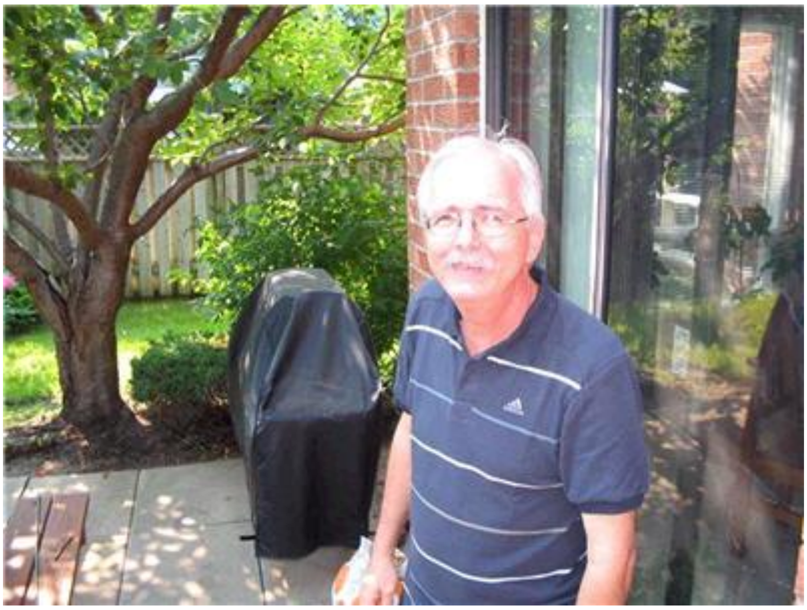


Manual de Construção de Triângulos

Todos os volumes disponibilizados ao público estão em

http://www.escolademestres.com/blogs/questoesresolvidas/

matematica/306-construcoes-geometricas-de-triangulosversao-

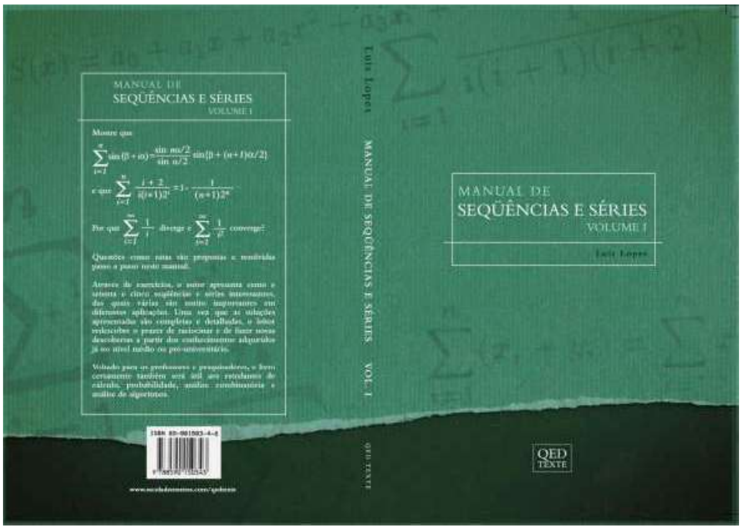
eletonica

Caso você goste do trabalho, há um link na mesma página para que você possa fazer uma contribuição para projeto através do Paypal.

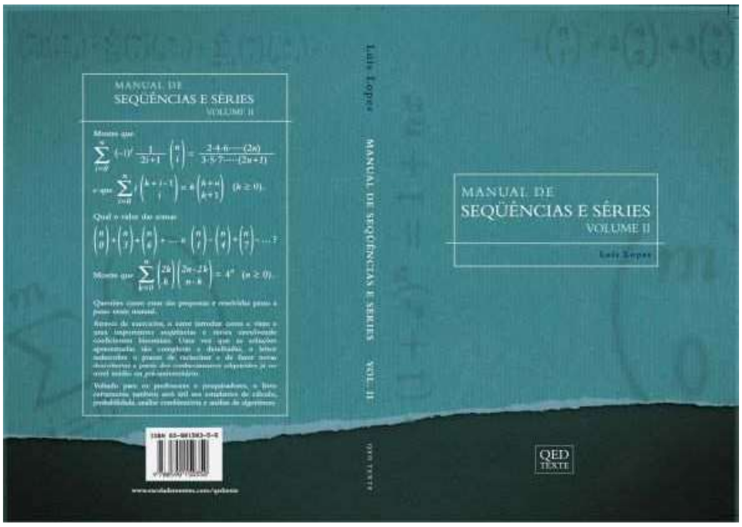
http://www.escolademestres.com/qedtexte

Tópicos abordados são os seguintes:

Seqüências e Séries -
Volume 1



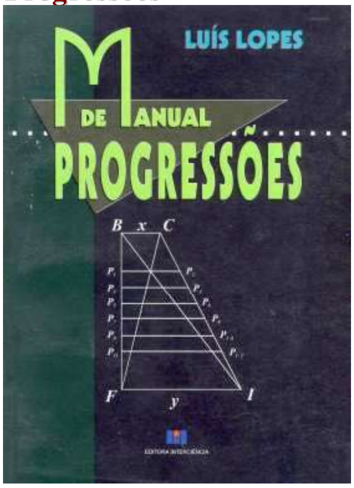
Volume 2



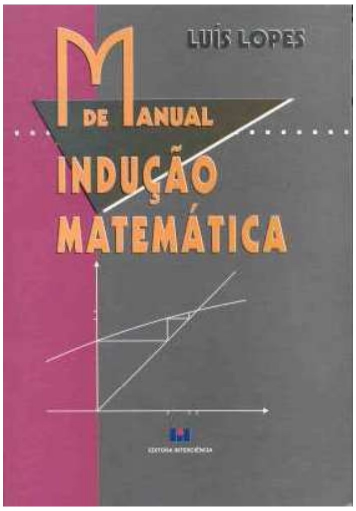
Coleção de Matemática do Prof Luís Lopes

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Progressões



Indução Matemática



http://www.escolademestres.com/qedtexte

This file was produced on January 16, 2015.
Montreal, CA and Rio de Janeiro, BR.
Work in progress.
Do not print. Spare the planet.
Contributions of all kinds are welcome.
Consider new constructions and insights,
algebraic developments and numerical solution,
discussion to existence and number of solutions,
references, etc.

Este arquivo foi criado em 16 de janeiro de 2015.
Montreal, CA e Rio de Janeiro, BR.
Trabalho em desenvolvimento.
Não imprima. Evite desperdícios.
Colaborações de qualquer natureza são
solicitadas.

Conteúdo

Lista de Figuras

CAPÍTULO 3

EXERCÍCIOS

O enunciado de todos os exercícios começa por: construir um triângulo $\triangle$ **ABC** sendo dados ...

Exercício 1) $\blacktriangle$ $<\alpha,\ \beta,\ \gamma>$ `(alpha,beta,gamma).`

Exercício 2) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ a>$ `(alpha,beta,a).`

Exercício 3) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ c>$ `(alpha,beta,c).`

Exercício 4) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ h_a>$ `(alpha,beta,h_a).`

Exercício 5) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ h_c>$ `(alpha,beta,h_c).`

Exercício 6) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ m_a>$ `(alpha,beta,m_a).`

Exercício 7) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ m_c>$ `(alpha,beta,m_c).`

Exercício 8) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ d_a>$ `(alpha,beta,d_a).`

Exercício 9) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ d_c>$ `(alpha,beta,d_c).`

Exercício 10) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ e_a>$ `(alpha,beta,e_a).`

Exercício 11) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ e_c>$ `(alpha,beta,e_c).`

Exercício 12) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ R>$ `(alpha,beta,R).`

Exercício 13) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r>$ `(alpha,beta,r).`

Exercício 14) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r_a>$ `(alpha,beta,r_a).`

Exercício 15) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r_c>$ `(alpha,beta,r_c).`

Exercício 16) △ $<\alpha,\ a,\ b>$ `(alpha,a,b)`.

