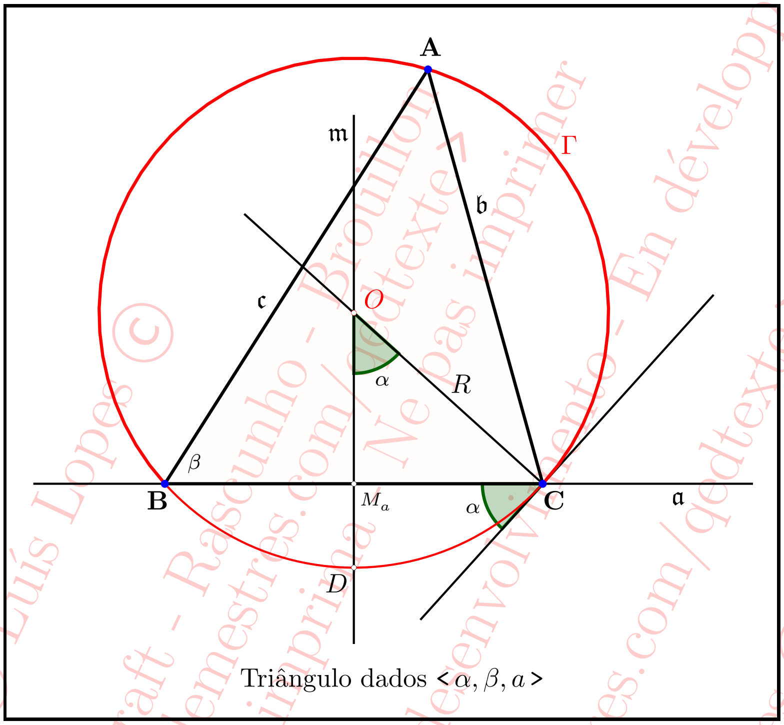


Figura 5.2: Exercício 2 — Segundo procedimento.

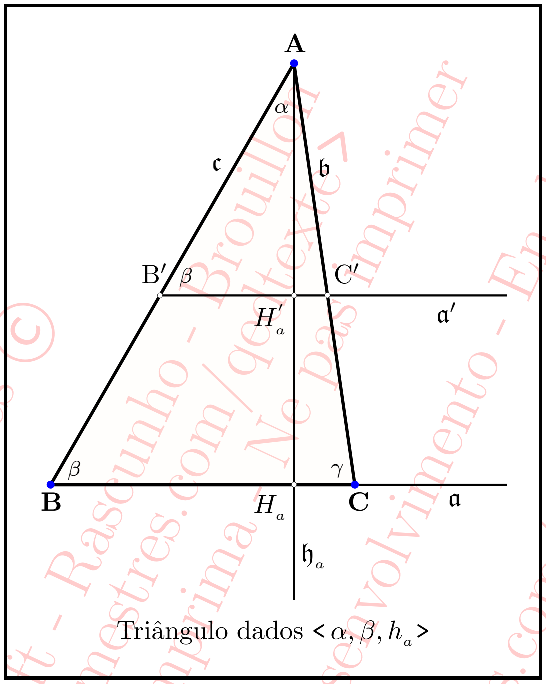
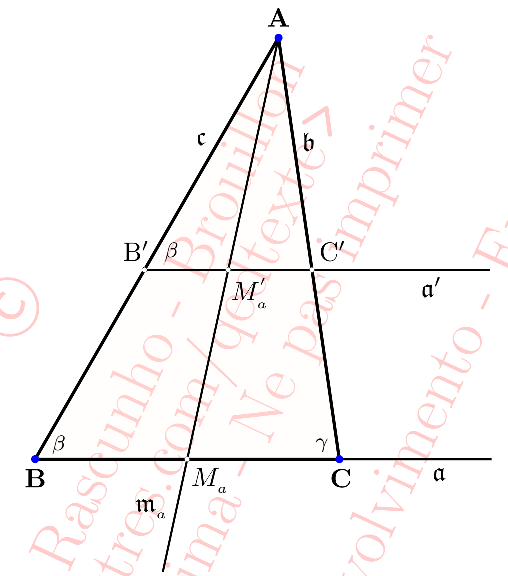


Figura 5.3: Exercício 4.



Triângulo dados < α, β, m_a >

Figura 5.4: Exercício 6.

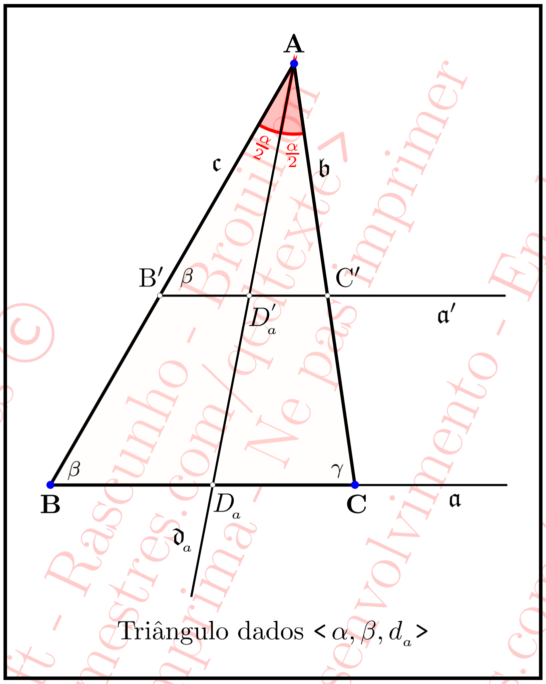


Figura 5.5: Exercício 8.

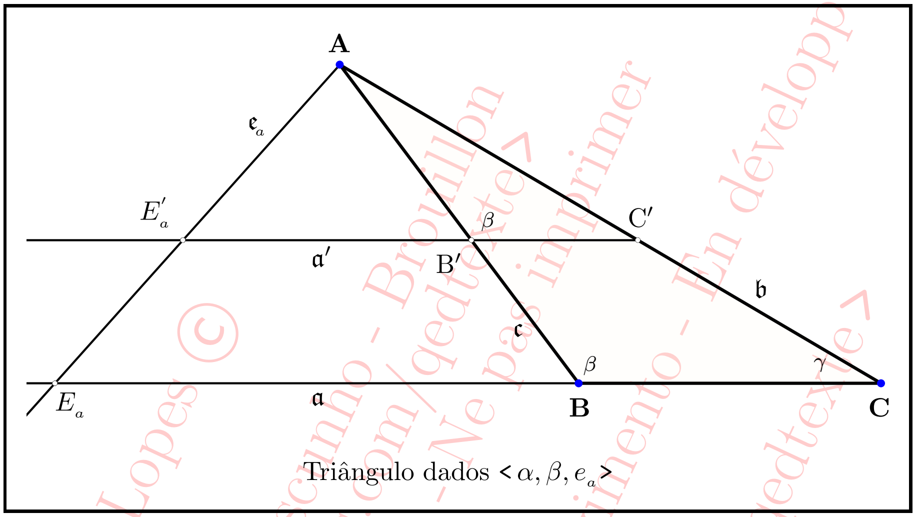


Figura 5.6: Exercício 10.

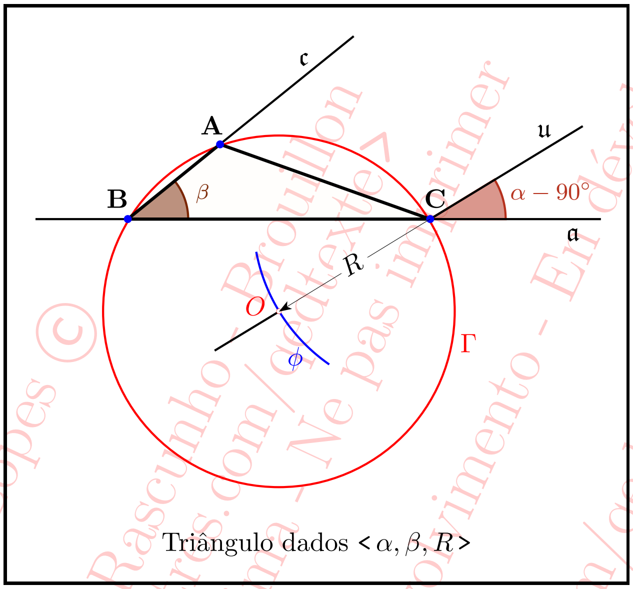


Figura 5.7: Exercício 12 — Primeiro procedimento.

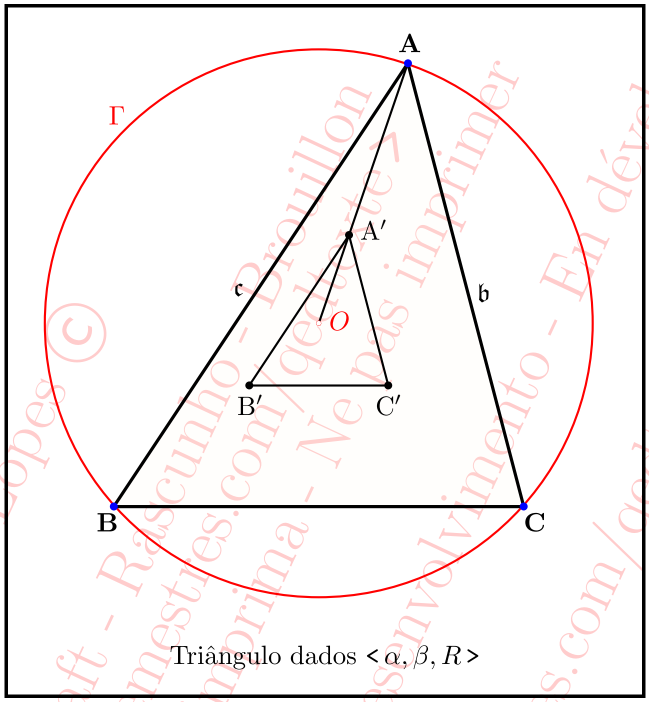
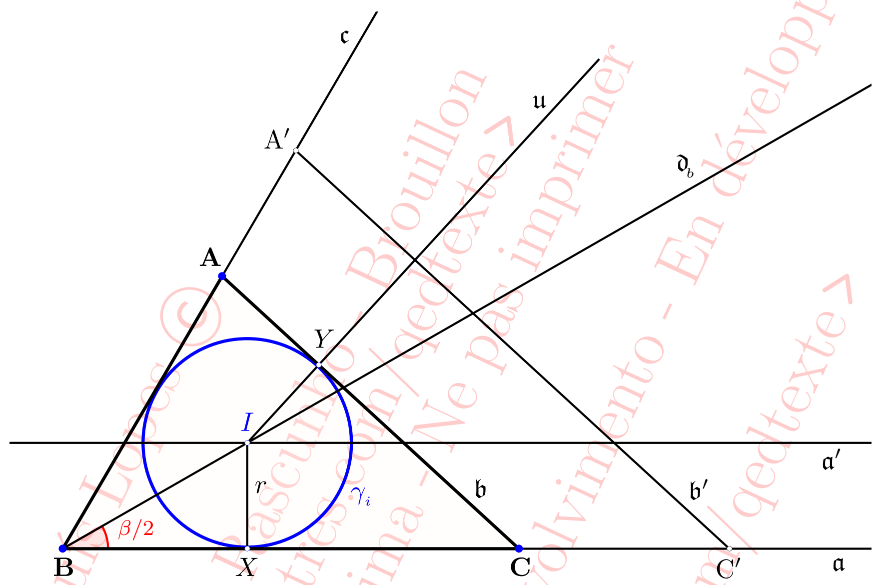


Figura 5.8: Exercício 12 — Segundo procedimento.



Triângulo dados $<\alpha, \beta, r>$

Figura 5.9: Exercício 13 — Primeiro procedimento.

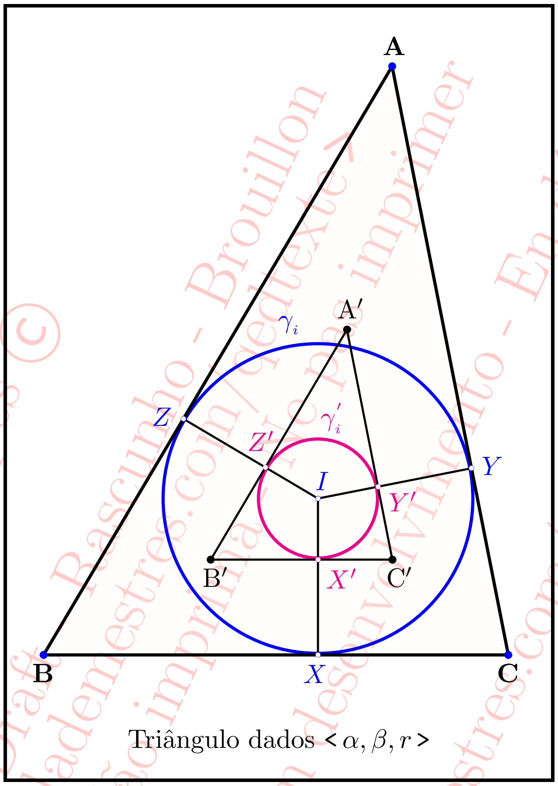


Figura 5.10: Exercício 13 — Segundo procedimento.

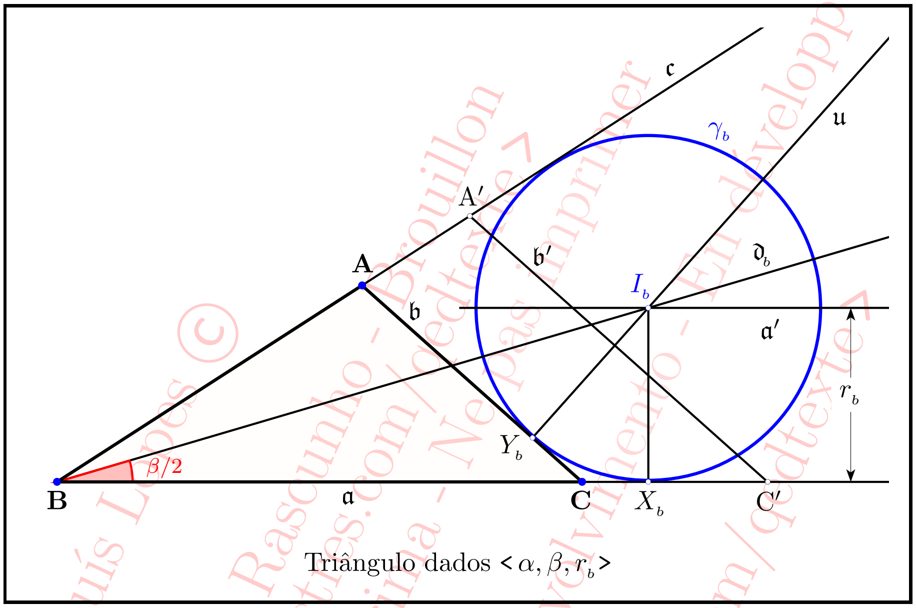


Figura 5.11: Exercício 14 — Primeiro procedimento.

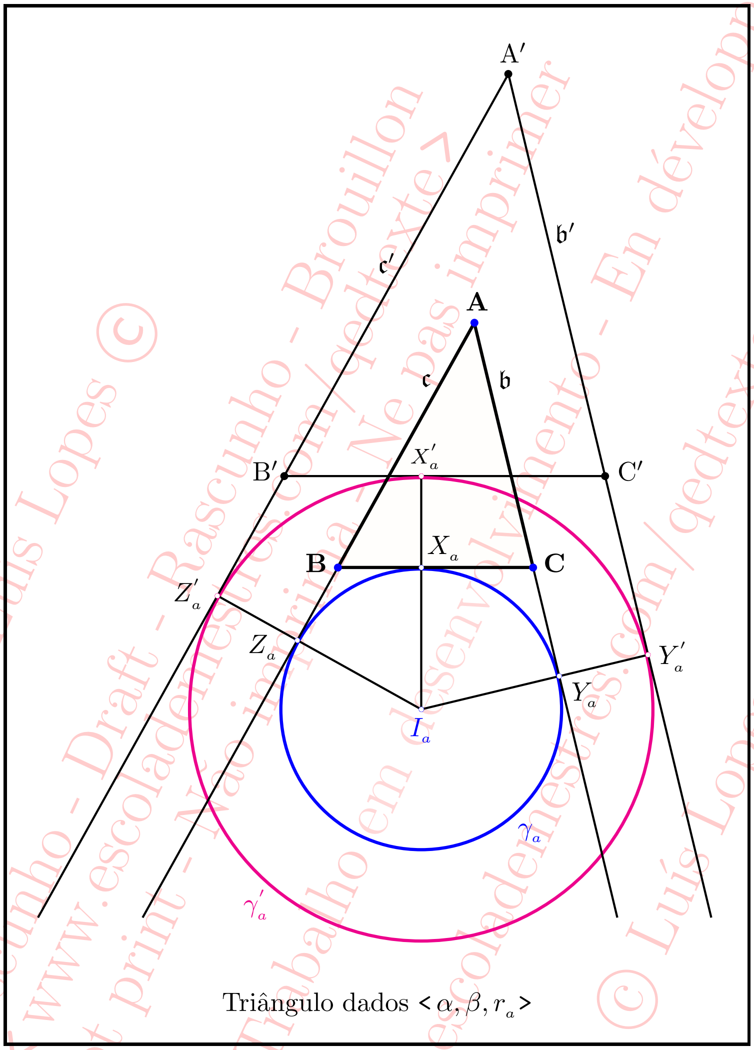


Figura 5.12: Exercício 14 — Segundo procedimento.

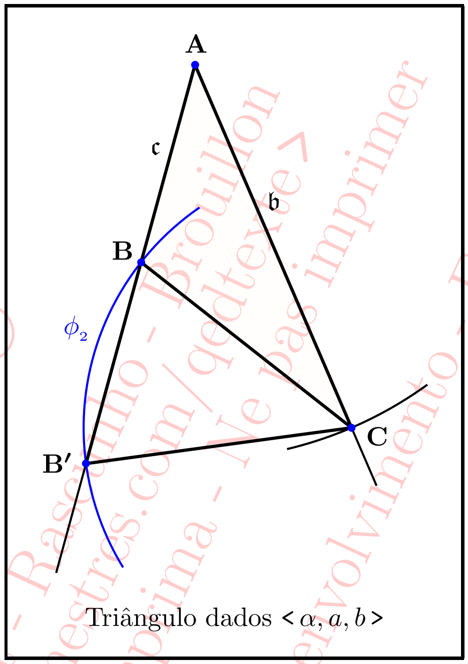


Figura 5.13: Exercício 16 — Primeiro procedimento.

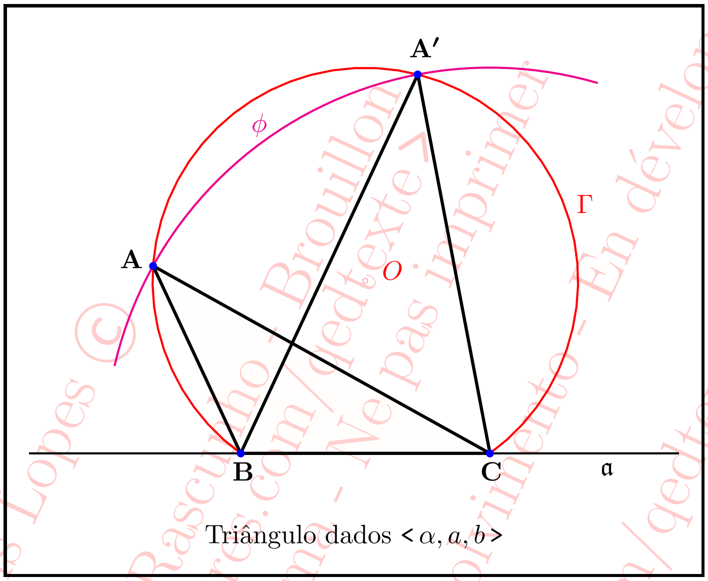


Figura 5.14: Exercício 16 — Segundo procedimento.

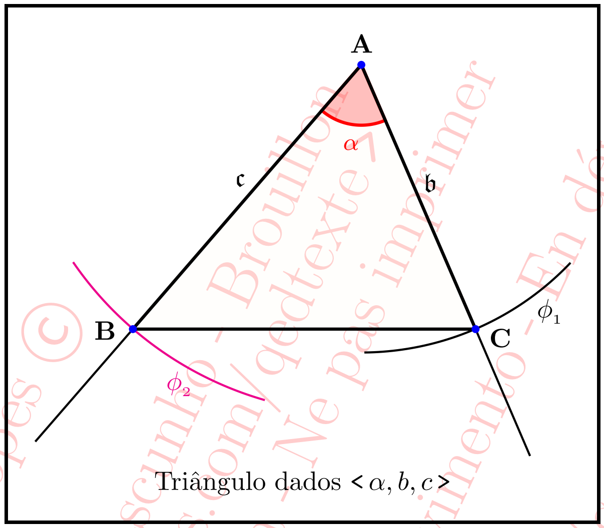


Figura 5.15: Exercício 17.

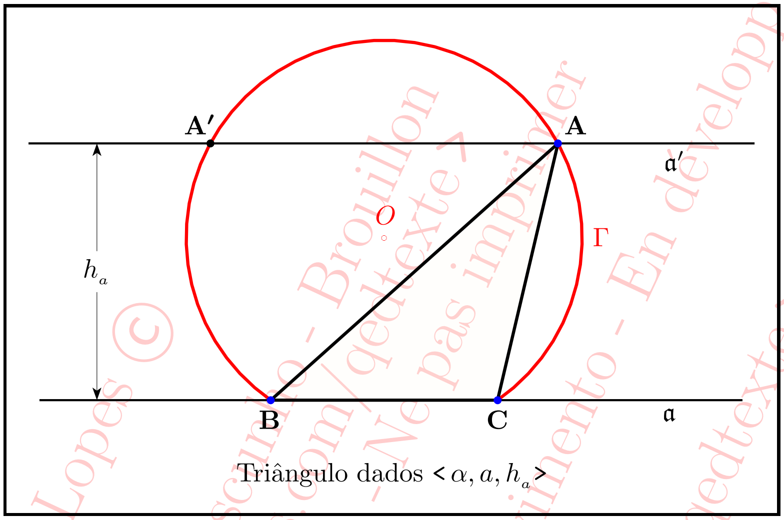


Figura 5.16: Exercício 18.

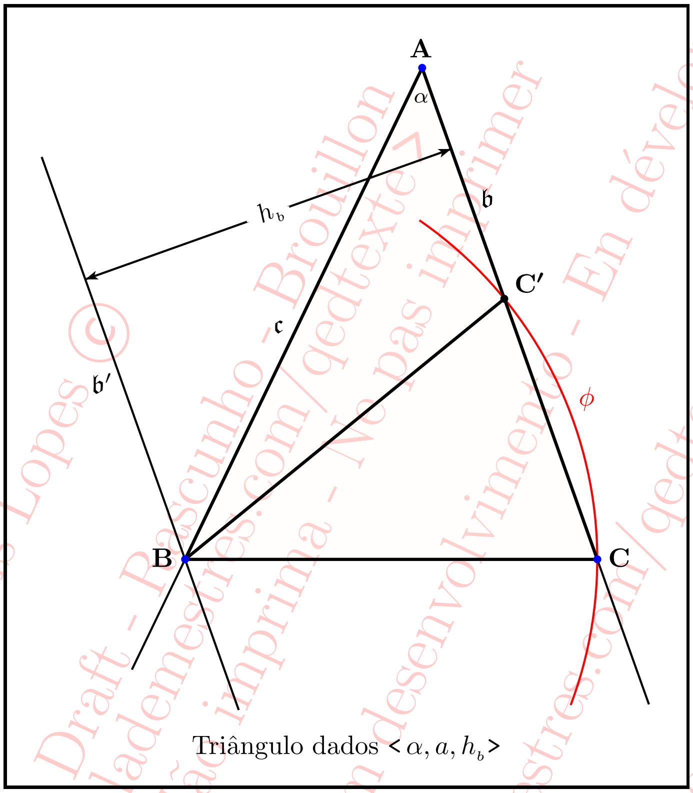


Figura 5.17: Exercício 19 — Primeiro procedimento.

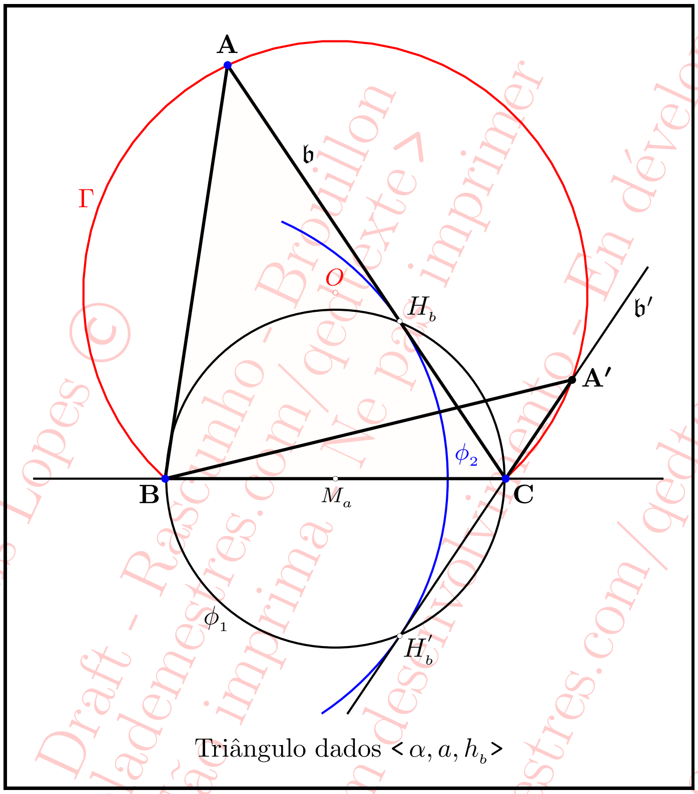


Figura 5.18: Exercício 19 — Segundo procedimento.

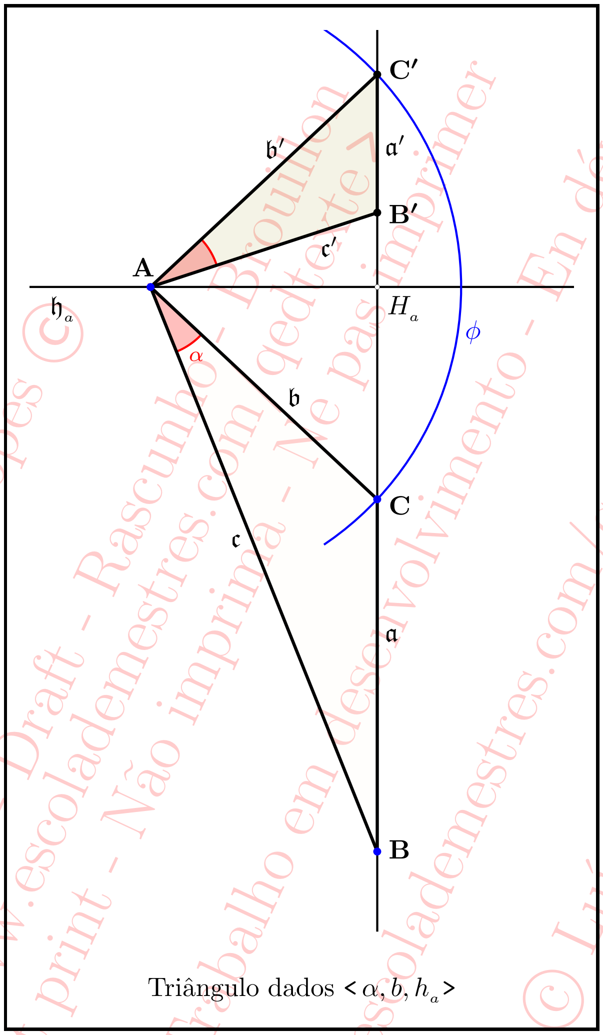


Figura 5.19: Exercício 20 — Primeiro procedimento.