Exercício 17) △ $<\alpha,\ b,\ c>$ `(alpha,b,c)`.

Exercício 18) △ $<\alpha,\ a,\ h_a>$ `(alpha,a,h_a)`.

Exercício 19) △ $<\alpha,\ a,\ h_b>$ `(alpha,a,h_b)`.

Exercício 20) △ $<\alpha,\ b,\ h_a>$ `(alpha,b,h_a)`.

Exercício 21) △ $<\alpha,\ b,\ h_b>$ `(alpha,b,h_b)`.

Exercício 22) ▲ $<\alpha,\ b,\ h_c>$ `(alpha,b,h_c)`.

Exercício 23) △ $<\alpha,\ a,\ m_a>$ `(alpha,a,m_a)`.

Exercício 24) △ $<\alpha,\ a,\ m_b>$ `(alpha,a,m_b)`.

Exercício 25) △ $<\alpha,\ b,\ m_a>$ `(alpha,b,m_a)`.

Exercício 26) △ $<\alpha,\ b,\ m_b>$ `(alpha,b,m_b)`.

Exercício 27) △ $<\alpha,\ b,\ m_c>$ `(alpha,b,m_c)`.

Exercício 28) △ $<\alpha,\ a,\ d_a>$ `(alpha,a,d_a)`.

Exercício 29) $<\alpha,\ a,\ d_b>$ `(alpha,a,d_b)`.

Exercício 30) △ $<\alpha,\ b,\ d_a>$ `(alpha,b,d_a)`.

Exercício 31) $<\alpha,\ b,\ d_b>$ `(alpha,b,d_b)`.

Exercício 32) △ $<\alpha,\ b,\ d_c>$ `(alpha,b,d_c)`.

Exercício 33) △ $<\alpha,\ a,\ e_a>$ `(alpha,a,e_a)`.

Exercício 34) $<\alpha,\ a,\ e_b>$ `(alpha,a,e_b)`.

Exercício 35) △ $<\alpha,\ b,\ e_a>$ `(alpha,b,e_a)`.

Exercício 36) $<\alpha,\ b,\ e_b>$ `(alpha,b,e_b)`.

Exercício 37) △ $<\alpha,\ b,\ e_c>$ `(alpha,b,e_c)`.

Exercício 38) ▲ $<\alpha,\ a,\ R>$ `(alpha,a,R)`.

Exercício 39) △ $<\alpha,\ b,\ R>$ `(alpha,b,R)`.

Exercício 40) △ $<\alpha,\ a,\ r>$ `(alpha,a,r)`.

Exercício 41) △ $<\alpha,\ b,\ r>$ `(alpha,b,r)`.

Exercício 42) △ $<\alpha,\ a,\ r_a>$ `(alpha,a,r_a)`.

Exercício 43) △ $<\alpha,\ a,\ r_b>$ `(alpha,a,r_b)`.

Exercício 44) △ $<\alpha,\ b,\ r_a>$ `(alpha,b,r_a)`.

Exercício 45) $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, r_b>$ `(alpha,b,r_b)`.

Exercício 46) $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, r_c>$ `(alpha,b,r_c)`.

Exercício 47) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, h_b>$ `(alpha,h_a,h_b)`.

Exercício 48) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, h_c>$ `(alpha,h_b,h_c)`.

Exercício 49) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, m_a>$ `(alpha,h_a,m_a)`.

Exercício 50) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, m_b>$ `(alpha,h_a,m_b)`.

Exercício 51) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, m_a>$ `(alpha,h_b,m_a)`.

Exercício 52) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, m_b>$ `(alpha,h_b,m_b)`.

Exercício 53) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, m_c>$ `(alpha,h_b,m_c)`.

Exercício 54) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, d_a>$ `(alpha,h_a,d_a)`.

Exercício 55) $<\alpha,\, h_a,\, d_b>$ `(alpha,h_a,d_b)`.

Exercício 56) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, d_a>$ `(alpha,h_b,d_a)`.

Exercício 57) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, d_b>$ `(alpha,h_b,d_b)`.

Exercício 58) $<\alpha,\, h_b,\, d_c>$ `(alpha,h_b,d_c)`.

Exercício 59) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, e_a>$ `(alpha,h_a,e_a)`.

Exercício 60) $<\alpha,\, h_a,\, e_b>$ `(alpha,h_a,e_b)`.

Exercício 61) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, e_a>$ `(alpha,h_b,e_a)`.

Exercício 62) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, e_b>$ `(alpha,h_b,e_b)`.

Exercício 63) $<\alpha,\, h_b,\, e_c>$ `(alpha,h_b,e_c)`.

Exercício 64) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, R>$ `(alpha,h_a,R)`.

Exercício 65) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, R>$ `(alpha,h_b,R)`.

Exercício 66) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, r>$ `(alpha,h_a,r)`.

Exercício 67) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, r>$ `(alpha,h_b,r)`.

Exercício 68) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, r_a>$ `(alpha,h_a,r_a)`.

Exercício 69) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, r_b>$ `(alpha,h_a,r_b)`.

Exercício 70) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, r_a>$ `(alpha,h_b,r_a)`.

Exercício 71) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, r_b>$ `(alpha,h_b,r_b)`.

Exercício 72) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, r_c>$ `(alpha,h_b,r_c)`.

Exercício 73) $\triangle$ $<\alpha,\, m_a,\, m_b>$ `(alpha,m_a,m_b)`.

Exercício 74) $\triangle$ $<\alpha,\, m_b,\, m_c>$ `(alpha,m_b,m_c)`.

Exercício 75) $\triangle$ $<\alpha,\, m_a,\, d_a>$ `(alpha,m_a,d_a)`.

Exercício 76) $<\alpha,\, m_a,\, d_b>$ `(alpha,m_a,d_b)`.

Exercício 77) $<\alpha,\, m_b,\, d_a>$ `(alpha,m_b,d_a)`.

Exercício 78) $<\alpha,\, m_b,\, d_b>$ `(alpha,m_b,d_b)`.

Exercício 79) $<\alpha,\, m_b,\, d_c>$ `(alpha,m_b,d_c)`.

Exercício 80) $\triangle$ $<\alpha,\, m_a,\, e_a>$ `(alpha,m_a,e_a)`.

Exercício 81) $<\alpha,\, m_a,\, e_b>$ `(alpha,m_a,e_b)`.

Exercício 82) $<\alpha,\, m_b,\, e_a>$ `(alpha,m_b,e_a)`.

Exercício 83) $<\alpha,\, m_b,\, e_b>$ `(alpha,m_b,e_b)`.

Exercício 84) $<\alpha,\, m_b,\, e_c>$ `(alpha,m_b,e_c)`.

Exercício 85) $\triangle$ $<\alpha,\, m_a,\, R>$ `(alpha,m_a,R)`.

Exercício 86) $\triangle$ $<\alpha,\, m_b,\, R>$ `(alpha,m_b,R)`.

Exercício 87) $\triangle$ $<\alpha,\, m_a,\, r>$ `(alpha,m_a,r)`.

Exercício 88) $<\alpha,\, m_b,\, r>$ `(alpha,m_b,r)`.

Exercício 89) $\triangle$ $<\alpha,\, m_a,\, r_a>$ `(alpha,m_a,r_a)`.

Exercício 90) $\triangle$ $<\alpha,\, m_a,\, r_b>$ `(alpha,m_a,r_b)`.

Exercício 91) $<\alpha,\, m_b,\, r_a>$ `(alpha,m_b,r_a)`.

Exercício 92) $<\alpha,\, m_b,\, r_b>$ `(alpha,m_b,r_b)`.

Exercício 93) $<\alpha,\, m_b,\, r_c>$ `(alpha,m_b,r_c)`.

Exercício 94) $<\alpha,\, d_a,\, d_b>$ `(alpha,d_a,d_b)`.

Exercício 95) $<\alpha,\, d_b,\, d_c>$ `(alpha,d_b,d_c)`.

Exercício 96) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, e_a>$ `(alpha,d_a,e_a)`.

Exercício 97) $<\alpha,\, d_a,\, e_b>$ `(alpha,d_a,e_b)`.

Exercício 98) $<\alpha,\, d_b,\, e_a>$ `(alpha,d_b,e_a)`.

Exercício 99) $\triangle$ $<\alpha,\, d_b,\, e_b>$ `(alpha,d_b,e_b)`.

Exercício 100) $<\alpha,\, d_b,\, e_c>$ `(alpha,d_b,e_c)`.

Exercício 101) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, R>$ `(alpha,d_a,R)`.

Exercício 102) $<\alpha,\, d_b,\, R>$ `(alpha,d_b,R)`.

Exercício 103) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, r>$ `(alpha,d_a,r)`.

Exercício 104) $\triangle$ $<\alpha,\, d_b,\, r>$ `(alpha,d_b,r)`.

Exercício 105) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, r_a>$ `(alpha,d_a,r_a)`.

Exercício 106) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, r_b>$ `(alpha,d_a,r_b)`.

Exercício 107) $<\alpha,\, d_b,\, r_a>$ `(alpha,d_b,r_a)`.

Exercício 108) $\triangle$ $<\alpha,\, d_b,\, r_b>$ `(alpha,d_b,r_b)`.

Exercício 109) $<\alpha,\, d_b,\, r_c>$ `(alpha,d_b,r_c)`.

Exercício 110) $<\alpha,\, e_a,\, e_b>$ `(alpha,e_a,e_b)`.

Exercício 111) $<\alpha,\, e_b,\, e_c>$ `(alpha,e_b,e_c)`.

Exercício 112) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, R>$ `(alpha,e_a,R)`.

Exercício 113) $<\alpha,\, e_b,\, R>$ `(alpha,e_b,R)`.

Exercício 114) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, r>$ `(alpha,e_a,r)`.

Exercício 115) $<\alpha,\, e_b,\, r>$ `(alpha,e_b,r)`.

Exercício 116) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, r_a>$ `(alpha,e_a,r_a)`.

Exercício 117) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, r_b>$ `(alpha,e_a,r_b)`.

Exercício 118) $\triangle$ $<\alpha,\, e_b,\, r_a>$ `(alpha,e_b,r_a)`.

Exercício 119) $<\alpha,\, e_b,\, r_b>$ `(alpha,e_b,r_b)`.

Exercício 120) $\triangle$ $<\alpha,\, e_b,\, r_c>$ `(alpha,e_b,r_c)`.

Exercício 121) $\triangle$ $<\alpha,\, R,\, r>$ `(alpha,R,r)`.

Exercício 122) $\triangle$ $<\alpha,\, R,\, r_a>$ `(alpha,R,r_a)`.

Exercício 123) $\triangle$ $<\alpha,\, R,\, r_b>$ `(alpha,R,r_b)`.

Exercício 124) $\triangle$ $<\alpha,\, r,\, r_a>$ `(alpha,r,r_a)`.

Exercício 125) $\triangle$ $<\alpha,\, r,\, r_b>$ `(alpha,r,r_b)`.

Exercício 126) $\triangle$ $<\alpha,\, r_a,\, r_b>$ `(alpha,r_a,r_b)`.

Exercício 127) $\triangle$ $<\alpha,\, r_b,\, r_c>$ `(alpha,r_b,r_c)`.

Exercício 128) $\triangle$ $<a,\, b,\, c>$ `(a,b,c)`.

Exercício 129) $\triangle$ $<a,\, b,\, h_a>$ `(a,b,h_a)`.

Exercício 130) $\triangle$ $<a,\, b,\, h_c>$ `(a,b,h_c)`.

Exercício 131) $\triangle$ $<a,\, b,\, m_a>$ `(a,b,m_a)`.

Exercício 132) △ $<a,\ b,\ m_c>$ `(a,b,m_c)`.

Exercício 133) $<a,\ b,\ d_a>$ `(a,b,d_a)`.

Exercício 134) △ $<a,\ b,\ d_c>$ `(a,b,d_c)`.

Exercício 135) $<a,\ b,\ e_a>$ `(a,b,e_a)`.

Exercício 136) △ $<a,\ b,\ e_c>$ `(a,b,e_c)`.

Exercício 137) △ $<a,\ b,\ R>$ `(a,b,R)`.

Exercício 138) $<a,\ b,\ r>$ `(a,b,r)`.

Exercício 139) $<a,\ b,\ r_a>$ `(a,b,r_a)`.

Exercício 140) $<a,\ b,\ r_c>$ `(a,b,r_c)`.

Exercício 141) △ $<a,\ h_a,\ h_b>$ `(a,h_a,h_b)`.

Exercício 142) △ $<a,\ h_b,\ h_c>$ `(a,h_b,h_c)`.

Exercício 143) △ $<a,\ h_a,\ m_a>$ `(a,h_a,m_a)`.

Exercício 144) △ $<a,\ h_a,\ m_b>$ `(a,h_a,m_b)`.

Exercício 145) △ $<a,\ h_b,\ m_a>$ `(a,h_b,m_a)`.

Exercício 146) △ $<a,\ h_b,\ m_b>$ `(a,h_b,m_b)`.

Exercício 147) △ $<a,\ h_b,\ m_c>$ `(a,h_b,m_c)`.

Exercício 148) △ $<a,\ h_a,\ d_a>$ `(a,h_a,d_a)`.

Exercício 149) $<a,\ h_a,\ d_b>$ `(a,h_a,d_b)`.

Exercício 150) $<a,\ h_b,\ d_a>$ `(a,h_b,d_a)`.

Exercício 151) △ $<a,\ h_b,\ d_b>$ `(a,h_b,d_b)`.

Exercício 152) △ $<a,\ h_b,\ d_c>$ `(a,h_b,d_c)`.

Exercício 153) △ $<a,\ h_a,\ e_a>$ `(a,h_a,e_a)`.

Exercício 154) $<a,\ h_a,\ e_b>$ `(a,h_a,e_b)`.

Exercício 155) $<a,\ h_b,\ e_a>$ `(a,h_b,e_a)`.

Exercício 156) △ $<a,\ h_b,\ e_b>$ `(a,h_b,e_b)`.

Exercício 157) △ $<a,\ h_b,\ e_c>$ `(a,h_b,e_c)`.

Exercício 158) △ $<a,\ h_a,\ R>$ `(a,h_a,R)`.

Exercício 159) △ $<a,\ h_b,\ R>$ `(a,h_b,R)`.

Exercício 160) △ $<a,\ h_a,\ r>$ `(a,h_a,r)`.