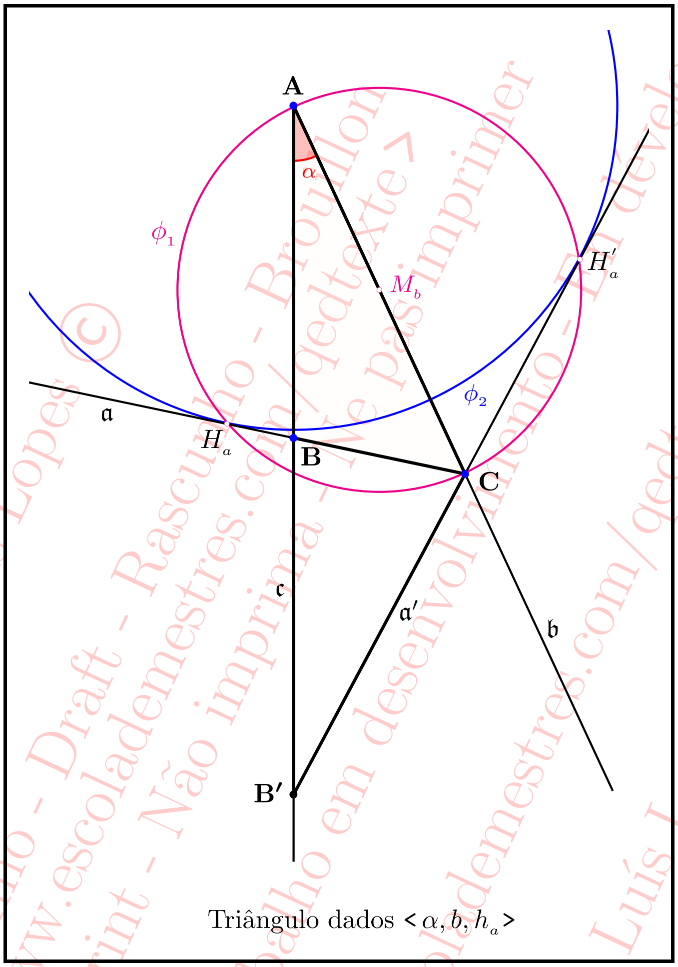


Figura 5.20: Exercício 20 — Segundo procedimento.

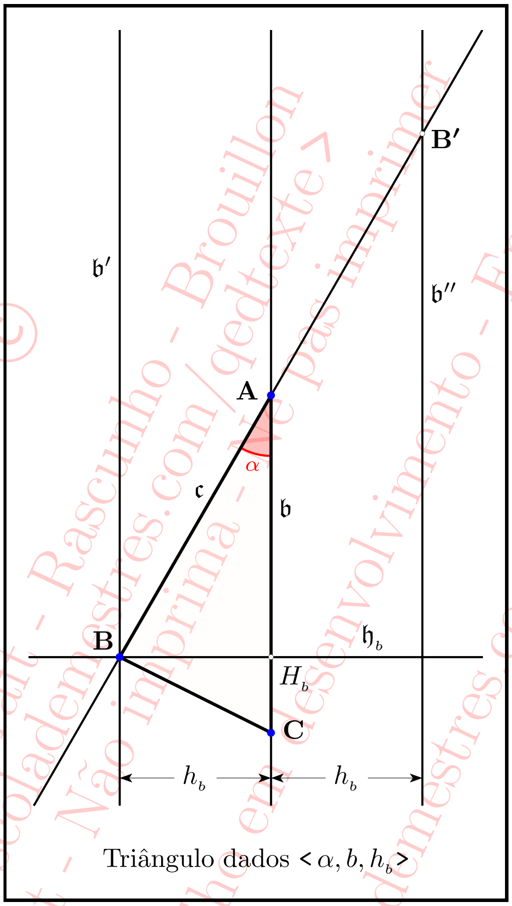


Figura 5.21: Exercício 21 — Primeiro procedimento.

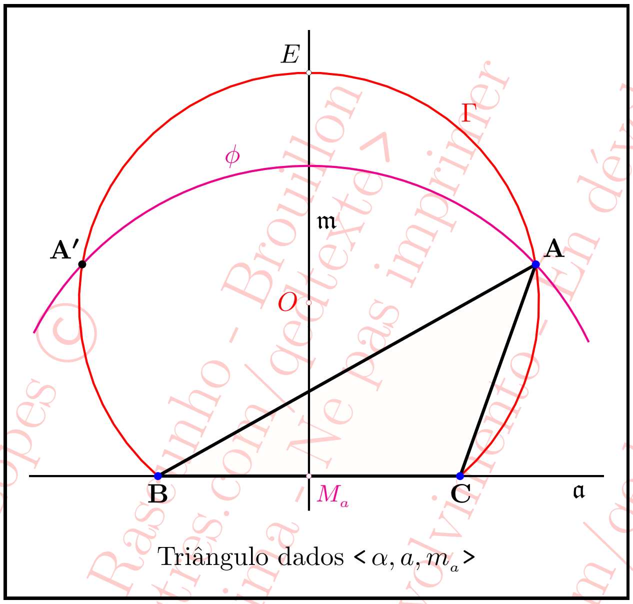


Figura 5.22: Exercício 23.

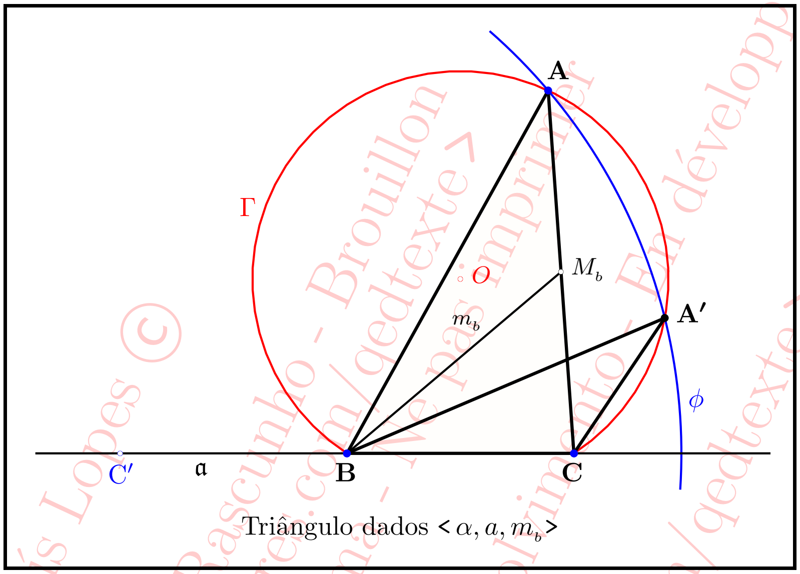


Figura 5.23: Exercício 24 — Primeiro procedimento.

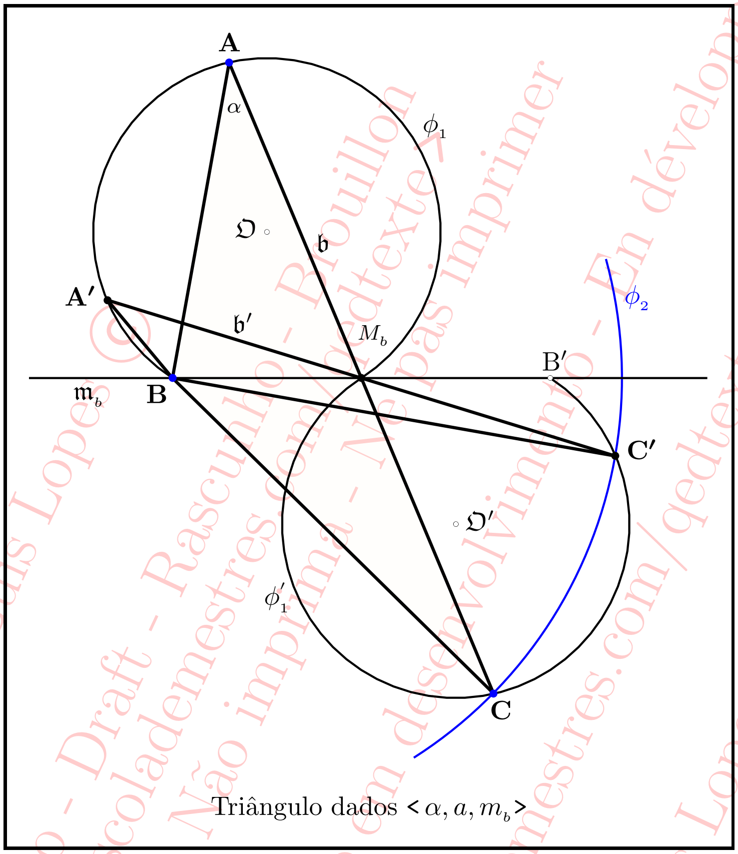


Figura 5.24: Exercício 24 — Segundo procedimento.

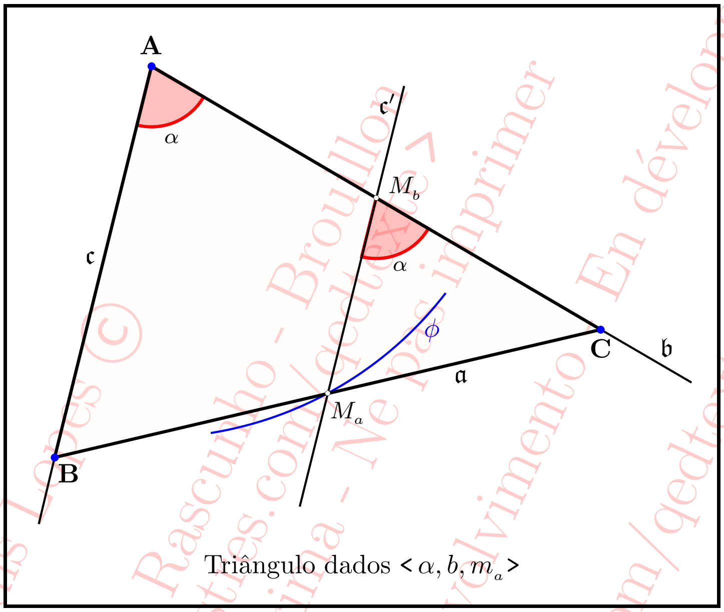
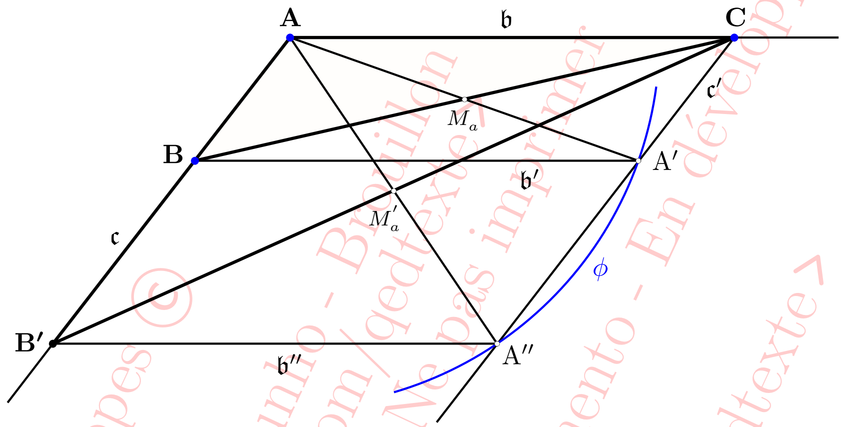


Figura 5.25: Exercício 25 — Primeiro procedimento.



Triângulo dados $< \alpha, b, m_a >$

Figura 5.26: Exercício 25 — Segundo procedimento.

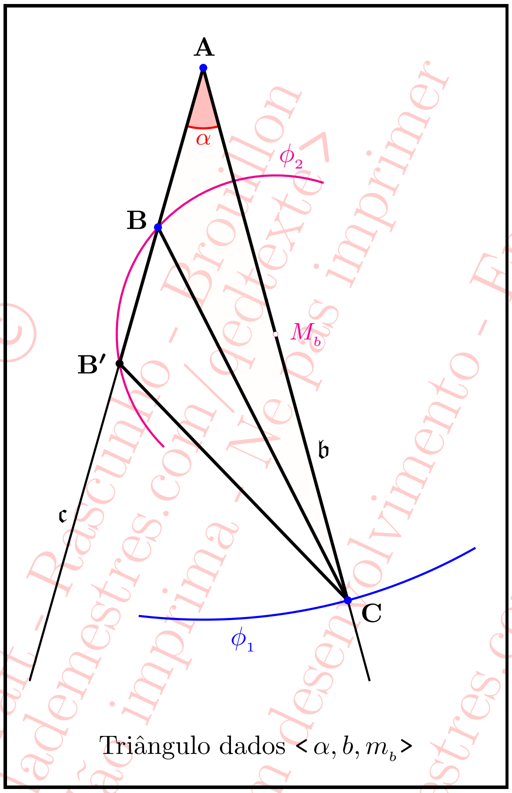


Figura 5.27: Exercício 26.

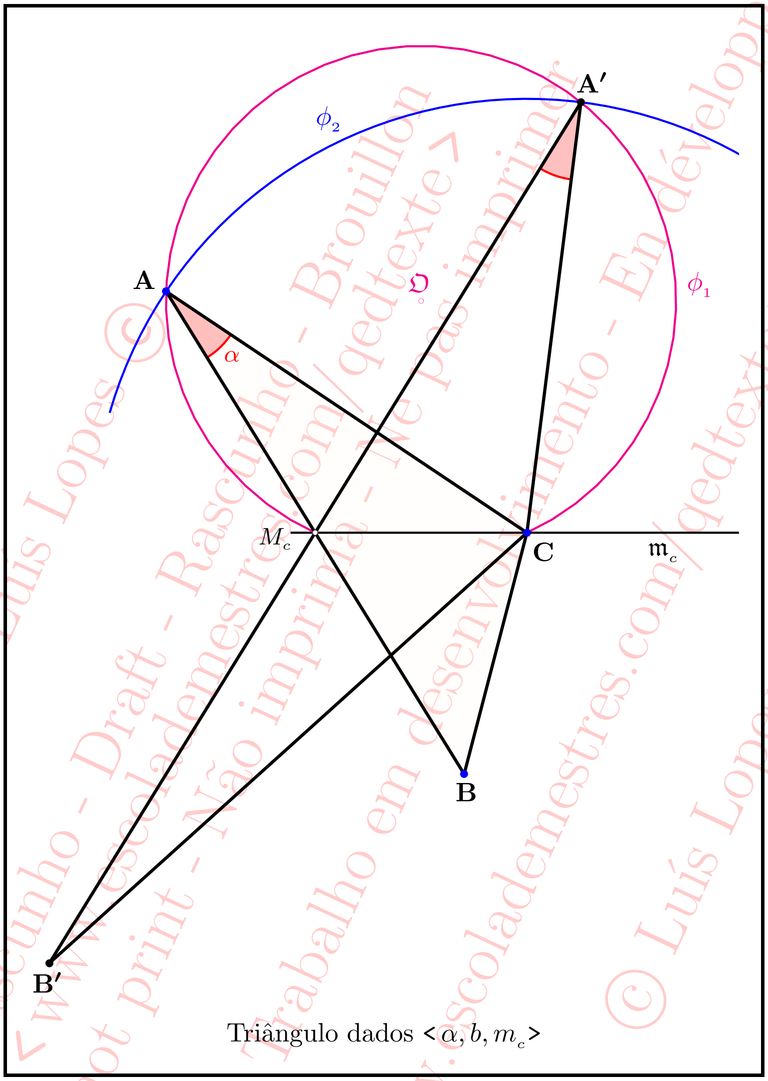


Figura 5.28: Exercício 27.