Exercício 161) $\triangle$ $<a, h_b, r>$ `(a,h_b,r).`

Exercício 162) $\triangle$ $<a, h_a, r_a>$ `(a,h_a,r_a).`

Exercício 163) $\triangle$ $<a, h_a, r_b>$ `(a,h_a,r_b).`

Exercício 164) $\triangle$ $<a, h_b, r_a>$ `(a,h_b,r_a).`

Exercício 165) $\triangle$ $<a, h_b, r_b>$ `(a,h_b,r_b).`

Exercício 166) $\triangle$ $<a, h_b, r_c>$ `(a,h_b,r_c).`

Exercício 167) $\triangle$ $<a, m_a, m_b>$ `(a,m_a,m_b).`

Exercício 168) $\triangle$ $<a, m_b, m_c>$ `(a,m_b,m_c).`

Exercício 169) $\triangle$ $<a, m_a, d_a>$ `(a,m_a,d_a).`

Exercício 170) $<a, m_a, d_b>$ `(a,m_a,d_b).`

Exercício 171) $<a, m_b, d_a>$ `(a,m_b,d_a).`

Exercício 172) $<a, m_b, d_b>$ `(a,m_b,d_b).`

Exercício 173) $<a, m_b, d_c>$ `(a,m_b,d_c).`

Exercício 174) $\triangle$ $<a, m_a, e_a>$ `(a,m_a,e_a).`

Exercício 175) $<a, m_a, e_b>$ `(a,m_a,e_b).`

Exercício 176) $<a, m_b, e_a>$ `(a,m_b,e_a).`

Exercício 177) $<a, m_b, e_b>$ `(a,m_b,e_b).`

Exercício 178) $<a, m_b, e_c>$ `(a,m_b,e_c).`

Exercício 179) $\triangle$ $<a, m_a, R>$ `(a,m_a,R).`

Exercício 180) $\triangle$ $<a, m_b, R>$ `(a,m_b,R).`

Exercício 181) $<a, m_a, r>$ `(a,m_a,r).`

Exercício 182) $<a, m_b, r>$ `(a,m_b,r).`

Exercício 183) $<a, m_a, r_a>$ `(a,m_a,r_a).`

Exercício 184) $<a, m_a, r_b>$ `(a,m_a,r_b).`

Exercício 185) $<a, m_b, r_a>$ `(a,m_b,r_a).`

Exercício 186) $<a, m_b, r_b>$ `(a,m_b,r_b).`

Exercício 187) $<a, m_b, r_c>$ `(a,m_b,r_c).`

Exercício 188) $<a, d_a, d_b>$ `(a,d_a,d_b).`

Exercício 189) $<a, d_b, d_c>$ `(a,d_b,d_c).`

Exercício 190) $\triangle$ $\langle a, d_a, e_a \rangle$ `(a,d_a,e_a).`

Exercício 191) $\langle a, d_a, e_b \rangle$ `(a,d_a,e_b).`

Exercício 192) $\langle a, d_b, e_a \rangle$ `(a,d_b,e_a).`

Exercício 193) $\triangle$ $\langle a, d_b, e_b \rangle$ `(a,d_b,e_b).`

Exercício 194) $\langle a, d_b, e_c \rangle$ `(a,d_b,e_c).`

Exercício 195) $\triangle$ $\langle a, d_a, R \rangle$ `(a,d_a,R).`

Exercício 196) $\langle a, d_b, R \rangle$ `(a,d_b,R).`

Exercício 197) $\langle a, d_a, r \rangle$ `(a,d_a,r).`

Exercício 198) $\langle a, d_b, r \rangle$ `(a,d_b,r).`

Exercício 199) $\langle a, d_a, r_a \rangle$ `(a,d_a,r_a).`

Exercício 200) $\langle a, d_a, r_b \rangle$ `(a,d_a,r_b).`

Exercício 201) $\langle a, d_b, r_a \rangle$ `(a,d_b,r_a).`

Exercício 202) $\langle a, d_b, r_b \rangle$ `(a,d_b,r_b).`

Exercício 203) $\langle a, d_b, r_c \rangle$ `(a,d_b,r_c).`

Exercício 204) $\langle a, e_a, e_b \rangle$ `(a,e_a,e_b).`

Exercício 205) $\langle a, e_b, e_c \rangle$ `(a,e_b,e_c).`

Exercício 206) $\triangle$ $\langle a, e_a, R \rangle$ `(a,e_a,R).`

Exercício 207) $\langle a, e_b, R \rangle$ `(a,e_b,R).`

Exercício 208) $\langle a, e_a, r \rangle$ `(a,e_a,r).`

Exercício 209) $\langle a, e_b, r \rangle$ `(a,e_b,r).`

Exercício 210) $\langle a, e_a, r_a \rangle$ `(a,e_a,r_a).`

Exercício 211) $\langle a, e_a, r_b \rangle$ `(a,e_a,r_b).`

Exercício 212) $\langle a, e_b, r_a \rangle$ `(a,e_b,r_a).`

Exercício 213) $\langle a, e_b, r_b \rangle$ `(a,e_b,r_b).`

Exercício 214) $\langle a, e_b, r_c \rangle$ `(a,e_b,r_c).`

Exercício 215) $\triangle$ $\langle a, R, r \rangle$ `(a,R,r).`

Exercício 216) $\triangle$ $\langle a, R, r_a \rangle$ `(a,R,r_a).`

Exercício 217) $\triangle$ $\langle a, R, r_b \rangle$ `(a,R,r_b).`

Exercício 218) $\triangle$ $\langle a, r, r_a \rangle$ `(a,r,r_a).`

Exercício 219) $\triangle$ $< a, r, r_b >$ `(a,r,r_b).`

Exercício 220) $\triangle$ $< a, r_a, r_b >$ `(a,r_a,r_b).`

Exercício 221) $\triangle$ $< a, r_b, r_c >$ `(a,r_b,r_c).`

Exercício 222) $\triangle$ $< h_a, h_b, h_c >$ `(h_a,h_b,h_c).`

Exercício 223) $\triangle$ $< h_a, h_b, m_a >$ `(h_a,h_b,m_a).`

Exercício 224) $\triangle$ $< h_a, h_b, m_c >$ `(h_a,h_b,m_c).`

Exercício 225) $< h_a, h_b, d_a >$ `(h_a,h_b,d_a).`

Exercício 226) $\triangle$ $< h_a, h_b, d_c >$ `(h_a,h_b,d_c).`

Exercício 227) $< h_a, h_b, e_a >$ `(h_a,h_b,e_a).`

Exercício 228) $\triangle$ $< h_a, h_b, e_c >$ `(h_a,h_b,e_c).`

Exercício 229) $< h_a, h_b, R >$ `(h_a,h_b,R).`

Exercício 230) $\triangle$ $< h_a, h_b, r >$ `(h_a,h_b,r).`

Exercício 231) $\triangle$ $< h_a, h_b, r_a >$ `(h_a,h_b,r_a).`

Exercício 232) $\triangle$ $< h_a, h_b, r_c >$ `(h_a,h_b,r_c).`

Exercício 233) $\triangle$ $< h_a, m_a, m_b >$ `(h_a,m_a,m_b).`

Exercício 234) $\triangle$ $< h_a, m_b, m_c >$ `(h_a,m_b,m_c).`

Exercício 235) $\triangle$ $< h_a, m_a, d_a >$ `(h_a,m_a,d_a).`

Exercício 236) $< h_a, m_a, d_b >$ `(h_a,m_a,d_b).`

Exercício 237) $\triangle$ $< h_a, m_b, d_a >$ `(h_a,m_b,d_a).`

Exercício 238) $< h_a, m_b, d_b >$ `(h_a,m_b,d_b).`

Exercício 239) $< h_a, m_b, d_c >$ `(h_a,m_b,d_c).`

Exercício 240) $\triangle$ $< h_a, m_a, e_a >$ `(h_a,m_a,e_a).`

Exercício 241) $< h_a, m_a, e_b >$ `(h_a,m_a,e_b).`

Exercício 242) $\triangle$ $< h_a, m_b, e_a >$ `(h_a,m_b,e_a).`

Exercício 243) $< h_a, m_b, e_b >$ `(h_a,m_b,e_b).`

Exercício 244) $< h_a, m_b, e_c >$ `(h_a,m_b,e_c).`

Exercício 245) $\triangle$ $< h_a, m_a, R >$ `(h_a,m_a,R).`

Exercício 246) $< h_a, m_b, R >$ `(h_a,m_b,R).`

Exercício 247) $\triangle$ $< h_a, m_a, r >$ `(h_a,m_a,r).`

Exercício 248) △ $<h_a, m_b, r>$ `(h_a,m_b,r)`.

Exercício 249) △ $<h_a, m_a, r_a>$ `(h_a,m_a,r_a)`.

Exercício 250) △ $<h_a, m_a, r_b>$ `(h_a,m_a,r_b)`.

Exercício 251) △ $<h_a, m_b, r_a>$ `(h_a,m_b,r_a)`.

Exercício 252) △ $<h_a, m_b, r_b>$ `(h_a,m_b,r_b)`.

Exercício 253) △ $<h_a, m_b, r_c>$ `(h_a,m_b,r_c)`.

Exercício 254) $<h_a, d_a, d_b>$ `(h_a,d_a,d_b)`.

Exercício 255) $<h_a, d_b, d_c>$ `(h_a,d_b,d_c)`.

Exercício 256) ▲ $<h_a, d_a, e_a>$ `(h_a,d_a,e_a)`.

Exercício 257) $<h_a, d_a, e_b>$ `(h_a,d_a,e_b)`.

Exercício 258) $<h_a, d_b, e_a>$ `(h_a,d_b,e_a)`.

Exercício 259) $<h_a, d_b, e_b>$ `(h_a,d_b,e_b)`.

Exercício 260) $<h_a, d_b, e_c>$ `(h_a,d_b,e_c)`.

Exercício 261) △ $<h_a, d_a, R>$ `(h_a,d_a,R)`.

Exercício 262) $<h_a, d_b, R>$ `(h_a,d_b,R)`.

Exercício 263) △ $<h_a, d_a, r>$ `(h_a,d_a,r)`.

Exercício 264) $<h_a, d_b, r>$ `(h_a,d_b,r)`.

Exercício 265) △ $<h_a, d_a, r_a>$ `(h_a,d_a,r_a)`.

Exercício 266) △ $<h_a, d_a, r_b>$ `(h_a,d_a,r_b)`.

Exercício 267) $<h_a, d_b, r_a>$ `(h_a,d_b,r_a)`.

Exercício 268) $<h_a, d_b, r_b>$ `(h_a,d_b,r_b)`.

Exercício 269) $<h_a, d_b, r_c>$ `(h_a,d_b,r_c)`.

Exercício 270) $<h_a, e_a, e_b>$ `(h_a,e_a,e_b)`.

Exercício 271) $<h_a, e_b, e_c>$ `(h_a,e_b,e_c)`.

Exercício 272) △ $<h_a, e_a, R>$ `(h_a,e_a,R)`.

Exercício 273) $<h_a, e_b, R>$ `(h_a,e_b,R)`.

Exercício 274) △ $<h_a, e_a, r>$ `(h_a,e_a,r)`.

Exercício 275) $<h_a, e_b, r>$ `(h_a,e_b,r)`.

Exercício 276) △ $<h_a, e_a, r_a>$ `(h_a,e_a,r_a)`.