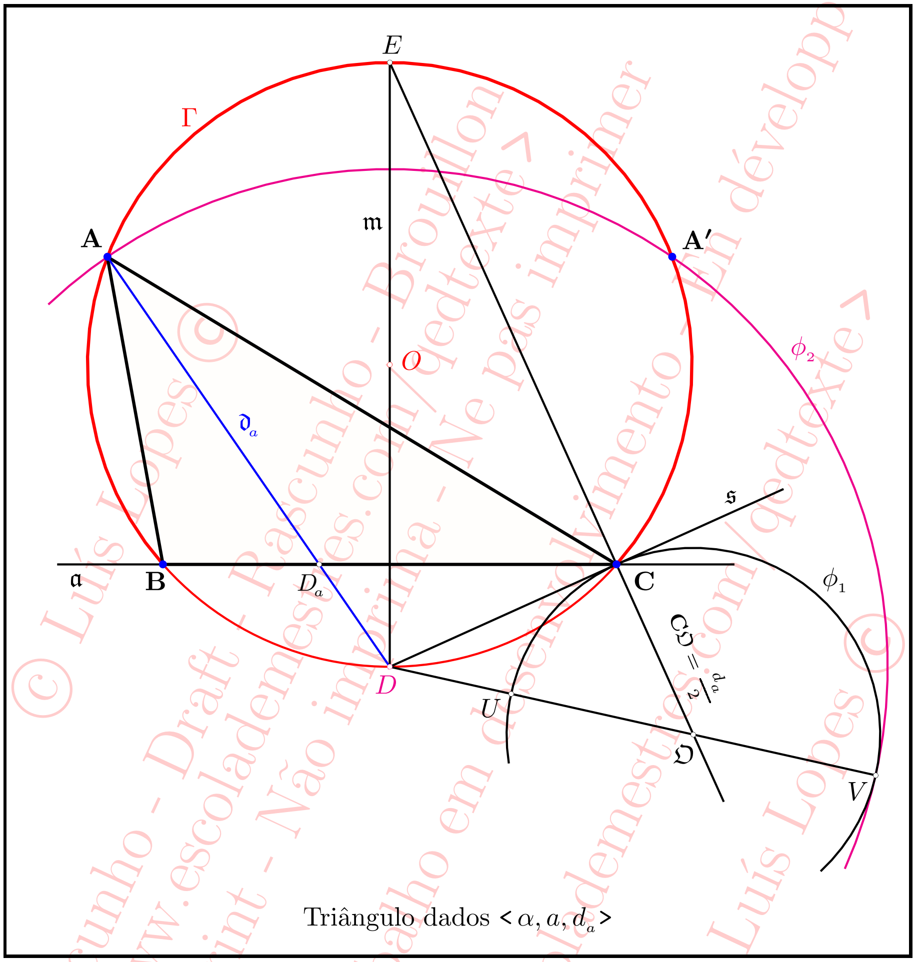
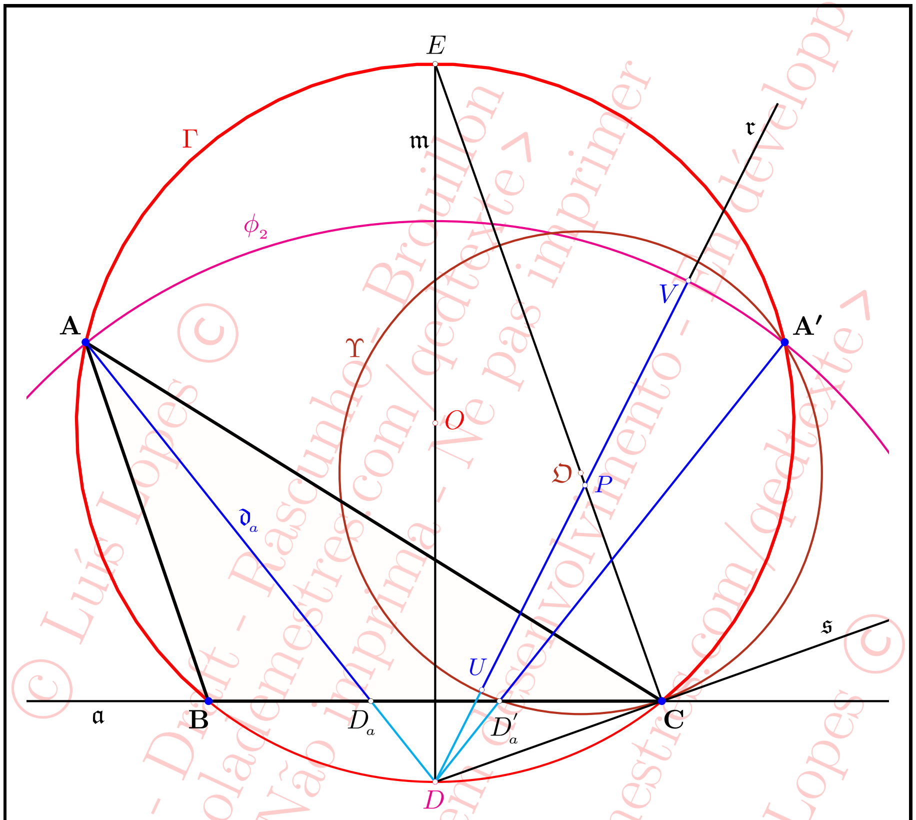


Figura 5.29: Exercício 28 — Primeiro procedimento.



Triângulo dados $<\alpha, a, d_a>$

Figura 5.30: Exercício 28 — Segundo procedimento.

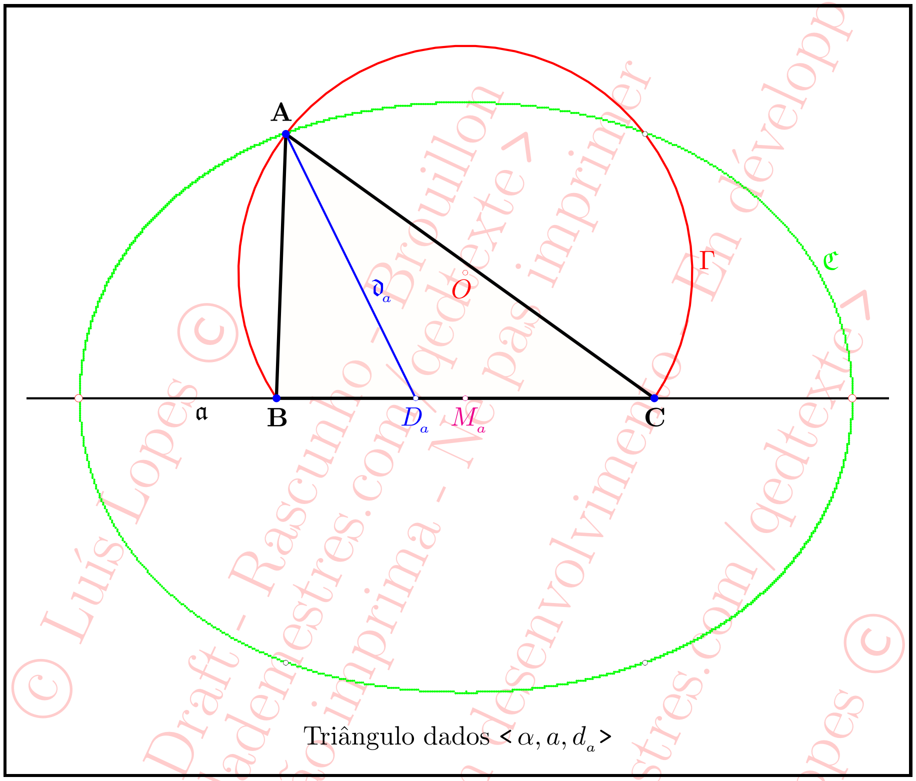
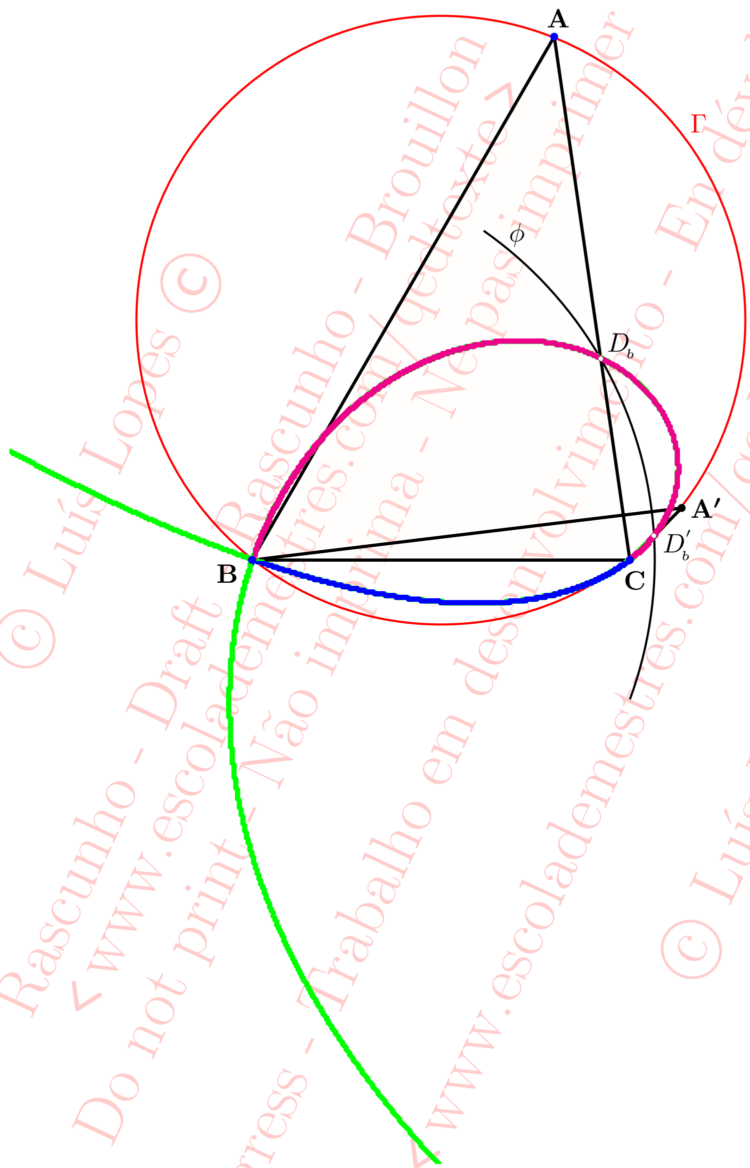


Figura 5.31: Exercício 28 — Terceiro procedimento.



Triângulo dados $<\alpha, a, d_b>$

Figura 5.32: Exercícios 29 e 34.

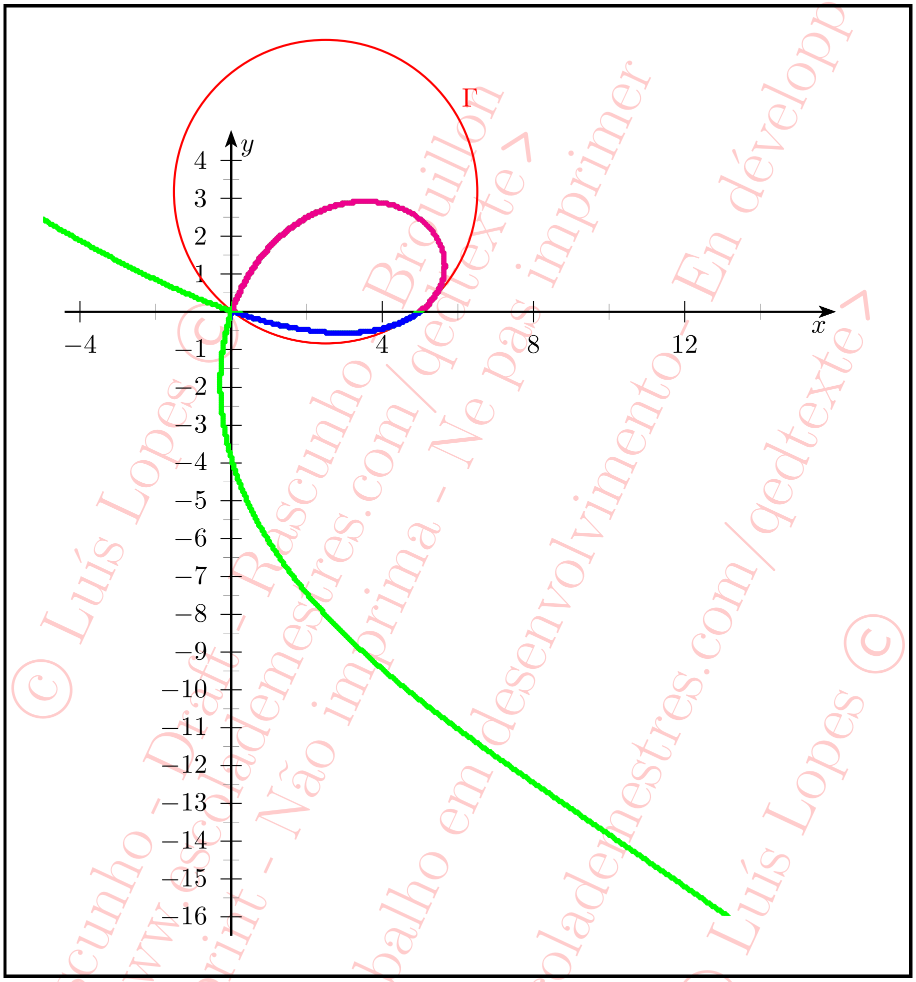
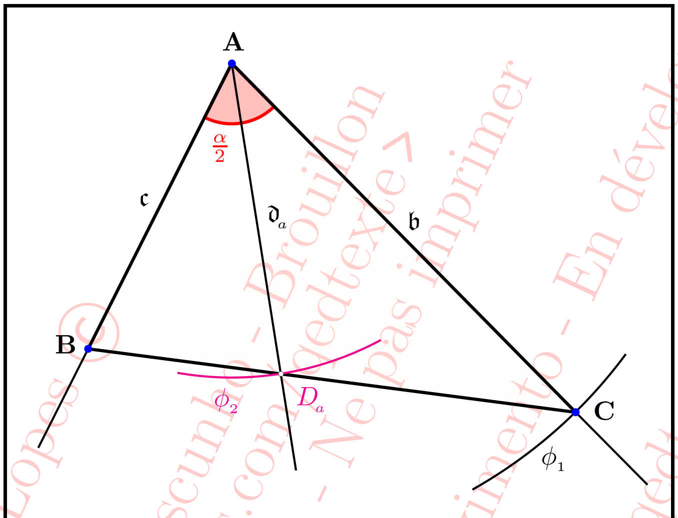
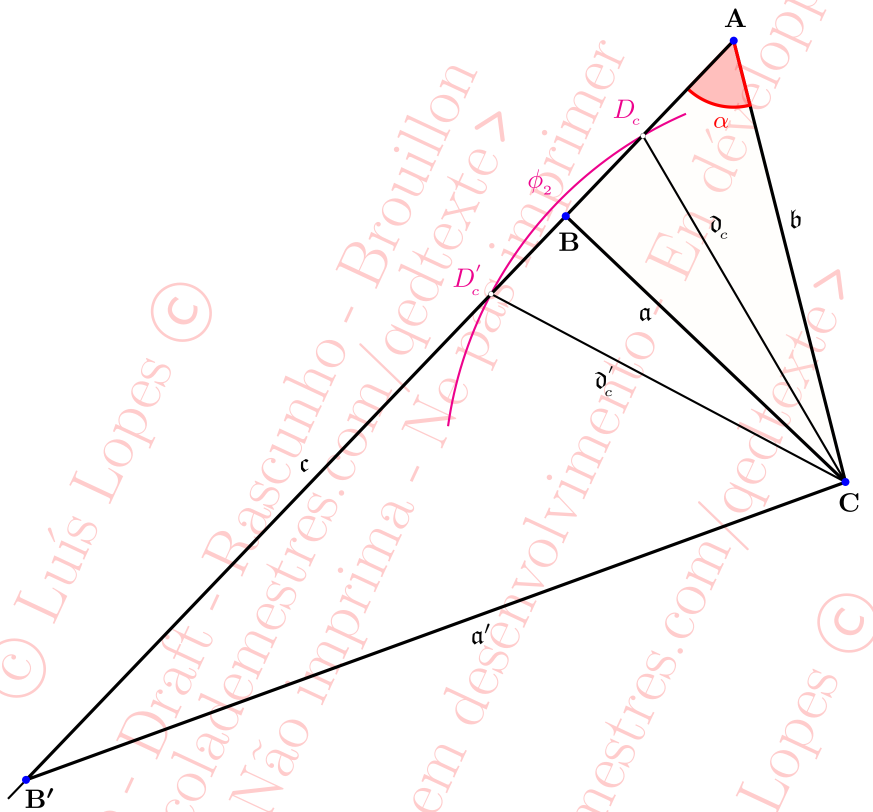


Figura 5.33: Lugar geométrico de D_b e E_b quando **A** percorre Γ.



Triângulo dados $<\alpha, b, d_a>$

Figura 5.34: Exercício 30.



Triângulo dados $< \alpha, b, d_c >$

Figura 5.35: Exercício 32 — Primeiro procedimento.

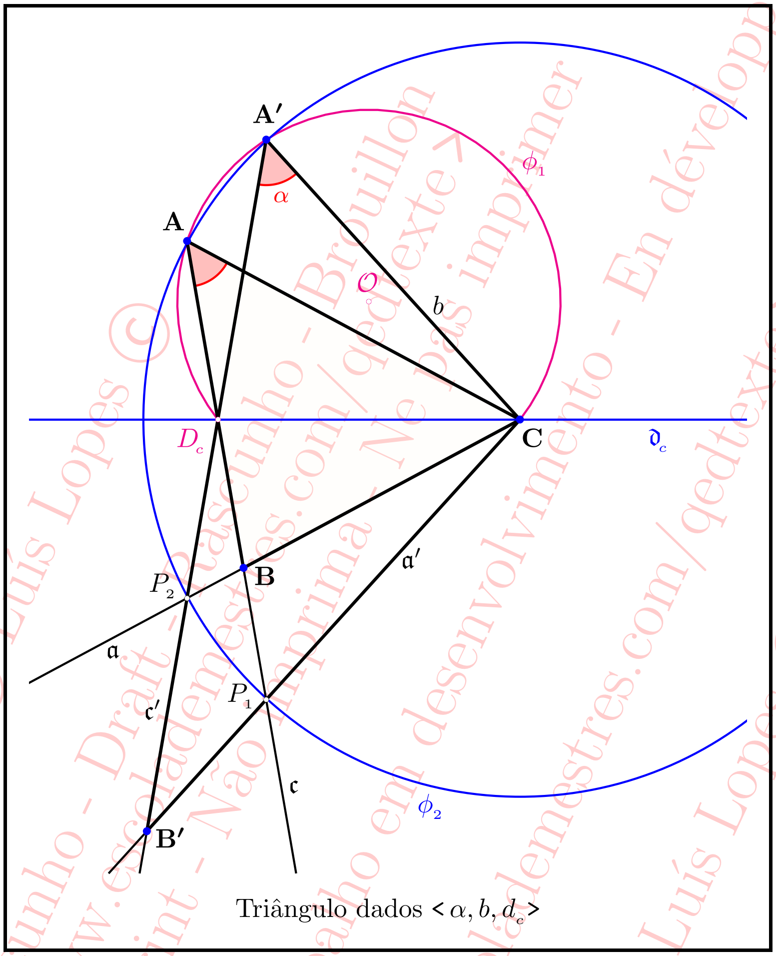


Figura 5.36: Exercício 32 — Segundo procedimento.

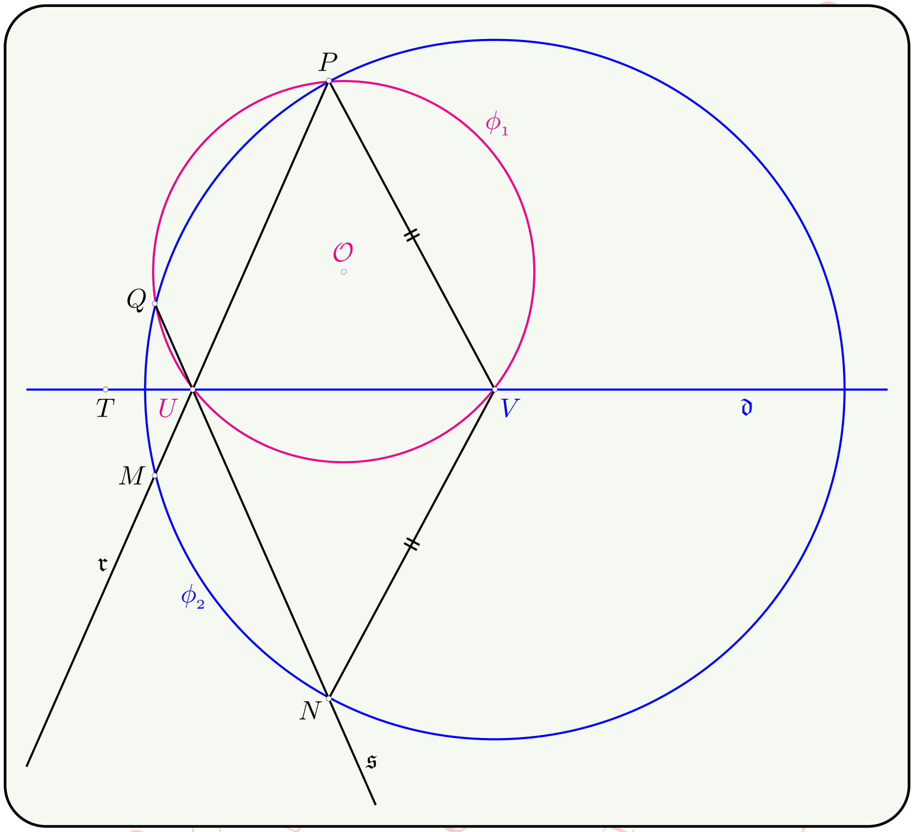


Figura 5.37: Duas colinearidades com dois pontos simétricos.

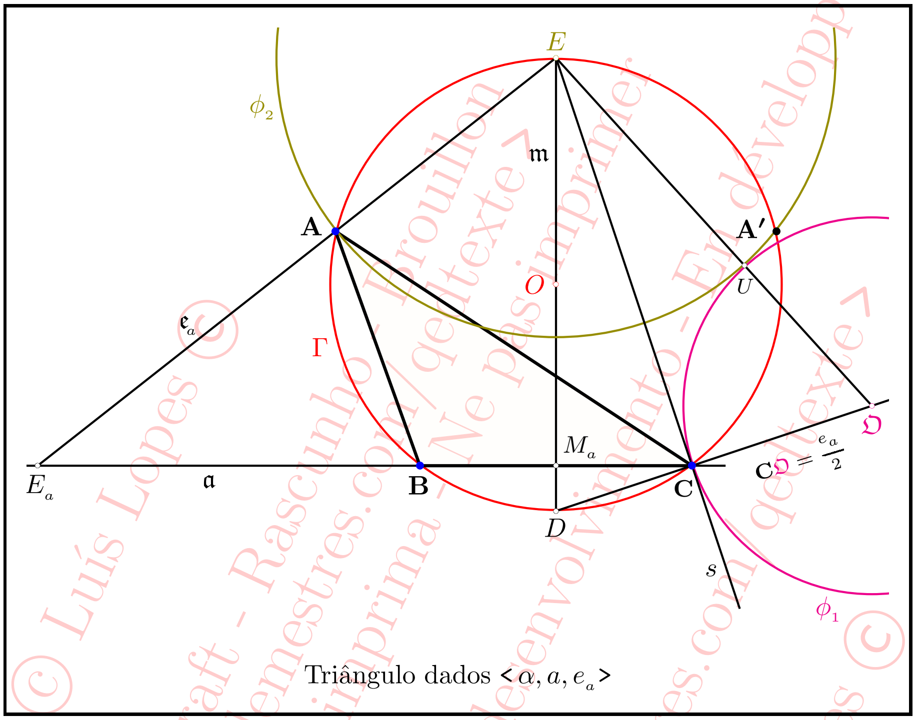
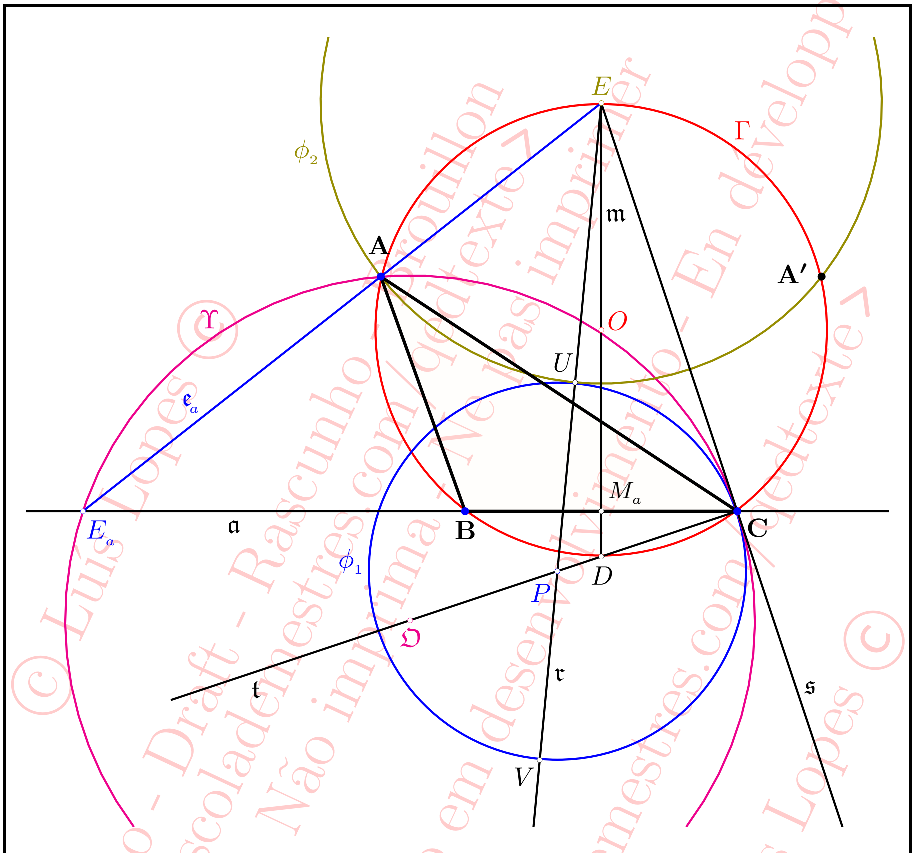
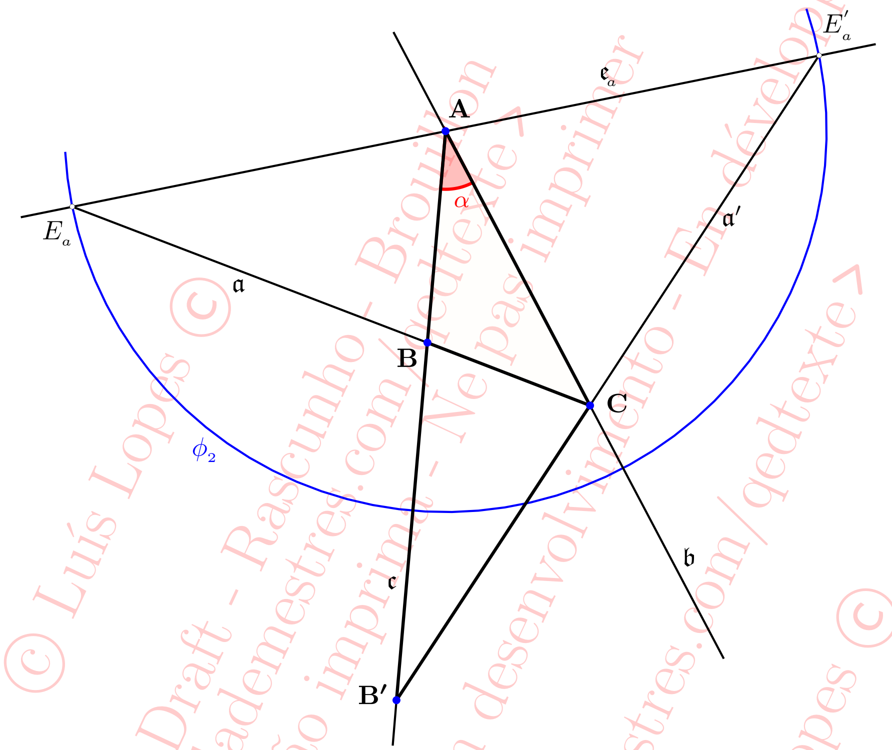


Figura 5.38: Exercício 33 — Primeiro procedimento.