Exercício 277) △ $<h_a, e_a, r_b>$ `(h_a,e_a,r_b).`

Exercício 278) $<h_a, e_b, r_a>$ `(h_a,e_b,r_a).`

Exercício 279) $<h_a, e_b, r_b>$ `(h_a,e_b,r_b).`

Exercício 280) $<h_a, e_b, r_c>$ `(h_a,e_b,r_c).`

Exercício 281) △ $<h_a, R, r>$ `(h_a,R,r).`

Exercício 282) △ $<h_a, R, r_a>$ `(h_a,R,r_a).`

Exercício 283) △ $<h_a, R, r_b>$ `(h_a,R,r_b).`

Exercício 284) ▲ $<h_a, r, r_a>$ `(h_a,r,r_a).`

Exercício 285) △ $<h_a, r, r_b>$ `(h_a,r,r_b).`

Exercício 286) △ $<h_a, r_a, r_b>$ `(h_a,r_a,r_b).`

Exercício 287) ▲ $<h_a, r_b, r_c>$ `(h_a,r_b,r_c).`

Exercício 288) △ $<m_a, m_b, m_c>$ `(m_a,m_b,m_c).`

Exercício 289) $<m_a, m_b, d_a>$ `(m_a,m_b,d_a).`

Exercício 290) $<m_a, m_b, d_c>$ `(m_a,m_b,d_c).`

Exercício 291) $<m_a, m_b, e_a>$ `(m_a,m_b,e_a).`

Exercício 292) $<m_a, m_b, e_c>$ `(m_a,m_b,e_c).`

Exercício 293) $<m_a, m_b, R>$ `(m_a,m_b,R).`

Exercício 294) $<m_a, m_b, r>$ `(m_a,m_b,r).`

Exercício 295) $<m_a, m_b, r_a>$ `(m_a,m_b,r_a).`

Exercício 296) $<m_a, m_b, r_c>$ `(m_a,m_b,r_c).`

Exercício 297) $<m_a, d_a, d_b>$ `(m_a,d_a,d_b).`

Exercício 298) $<m_a, d_b, d_c>$ `(m_a,d_b,d_c).`

Exercício 299) △ $<m_a, d_a, e_a>$ `(m_a,d_a,e_a).`

Exercício 300) $<m_a, d_a, e_b>$ `(m_a,d_a,e_b).`

Exercício 301) $<m_a, d_b, e_a>$ `(m_a,d_b,e_a).`

Exercício 302) △ $<m_a, d_b, e_b>$ `(m_a,d_b,e_b).`

Exercício 303) $<m_a, d_b, e_c>$ `(m_a,d_b,e_c).`

Exercício 304) △ $<m_a, d_a, R>$ `(m_a,d_a,R).`

Exercício 305) $<m_a, d_b, R>$ `(m_a,d_b,R).`

Exercício 306) $<m_a, d_a, r>$ `(m_a,d_a,r).`

Exercício 307) $<m_a, d_b, r>$ `(m_a,d_b,r).`

Exercício 308) $<m_a, d_a, r_a>$ `(m_a,d_a,r_a).`

Exercício 309) $<m_a, d_a, r_b>$ `(m_a,d_a,r_b).`

Exercício 310) $<m_a, d_b, r_a>$ `(m_a,d_b,r_a).`

Exercício 311) $<m_a, d_b, r_b>$ `(m_a,d_b,r_b).`

Exercício 312) $<m_a, d_b, r_c>$ `(m_a,d_b,r_c).`

Exercício 313) $<m_a, e_a, e_b>$ `(m_a,e_a,e_b).`

Exercício 314) $<m_a, e_b, e_c>$ `(m_a,e_b,e_c).`

Exercício 315) $\triangle$ $<m_a, e_a, R>$ `(m_a,e_a,R).`

Exercício 316) $<m_a, e_b, R>$ `(m_a,e_b,R).`

Exercício 317) $<m_a, e_a, r>$ `(m_a,e_a,r).`

Exercício 318) $<m_a, e_b, r>$ `(m_a,e_b,r).`

Exercício 319) $<m_a, e_a, r_a>$ `(m_a,e_a,r_a).`

Exercício 320) $<m_a, e_a, r_b>$ `(m_a,e_a,r_b).`

Exercício 321) $<m_a, e_b, r_a>$ `(m_a,e_b,r_a).`

Exercício 322) $<m_a, e_b, r_b>$ `(m_a,e_b,r_b).`

Exercício 323) $<m_a, e_b, r_c>$ `(m_a,e_b,r_c).`

Exercício 324) $<m_a, R, r>$ `(m_a,R,r).`

Exercício 325) $<m_a, R, r_a>$ `(m_a,R,r_a).`

Exercício 326) $<m_a, R, r_b>$ `(m_a,R,r_b).`

Exercício 327) $\triangle$ $<m_a, r, r_a>$ `(m_a,r,r_a).`

Exercício 328) $\triangle$ $<m_a, r, r_b>$ `(m_a,r,r_b).`

Exercício 329) $\triangle$ $<m_a, r_a, r_b>$ `(m_a,r_a,r_b).`

Exercício 330) $\triangle$ $<m_a, r_b, r_c>$ `(m_a,r_b,r_c).`

Exercício 331) $<d_a, d_b, d_c>$ `(d_a,d_b,d_c).`

Exercício 332) $<d_a, d_b, e_a>$ `(d_a,d_b,e_a).`

Exercício 333) $<d_a, d_b, e_c>$ `(d_a,d_b,e_c).`

Exercício 334) $<d_a, d_b, R>$ `(d_a,d_b,R).`

Exercício 335) $< d_a, d_b, r >$ `(d_a,d_b,r).`

Exercício 336) $< d_a, d_b, r_a >$ `(d_a,d_b,r_a).`

Exercício 337) $< d_a, d_b, r_c >$ `(d_a,d_b,r_c).`

Exercício 338) $< d_a, e_a, e_b >$ `(d_a,e_a,e_b).`

Exercício 339) $< d_a, e_b, e_c >$ `(d_a,e_b,e_c).`

Exercício 340) $\triangle$ $< d_a, e_a, R >$ `(d_a,e_a,R).`

Exercício 341) $< d_a, e_b, R >$ `(d_a,e_b,R).`

Exercício 342) $\triangle$ $< d_a, e_a, r >$ `(d_a,e_a,r).`

Exercício 343) $< d_a, e_b, r >$ `(d_a,e_b,r).`

Exercício 344) $\triangle$ $< d_a, e_a, r_a >$ `(d_a,e_a,r_a).`

Exercício 345) $\triangle$ $< d_a, e_a, r_b >$ `(d_a,e_a,r_b).`

Exercício 346) $< d_a, e_b, r_a >$ `(d_a,e_b,r_a).`

Exercício 347) $< d_a, e_b, r_b >$ `(d_a,e_b,r_b).`

Exercício 348) $< d_a, e_b, r_c >$ `(d_a,e_b,r_c).`

Exercício 349) $< d_a, R, r >$ `(d_a,R,r).`

Exercício 350) $< d_a, R, r_a >$ `(d_a,R,r_a).`

Exercício 351) $< d_a, R, r_b >$ `(d_a,R,r_b).`

Exercício 352) $\triangle$ $< d_a, r, r_a >$ `(d_a,r,r_a).`

Exercício 353) $< d_a, r, r_b >$ `(d_a,r,r_b).`

Exercício 354) $< d_a, r_a, r_b >$ `(d_a,r_a,r_b).`

Exercício 355) $\triangle$ $< d_a, r_b, r_c >$ `(d_a,r_b,r_c).`

Exercício 356) $< e_a, e_b, e_c >$ `(e_a,e_b,e_c).`

Exercício 357) $< e_a, e_b, R >$ `(e_a,e_b,R).`

Exercício 358) $< e_a, e_b, r >$ `(e_a,e_b,r).`

Exercício 359) $< e_a, e_b, r_a >$ `(e_a,e_b,r_a).`

Exercício 360) $< e_a, e_b, r_c >$ `(e_a,e_b,r_c).`

Exercício 361) $< e_a, R, r >$ `(e_a,R,r).`

Exercício 362) $< e_a, R, r_a >$ `(e_a,R,r_a).`

Exercício 363) $< e_a, R, r_b >$ `(e_a,R,r_b).`

Exercício 364) △ $<e_a, r, r_a>$ `(e_a,r,r_a).`

Exercício 365) $<e_a, r, r_b>$ `(e_a,r,r_b).`

Exercício 366) $<e_a, r_a, r_b>$ `(e_a,r_a,r_b).`

Exercício 367) △ $<e_a, r_b, r_c>$ `(e_a,r_b,r_c).`

Exercício 368) △ $<R, r, r_a>$ `(R,r,r_a).`

Exercício 369) △ $<R, r_a, r_b>$ `(R,r_a,r_b).`

Exercício 370) △ $<r, r_a, r_b>$ `(r,r_a,r_b).`

Exercício 371) △ $<r_a, r_b, r_c>$ `(r_a,r_b,r_c).`

CAPÍTULO 4

CONSTRUÇÕES E SOLUÇÕES ALGÉBRICAS

Exercício 51) $<\alpha, h_b, m_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, h_b, c>$ formam um datum (ver o exercício 19), conhecemos $<\alpha, c, m_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 25).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 52) $<\alpha, h_b, m_b>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, h_b, c>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, c, m_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 27).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 53) $<\alpha, h_b, m_c>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, h_b, c>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, c, m_c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 26).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 54) $<\alpha, h_a, d_a>$

Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{A}H_aD_a$. Uma análise da figura 4.59 (ver a página 69) nos mostrará que o ponto H_a possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **A** vale h_a;

ii) um observador colocado em H_a enxerga o segmento $\overline{\mathbf{A}D_a}$ segundo um ângulo reto (H_a pertence ao arco capaz—ϕ_2—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{A}D_a}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.59, na página 69):

i) construir o ângulo α de vértice **A**, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) construir a bissetriz interna (reta $\mathfrak{d}_a$) do ângulo α;

iii) traçar o círculo $\phi_1 = (\mathbf{A}, d_a)$ e obter o ponto D_a ($D_a = \mathfrak{d}_a \cap \phi_1$);

iv) construir o arco capaz (círculo ϕ_2) do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{A}D_a}$;

v) traçar o círculo $\phi_3 = (\mathbf{A}, h_a)$ e obter o ponto H_a ($H_a = \phi_2 \cap \phi_3$);

vi) se $\mathfrak{a} = (H_a, D_a)$ é a reta definida pelos pontos H_a e D_a, então $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (notar que o triângulo que seria gerado por H'_a é congruente ao triângulo $\triangle\,\mathbf{ABC}$).

Exercício 55) $<\alpha, h_a, d_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$c = \frac{h_a}{\sin\beta} \tag{4.1}$$

$$ah_a = bh_b = bc\sin\alpha \Longrightarrow a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} \tag{4.2}$$

$$\frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c} = d_b \Longrightarrow \sin\tfrac{\beta}{2} = \frac{h_a b\sin\alpha}{d_b(h_a + b\sin\alpha)} \tag{4.3}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \tag{4.4}$$

Com o sistema (4.1)–(4.4) e sabendo que

$$\cos\beta = 1 - 2\sin^2\tfrac{\beta}{2}$$
$$\sin^2\beta = 4\sin^2\tfrac{\beta}{2}\big(1 - \sin^2\tfrac{\beta}{2}\big)$$

obtemos

$$4\Big(\frac{h_a b\sin\alpha}{d_b(h_a + b\sin\alpha)}\Big)^2\Big[1 - \Big(\frac{h_a b\sin\alpha}{d_b(h_a + b\sin\alpha)}\Big)^2\Big]b^2 =$$
$$= b^2\sin^2\alpha + h_a^2 - 2h_a b\sin\alpha\Big[1 - 2\Big(\frac{h_a b\sin\alpha}{d_b(h_a + b\sin\alpha)}\Big)^2\Big] \tag{4.5}$$

Se a equação (4.5) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \mathrm{Arccos}\,\frac{11}{14} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $h_a = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ e $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\mathrm{cm}$.

A equação (4.5) torna-se

$$77283b^6 - 1743805b^5 - 3782408b^4 + 22720320b^3 +$$
$$- 92198400b^2 + 2065244160b + 11565367296 = 0 \tag{‡}$$

Resolvendo (‡) com algum programa, obtemos quatro raízes complexas e duas raízes positivas as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$b_1 = 7\,\mathrm{cm} \;\Longrightarrow\; a_1 = 5\,\mathrm{cm} \text{ e } c_1 = 8\,\mathrm{cm}$$
$$b_2 = 24{,}076951\,7\,\mathrm{cm} \;\Longrightarrow\; a_2 = 18{,}196009\,2\,\mathrm{cm} \text{ e } c_2 = 8{,}464331\,6\,\mathrm{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $<a_1, b_1, c_1>$ e $<a_2, b_2, c_2>$ satisfazem todas as condições do problema.

Exercício 56) $<\alpha, h_b, d_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, h_b, c>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, c, d_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 30).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 57) $<\alpha, h_b, d_b>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, h_b, c>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, c, d_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 32).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 58) $<\alpha, h_b, d_c>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, h_b, c>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, c, d_c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 31).

Discussão: o problema possui 0 ou ao menos uma solução.

Exercício 59) $<\alpha, h_a, e_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<h_a, e_a, d_a>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, h_a, d_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 54).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Para mostrar que $<h_a, d_a, e_a>$ formam um datum, escrevemos (ver a figura 4.60, na página 70):

$$\frac{1}{d_a^2} + \frac{1}{e_a^2} = \frac{1}{h_a^2} \implies d_a = \sqrt{\frac{h_a^2 e_a^2}{e_a^2 - h_a^2}} = \frac{h_a e_a}{\sqrt{e_a^2 - h_a^2}} \qquad (*)$$

onde $(*)$ é uma relação bem conhecida num triângulo retângulo.

Para obter d_a geometricamente, construímos a figura 4.60 (ver a página 70).

Exercício 60) $<\alpha, h_a, e_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta} \tag{4.7}$$

$$c = \frac{h_a}{\sin\beta} \tag{4.8}$$

$$\frac{4a^2c^2\sin^2\frac{\beta}{2}}{(a-c)^2} = e_b^2 \implies \sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{(a-c)^2e_b^2}{4a^2c^2} \tag{4.9}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \tag{4.10}$$

Com o sistema (4.7)–(4.10) e sabendo que

$$\cos\beta = 1 - 2\sin^2\tfrac{\beta}{2}$$
$$\sin^2\beta = 4\sin^2\tfrac{\beta}{2}\big(1 - \sin^2\tfrac{\beta}{2}\big)$$

obtemos

$$4\Big[1 - \Big(\frac{h_a b\sin\alpha}{e_b(b\sin\alpha - h_a)}\Big)^2\Big]\Big(\frac{h_a b\sin\alpha}{e_b(b\sin\alpha - h_a)}\Big)^2 b^2 =$$
$$= b^2\sin^2\alpha + h_a^2 - 2h_a b\sin\alpha\Big[2\Big(\frac{h_a b\sin\alpha}{e_b(b\sin\alpha - h_a)}\Big)^2 - 1\Big] \tag{4.11}$$

Como $<\sin\alpha, h_a, e_b>$ são dados, podemos resolver (4.11) com algum programa para obter b.

Se a equação (4.11) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Com $<\alpha, b, h_a>$ conhecidos, já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 20).

Exercício 61) $<\alpha, h_b, e_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, h_b, c>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, c, e_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 35).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 62) $<\alpha, h_b, e_b>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, h_b, c>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, c, e_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 37).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 63) $<\alpha, h_b, e_c>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, h_b, c>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, c, e_c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 36).

Discussão: o problema possui 0, 1, 2 ou pelo menos 3 soluções.

Exercício 64) $<\alpha, h_a, R>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, R, a>$ formam um datum (ver o exercício 2 e a figura 4.2), conhecemos $<\alpha, a, h_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 18).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 65) $<\alpha, h_b, R>$

Método do problema já resolvido

Como $a = 2R\sin\alpha$ e $c = h_b/\sin\alpha$, conhecemos $<\alpha, a, c, h_b, R>$. Com $<\alpha, a, c>$ temos o exercício 16; com $<\alpha, a, h_b>$ temos o exercício 19; com $<\alpha, c, R>$ temos o exercício 39. Em todos estes casos já sabemos como resolver estes problemas.

Finalmente, com $<a, c, h_b>$ teremos resolvido o exercício 130; com $<a, c, R>$, o exercício 137; e com $<a, h_b, R>$, o exercício 159.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 66) $<\alpha, h_a, r>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Com α e r podemos construir o ponto I, centro do círculo inscrito. Logo, conhecemos o comprimento $\mathbf{A}Y = \ell = p - a$ (ver a figura 4.61, na página 71). Com $pr = ah_a/2 = (a+\ell)r$ resulta $\frac{h_a - 2r}{r} = \frac{2\ell}{a}$ e podemos obter a como a quarta proporcional entre os segmentos $h_a - 2r$, r e 2ℓ. Assim, conhecemos $<\alpha, a, h_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 18).

Observação: para ter os detalhes da construção do comprimento a do lado $\overline{\mathbf{BC}}$, ver o segundo procedimento.

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o círculo (figura auxiliar) que passa pelos pontos **B**, **C**, I e I_a (ver a figura 4.61, na página 71).

Vimos no teorema 2.10 em [7] que os comprimentos $<r, r_k, h_k>$, $k \in \{a, b, c\}$ formam um datum. Assim, como

$$\frac{h_a - 2r}{r} = \frac{h_a}{r_a}$$

podemos obter r_a como a quarta proporcional entre os segmentos $h_a - 2r$, r e h_a.

Para obter o raio r_a, fazemos a seguinte construção (ver a figura 4.62, na página 72):

i) construir duas retas $\mathfrak{s}$ e $\mathfrak{t}$ formando um ângulo de vértice $\mathscr{O}$ onde $\widehat{\mathscr{O}} \approx 30°$ $(0 < \widehat{\mathscr{O}} < 45°)$;

ii) colocar $\mathscr{X} \in \mathfrak{s}$ tal que $\mathscr{O}\mathscr{X} = h_a - 2r$;

iii) colocar $\mathscr{Y} \in \mathfrak{t}$ tal que $\mathscr{O}\mathscr{Y} = r$ e seja $\mathfrak{u} = (\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ a reta definida pelos pontos $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$;

iv) colocar $\mathscr{V} \in \mathfrak{s}$ tal que $\mathscr{X}\mathscr{V} = h_a$ e sejam $\mathfrak{v}$ a reta paralela à reta $\mathfrak{u}$ passando por $\mathscr{V}$ e $\mathscr{W}$ o ponto de interseção das retas $\mathfrak{v}$ e $\mathfrak{t}$ $(\mathscr{W} = \mathfrak{v} \cap \mathfrak{t})$.

Podemos escrever

$$\frac{\mathscr{O}\mathscr{X}}{\mathscr{O}\mathscr{Y}} = \frac{\mathscr{X}\mathscr{V}}{\mathscr{Y}\mathscr{W}} \quad \text{ou} \quad \frac{h_a - 2r}{r} = \frac{h_a}{\mathscr{Y}\mathscr{W}}$$

Logo,

$$\mathscr{Y}\mathscr{W} = r_a$$

Tendo obtido o raio r_a, podemos construir o $\triangle\,\mathbf{ABC}$. Uma análise da figura 4.61 (ver a página 71) nos mostrará que os pontos **B**, **C**, I e I_a pertencem ao mesmo círculo (ϕ).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.61, na página 71):

i) construir o ângulo α de vértice **A**, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) construir a bissetriz interna (reta $\mathfrak{d}_a$) do ângulo α;

iii) colocar I e I_a em $\mathfrak{d}_a$ servindo-se dos raios r e r_a, respectivamente;

iv) construir o arco capaz (ϕ) do ângulo reto sobre o segmento $\overline{II_a}$ (círculo tendo $\overline{II_a}$ como diâmetro e centro o ponto D);

v) obter os pontos **B** e **C** ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \phi$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (notar que $\triangle\,\mathbf{A}\mathrm{B}'\mathrm{C}' \cong \triangle\,\mathbf{ABC}$).

Exercício 67) $<\alpha, h_b, r>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, h_b, c>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, c, r>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 41).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 68) $<\alpha, h_a, r_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<h_a, r_a, r>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, r, r_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 66).

Para obter r, escrevemos

$$\frac{2r_a + h_a}{r_a} = \frac{h_a}{r}$$

ou seja, o raio (segmento) r é a quarta proporcional entre os segmentos $2r_a + h_a$, r_a e h_a e pode ser facilmente construído (ver a figura 4.62, na página 72).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 69) $<\alpha, h_a, r_b>$

Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o círculo (figura auxiliar) que passa pelos pontos **B**, **C**, I_b e I_c (ver a figura 4.63, na página 73).

Vimos no teorema 2.11 em [7] que os comprimentos $<h_a, r_b, r_c>$ formam um datum. Assim, como

$$\frac{2r_b - h_a}{h_a} = \frac{r_b}{r_c}$$

o raio (segmento) r_c é a quarta proporcional entre os segmentos $2r_b - h_a$, h_a e r_b e pode ser facilmente construído (ver a figura 4.62, na página 72).