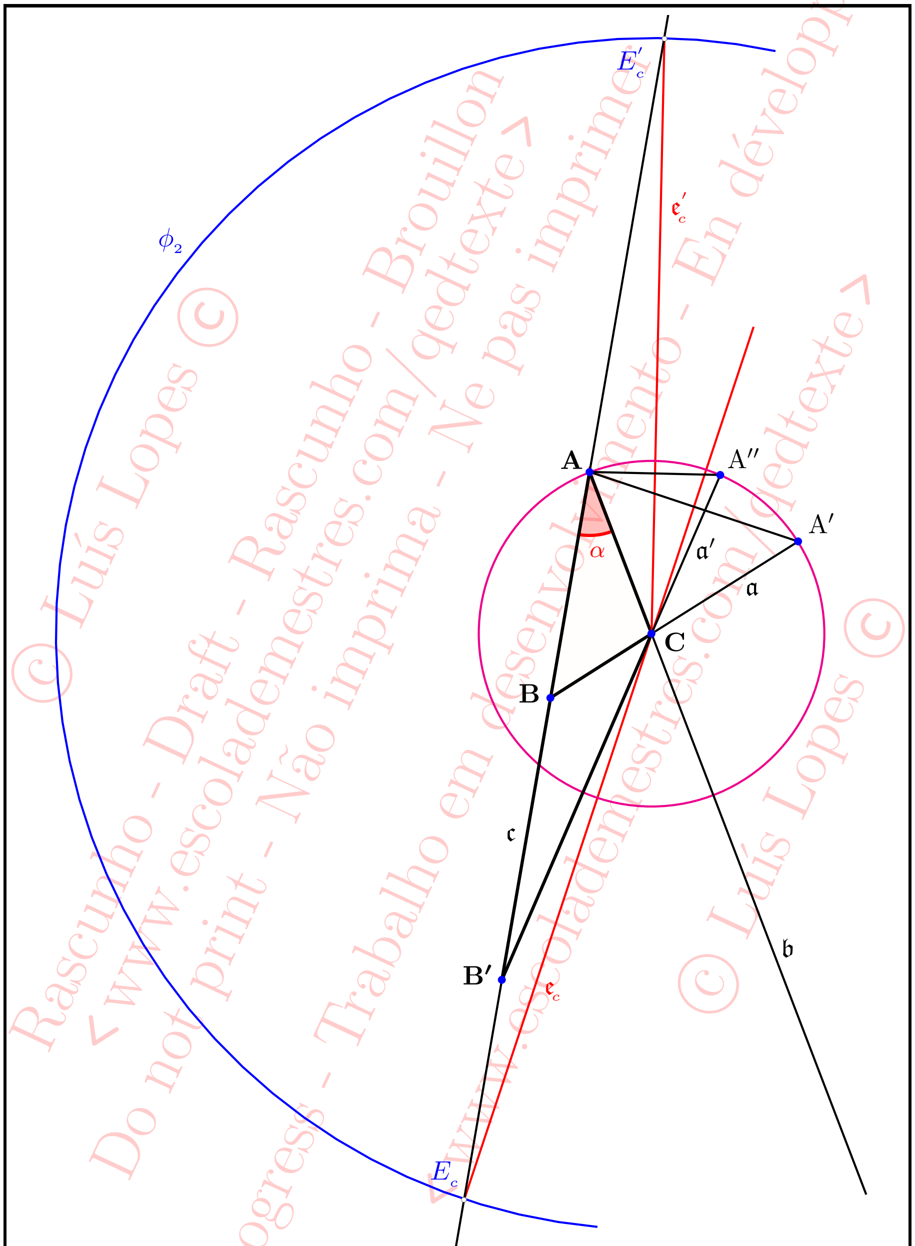
Triângulo dados $< \alpha, a, e_a >$

Figura 5.39: Exercício 33 — Segundo procedimento.



Triângulo dados $<\alpha, b, e_a>$

Figura 5.40: Exercício 35.



Triângulo dados $<\alpha, b, e_c>$

Figura 5.41: Exercício 37 — Primeiro procedimento.

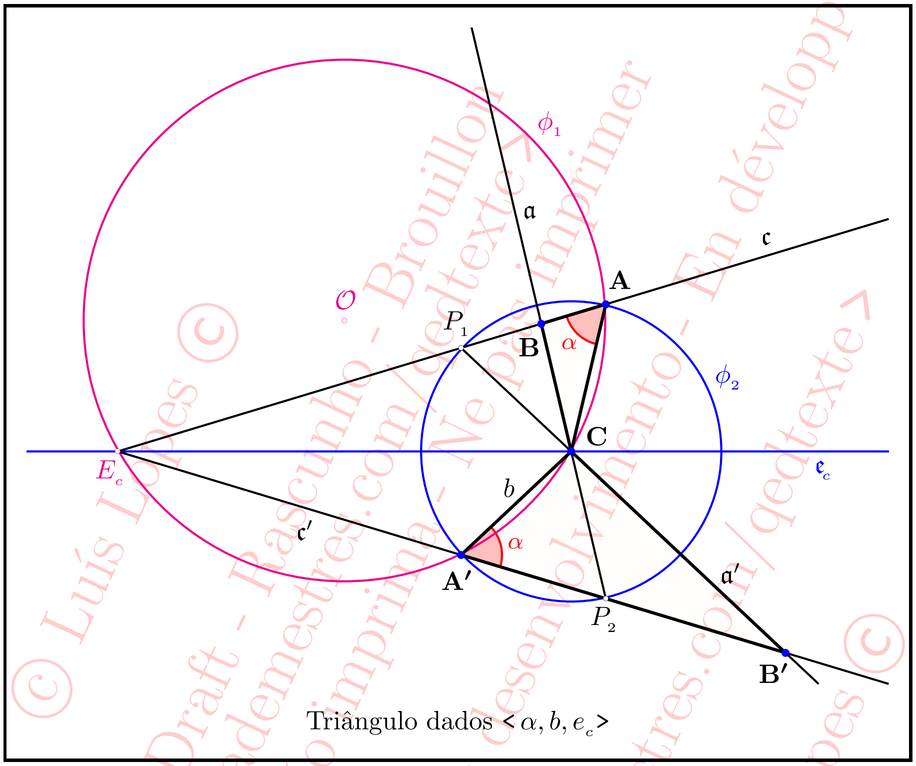


Figura 5.42: Exercício 37 — Segundo procedimento.

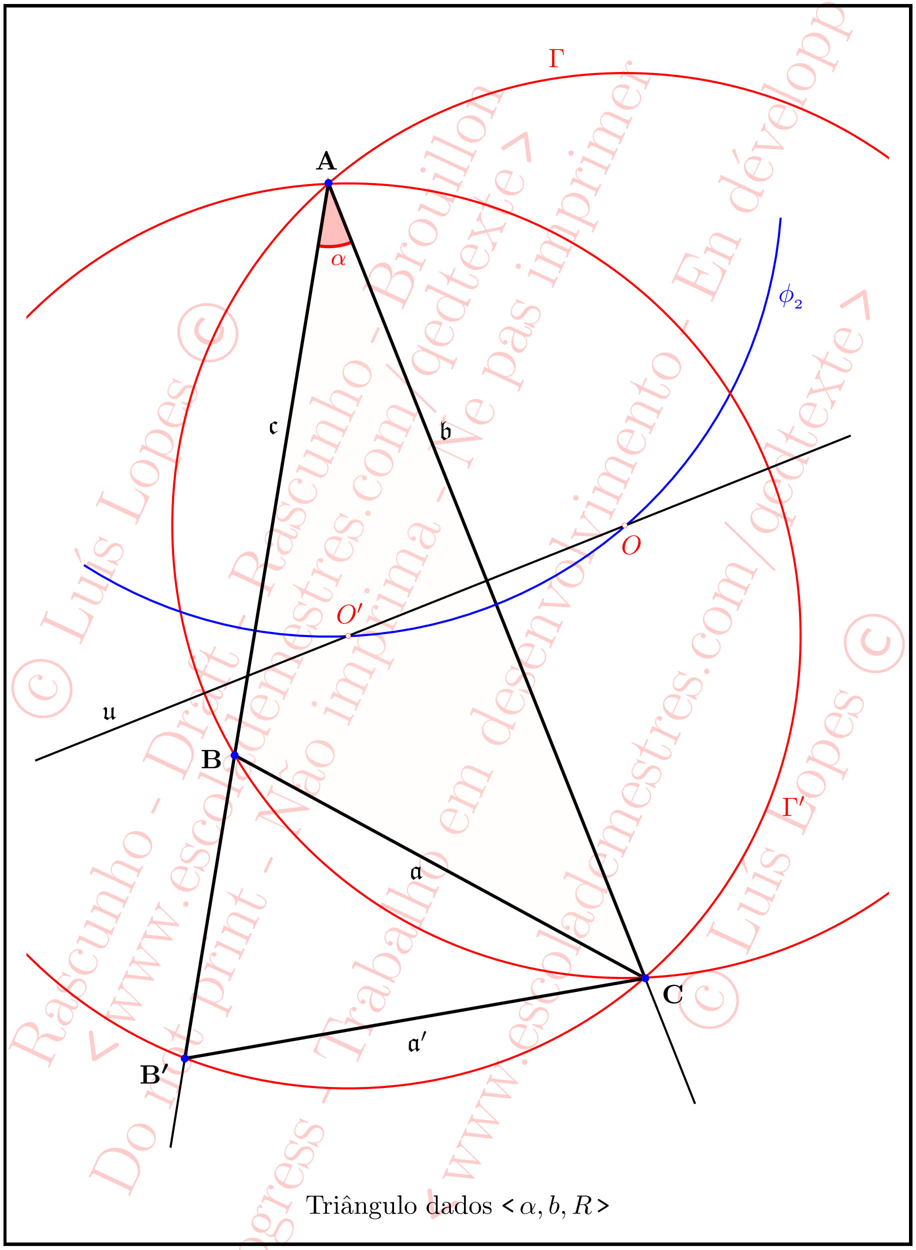


Figura 5.43: Exercício 39.

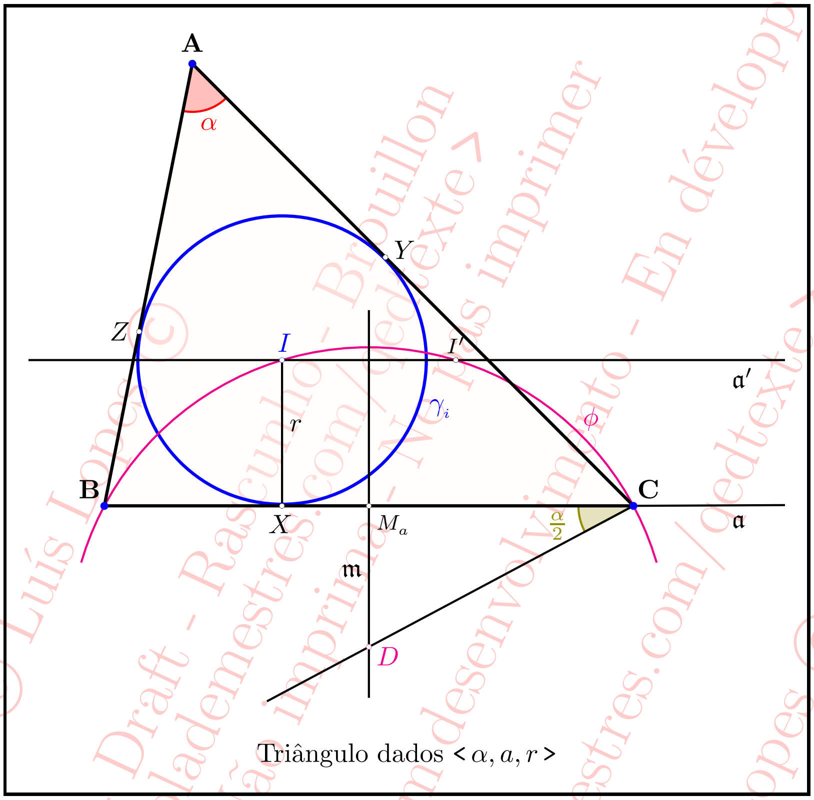
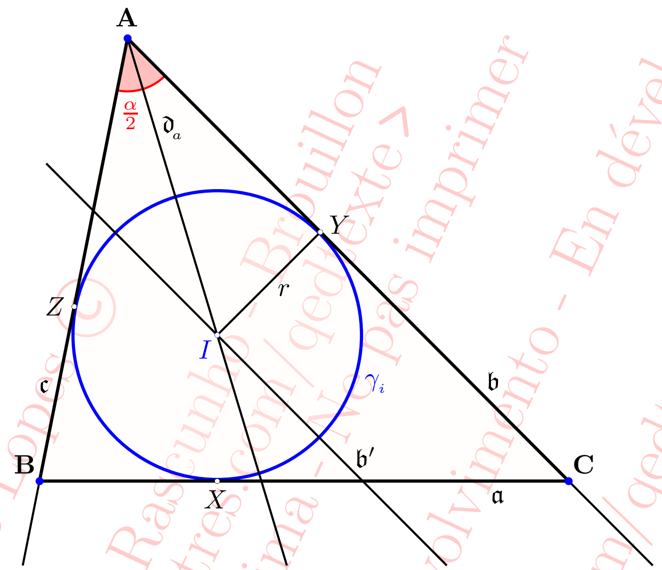


Figura 5.44: Exercício 40.



Triângulo dados $<\alpha, b, r>$

Figura 5.45: Exercício 41.

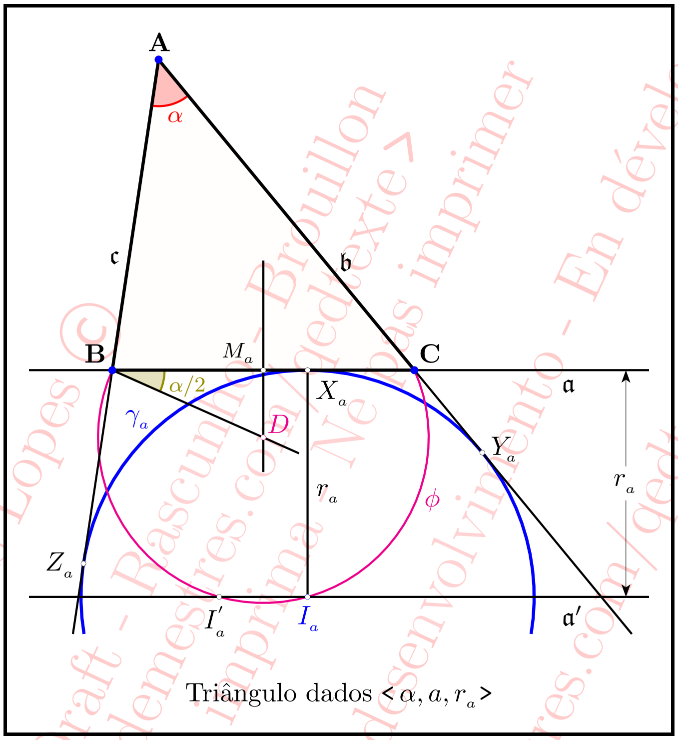


Figura 5.46: Exercício 42 — Segundo procedimento.

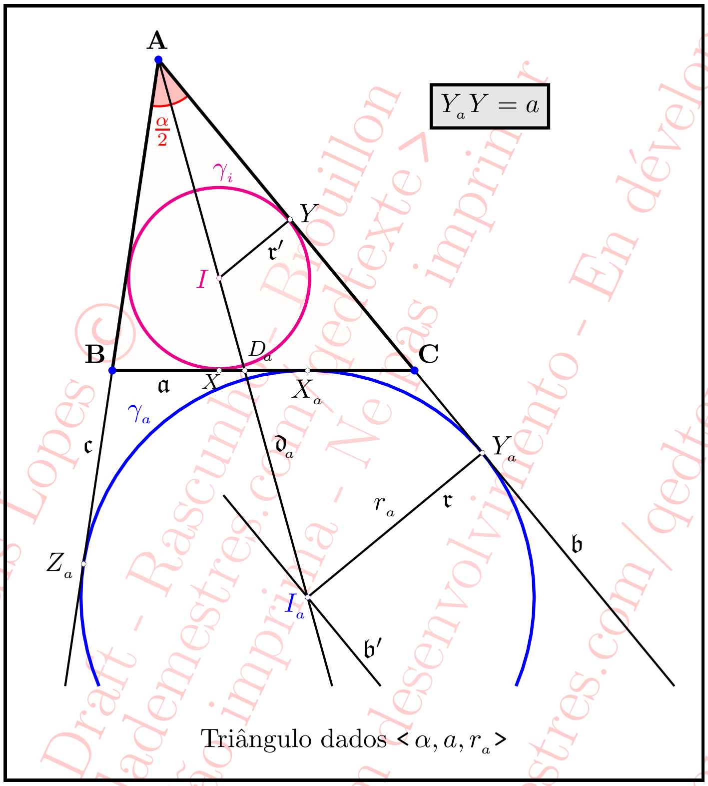
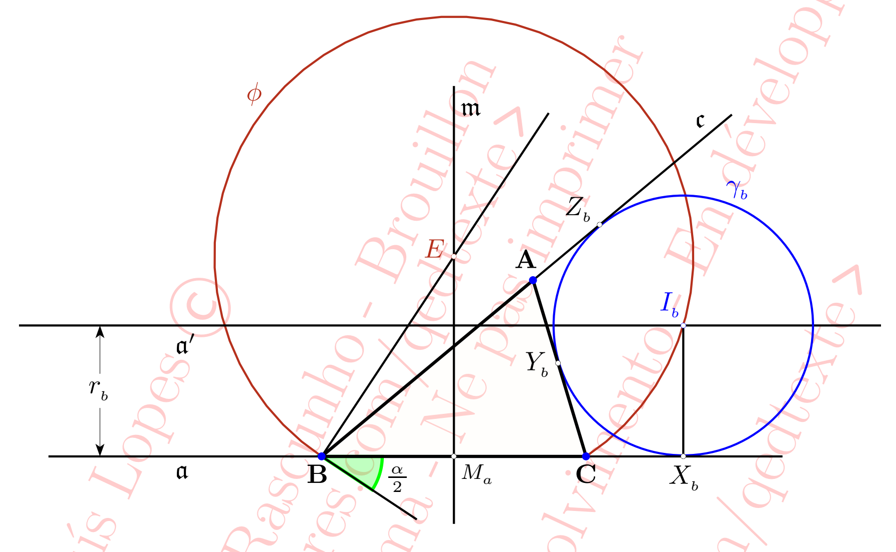


Figura 5.47: Exercício 42 — Terceiro procedimento.



Triângulo dados $<\alpha, a, r_b>$

Figura 5.48: Exercício 43 — Primeiro procedimento.

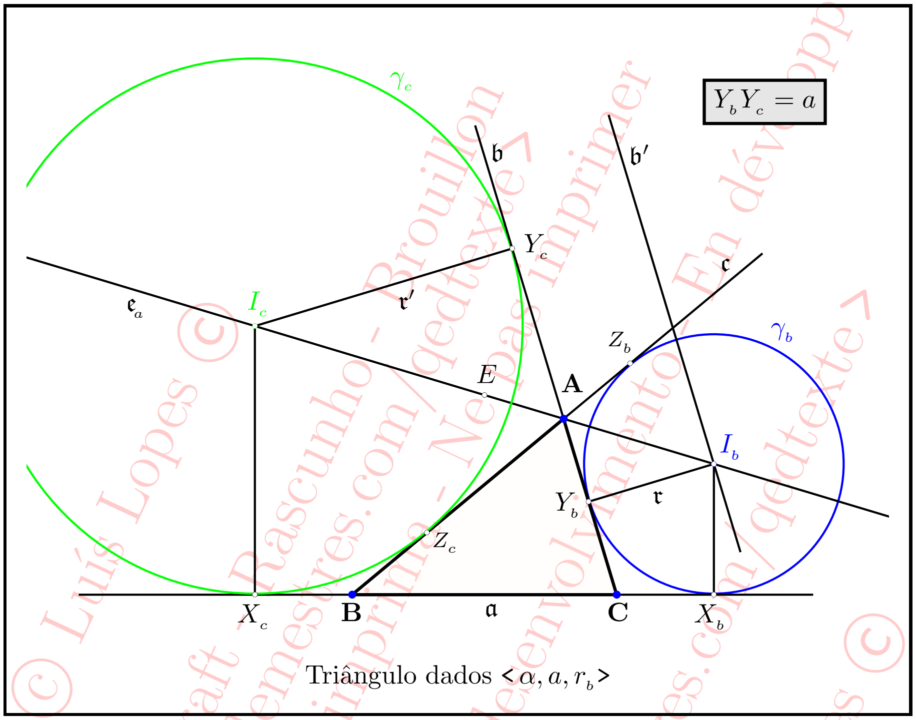


Figura 5.49: Exercício 43 — Segundo procedimento.

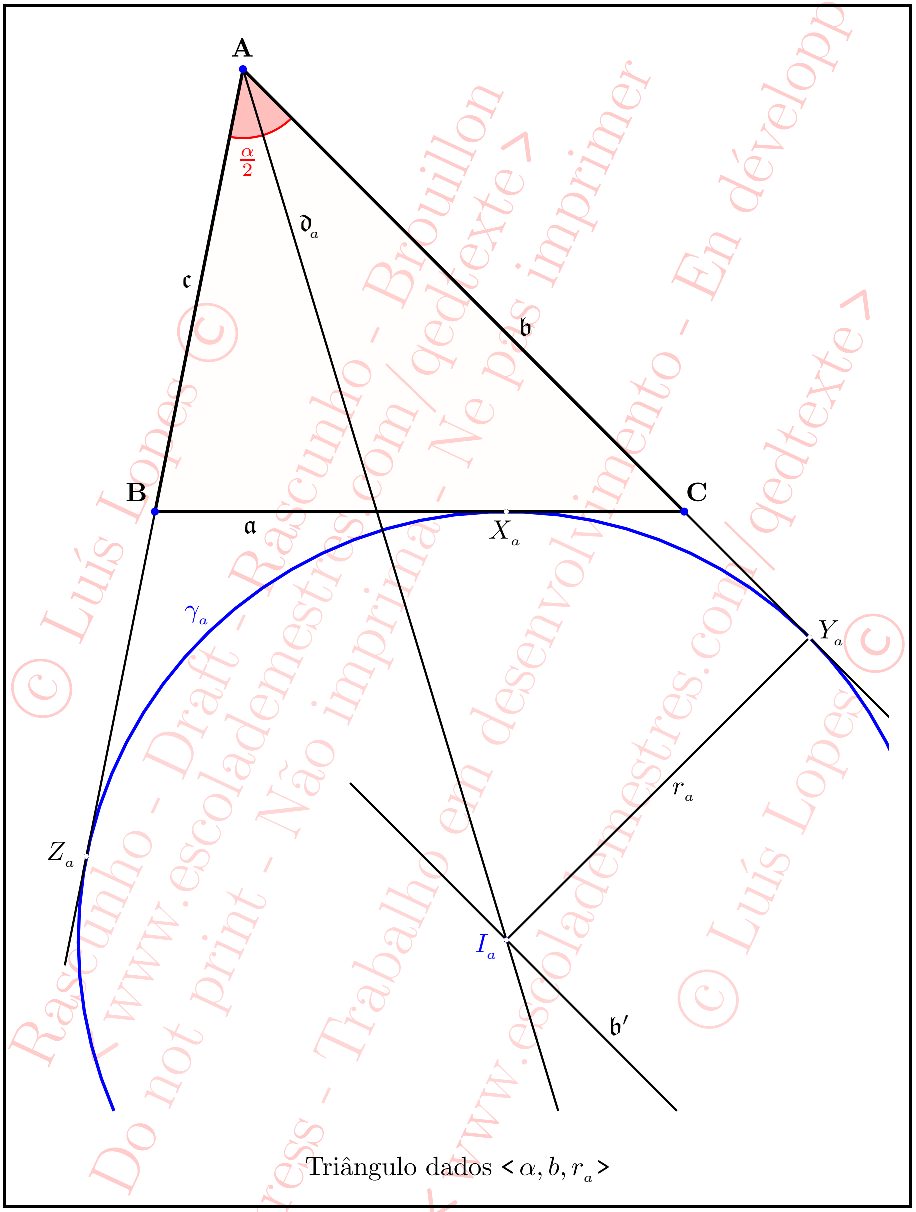


Figura 5.50: Exercício 44.

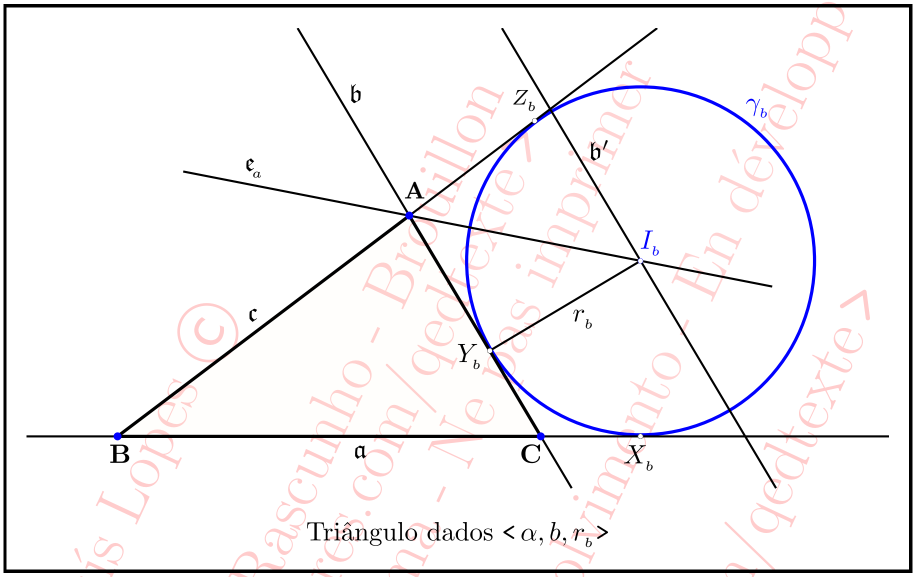
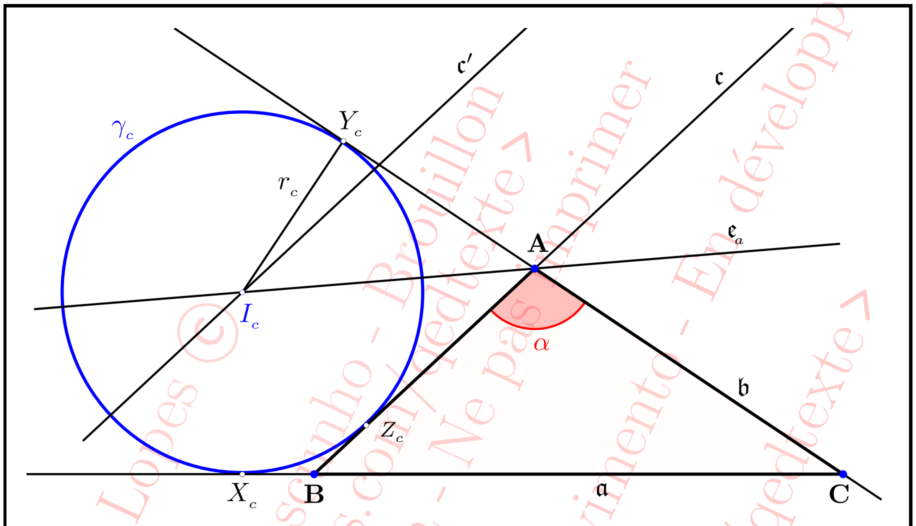
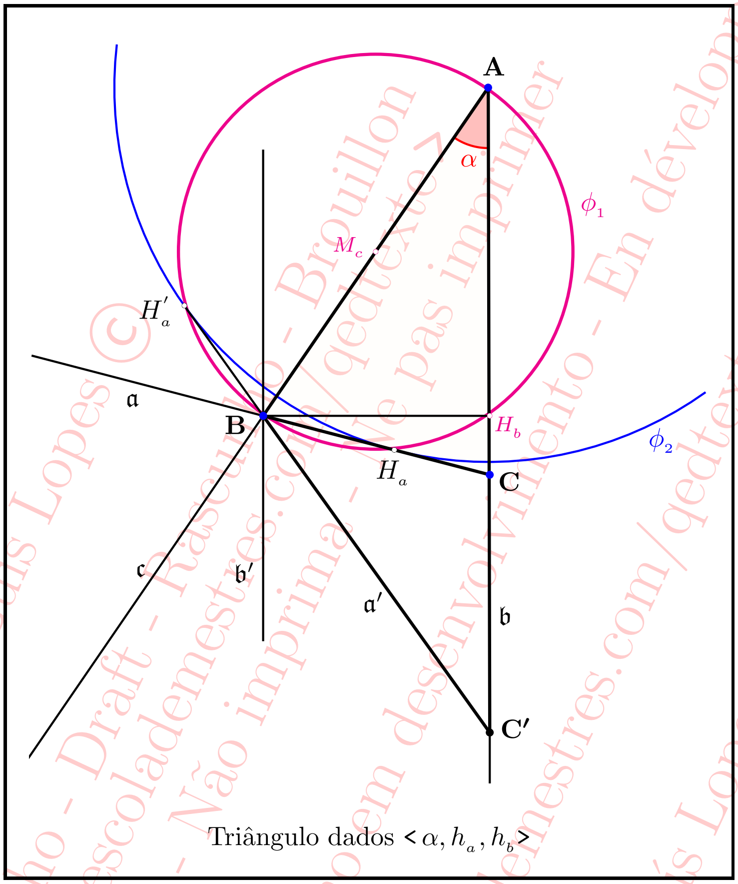


Figura 5.51: Exercício 45.



Triângulo dados $<\alpha, b, r_c>$

Figura 5.52: Exercício 46.



Triângulo dados $<\alpha, h_a, h_b>$

Figura 5.53: Exercício 47.

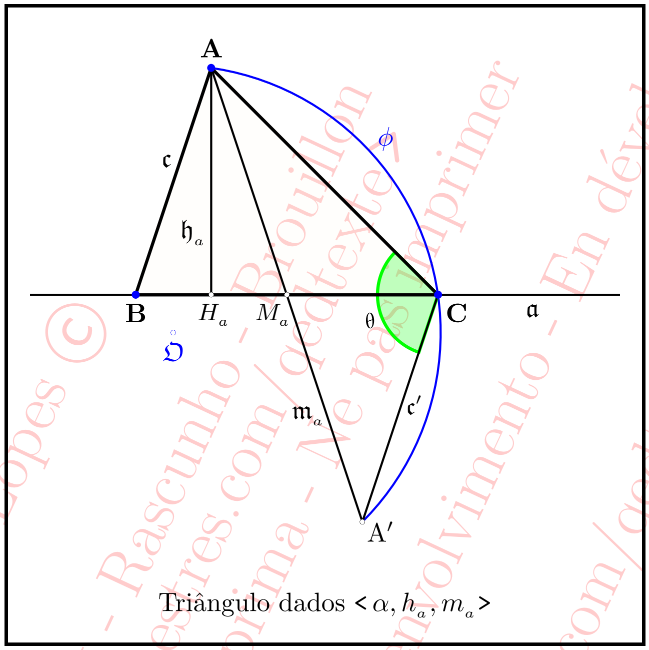


Figura 5.54: Exercício 49 — Segundo procedimento.

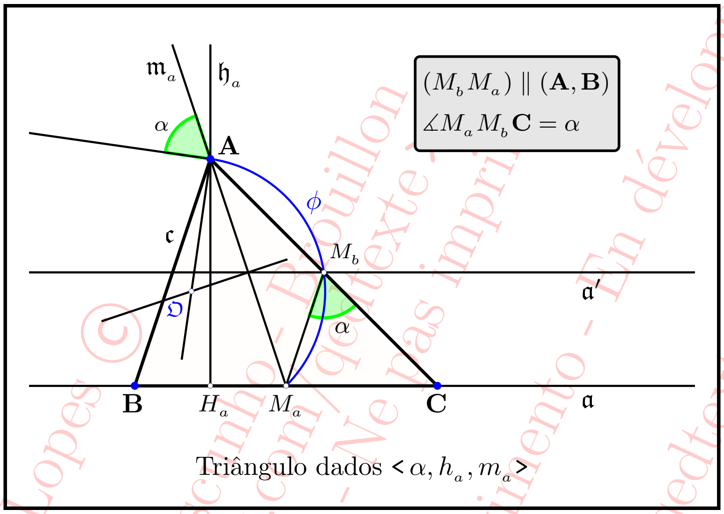


Figura 5.55: Exercício 49 — Terceiro procedimento.

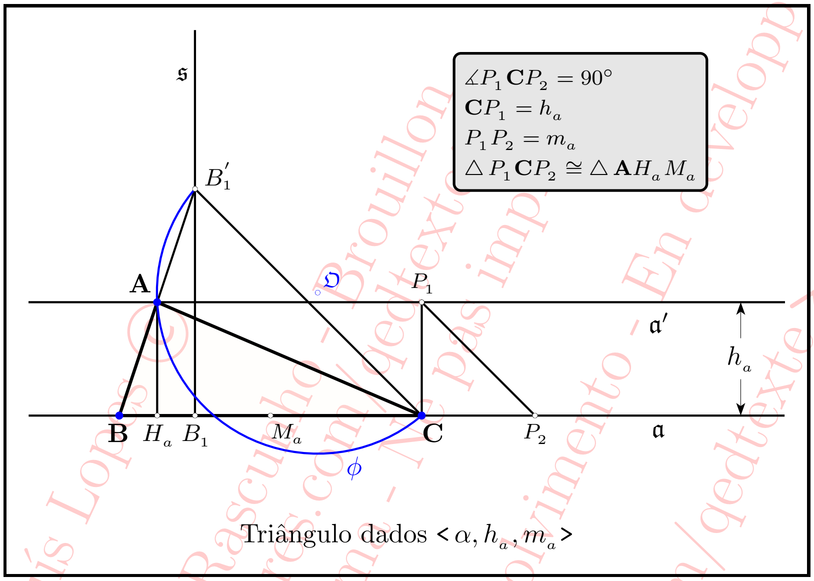


Figura 5.56: Exercício 49 — Quarto procedimento.

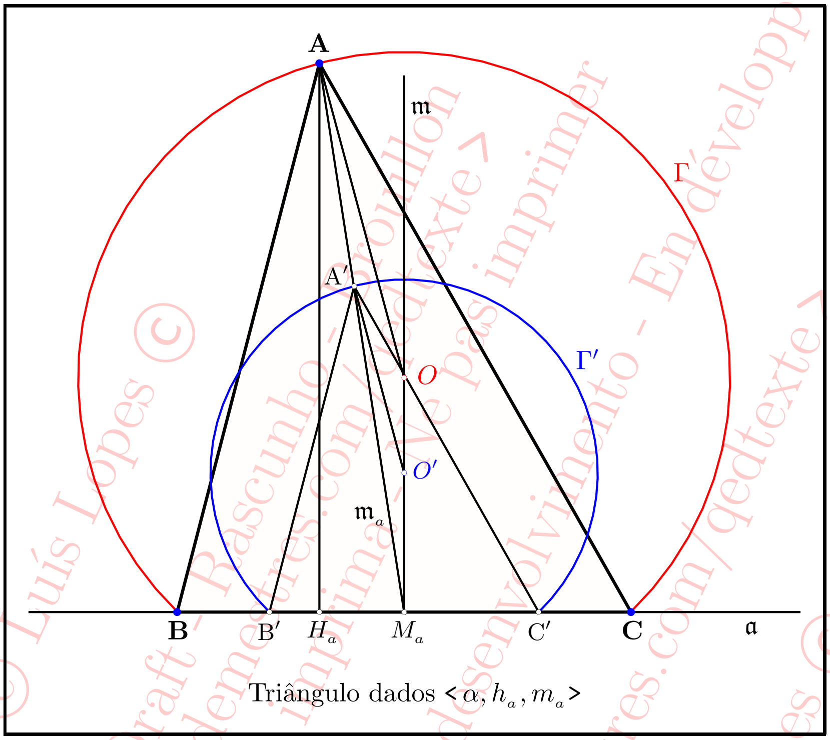


Figura 5.57: Exercício 49 — Quinto procedimento.

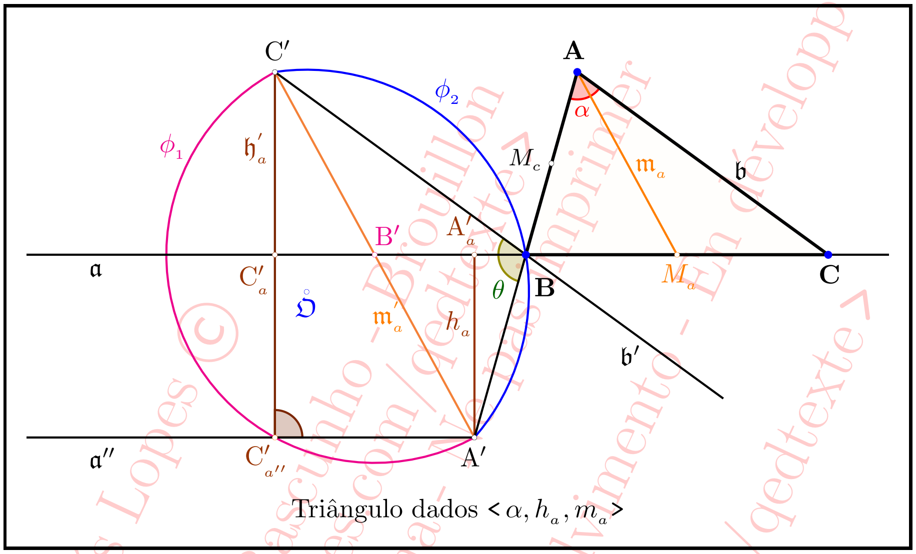
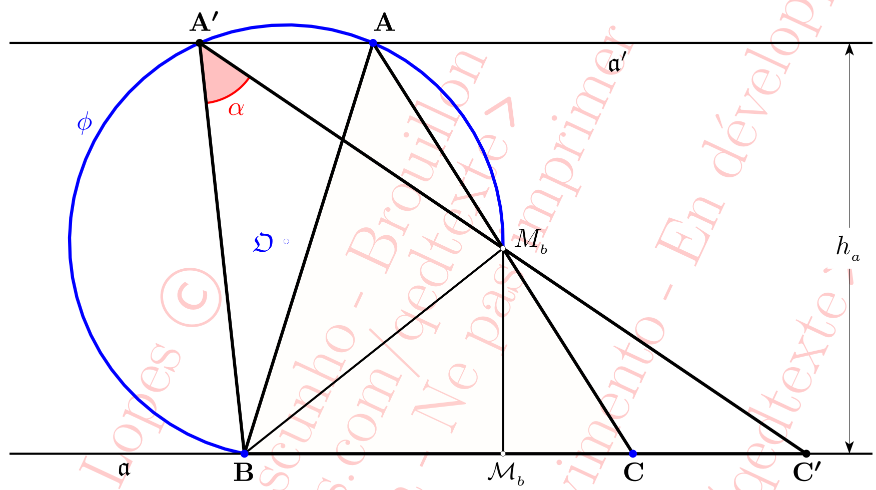


Figura 5.58: Exercício 49 — Sexto procedimento.



Triângulo dados <α, h_a, m_b>

Figura 5.59: Exercício 50 — Primeiro procedimento.

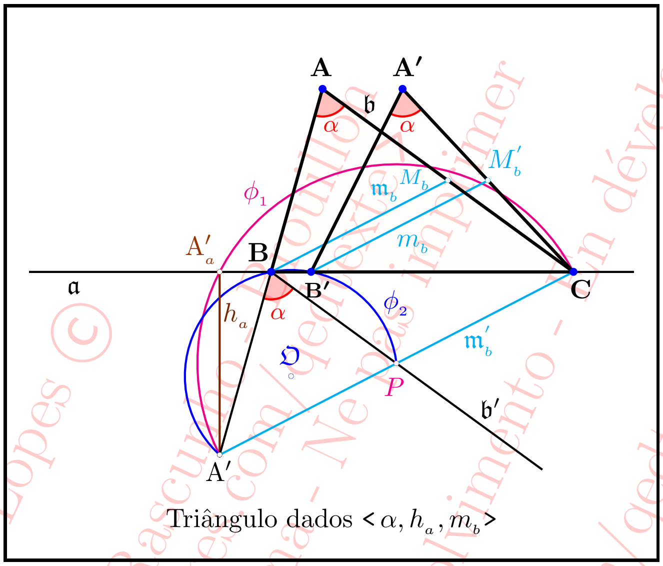


Figura 5.60: Exercício 50 — Segundo procedimento.