Tendo obtido o raio r_c, podemos construir o $\triangle$**ABC**. Uma análise da figura 4.63 (ver a página 73) nos mostrará que os pontos **B**, **C**, I_b e I_c pertencem ao mesmo círculo (ϕ).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.63, na página 73):

i) construir o ângulo α de vértice **A**, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) construir a bissetriz externa (reta $\mathfrak{e}_a$) do ângulo α;

iii) colocar I_b e I_c em $\mathfrak{e}_a$ servindo-se dos raios r_b e r_c;

iv) construir o arco capaz (ϕ) do ângulo reto sobre o segmento $\overline{I_bI_c}$ (círculo tendo $\overline{I_bI_c}$ como diâmetro e centro o ponto E);

v) obter os pontos **B** e **C** ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \phi$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 70) $<\alpha, h_b, r_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, h_b, c>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, c, r_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 44).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 71) $<\alpha, h_b, r_b>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, h_b, c>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, c, r_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 46).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 72) $<\alpha, h_b, r_c>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, h_b, c>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, c, r_c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 45).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 73) $<\alpha, m_a, m_b>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Seja G o ponto comum das três medianas do triângulo (centro de gravidade ou baricentro do triângulo). Portanto, $\mathbf{B}G = 2m_b/3$ e uma análise da figura 4.64 (ver a página 74) nos mostrará que o ponto **A** possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto G vale $\frac{2m_a}{3}$;

ii) um observador colocado em **A** enxerga o segmento $\overline{\mathbf{B}M_b}$ segundo um ângulo α (**A** pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{B}M_b}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.64, na página 74):

i) numa reta $\mathfrak{m}_b$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e M_b tais que $\mathbf{B}M_b = m_b$;

ii) colocar $G^\dagger$ em $\overline{\mathbf{B}M_b}$ tal que $\mathbf{B}G = \frac{2m_b}{3}$;

iii) construir ϕ_1 (arco capaz do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{B}M_b}$);

iv) traçar o arco $\phi_2 = (G, \frac{2m_a}{3})$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \phi_1 \cap \phi_2$);

v) se $\mathfrak{b} = (\mathbf{A}, M_b)$ $\big(\mathfrak{b}' = (\mathbf{A'}, M_b)\big)$, obter $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C'}$) em $\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{b}'$) tal que $M_b\mathbf{C} = M_b\mathbf{A}$ ($M_b\mathbf{C'} = M_b\mathbf{A'}$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC'}$) soluções.

Exercício 74) $<\alpha, m_b, m_c>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

Seja B$'$ o simétrico do ponto $\mathbf{B}$ em relação ao ponto M_b, ou seja, M_b é o ponto médio do segmento $\overline{\mathbf{B}\text{B}'}$. Uma análise da figura 4.65 (ver a página 75) nos mostrará que o quadrilátero $\diamondsuit\,\mathbf{ABC}\text{B}'$ é um paralelogramo pois suas diagonais se intersectam nos seus pontos médios. Assim, $\measuredangle\mathbf{AC}\text{B}' = \alpha$ e o ponto $\mathbf{C}$ possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto G vale $\frac{2m_c}{3}$;

ii) um observador colocado em $\mathbf{C}$ enxerga o segmento $\overline{M_b\text{B}'}$ segundo um ângulo α ($\mathbf{C}$ pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo α sobre o segmento $\overline{M_b\text{B}'}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.65, na página 75):

i) numa reta $\mathfrak{m}_b$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e M_b tais que $\mathbf{B}M_b = m_b$;

ii) construir os pontos G e B$'$, simétrico de $\mathbf{B}$ em relação a M_b;

†Não mostraremos como dividir um segmento $\overline{\mathscr{X}\mathscr{Y}}$ em n partes iguais porque estamos supondo que o leitor já sabe como resolver tal problema; se não for o caso, sua solução pode ser vista em [2], [9], [10], [11] e [14], por exemplo.

iii) construir o arco ϕ_1;

iv) traçar o arco $\phi_2 = (G, \frac{2m_c}{3})$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \phi_1 \cap \phi_2$);

v) traçar as retas $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, M_b)$ e $\mathfrak{c}' = (\mathbf{C}, \mathrm{B}')$;

vi) construir a reta $\mathfrak{c}$ ($\mathbf{B} \in \mathfrak{c}$ e $\mathfrak{c} \parallel \mathfrak{c}'$) e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Seja ϕ_1 o arco capaz do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{B}M_b}$. Sabemos que o ponto $\mathbf{C}$ é simétrico do ponto $\mathbf{A}$ em relação ao ponto M_b. Logo, se ϕ_1' representa a imagem da simetria de ϕ_1 em relação ao ponto M_b, uma análise da figura 4.66 (ver a página 76) nos mostrará que o ponto $\mathbf{C}$ possui duas propriedades:

i) $\mathbf{C}$ pertence a ϕ_1';

ii) sua distância ao ponto G vale $\frac{2m_c}{3}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.66, na página 76):

i) numa reta $\mathfrak{m}_b$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e M_b tais que $\mathbf{B}M_b = m_b$;

ii) colocar G no segmento $\overline{\mathbf{B}M_b}$ tal que $\mathbf{B}G = \frac{2m_b}{3}$;

iii) construir ϕ_1 (arco capaz do ângulo α sobre o segmento $\overline{\mathbf{B}M_b}$) e ϕ_1';

iv) traçar o arco $\phi_2 = (G, \frac{2m_c}{3})$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \phi_1' \cap \phi_2$);

v) se $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, M_b)$ $\big(\mathfrak{b}' = (\mathbf{C'}, M_b)\big)$, obter $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \phi_1$) $\big(\mathbf{A'}$ ($\mathbf{A'} = \mathfrak{b}' \cap \phi_1$)$\big)$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{ABC}$ e $\triangle\, \mathbf{A'BC'}$) soluções.

Exercício 75) $<\alpha, m_a, d_a>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{4.12}$$

$$a^2 = 2b^2 + 2c^2 - 4m_a^2 \tag{4.13}$$

$$\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c} = d_a \Longrightarrow bc = \frac{(b+c)d_a}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \tag{4.14}$$

Com as equações (4.12) e (4.13) obtemos

$$4m_a^2 = (b+c)^2 - 2(1-\cos\alpha)bc \tag{4.15}$$

Com o valor de bc dado por (4.14) e sabendo que $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, reescrevemos (4.15), obtendo

$$(b+c)^2 - 2d_a\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}(b+c) - 4m_a^2 = 0 \tag{4.16}$$

Pegamos a raiz positiva de (4.16):

$$b + c = d_a\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{2}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}d_a\sin^2\tfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(m_a\cos\tfrac{\alpha}{2}\right)^2} \tag{†}$$

e o comprimento $b+c$ é conhecido.

Tentemos aproveitar este novo dado. Com um pouco de experiência e inspiração, pensamos no ponto $\mathcal{M}_a$, pé da perpendicular conduzida pelo ponto M_a (ver a figura 4.67, na página 77) à bissetriz interna (reta $\mathfrak{d}_a$) do ângulo α (ou seja, $\mathcal{M}_a$ é a projeção do ponto M_a sobre a reta $\mathfrak{d}_a$). Como M_a é o ponto médio do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$, $\mathcal{M}_a$ é o ponto médio de $\overline{\mathcal{BC}}$ (teorema sobre feixe de paralelas, ver [8]), onde $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as projeções de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ sobre $\mathfrak{d}_a$. Assim, como um cálculo fácil pode mostrar,

$$\mathbf{A}\mathcal{M}_a = \frac{(b+c)\cos\frac{\alpha}{2}}{2} \tag{‡}$$

Substituindo o valor de $b+c$ dado por (†) em (‡), resulta

$$\mathbf{A}\mathcal{M}_a = \tfrac{1}{2}d_a\sin^2\tfrac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}d_a\sin^2\tfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(m_a\cos\tfrac{\alpha}{2}\right)^2} \tag{§}$$

e o comprimento $\ell = \mathbf{A}\mathcal{M}_a$ pode ser construído! Como o comprimento $\mathbf{A}M_a$ é conhecido, podemos construir o $\triangle\,\mathbf{A}\mathcal{M}_a M_a$ (figura auxiliar) e também o ponto D_a, resolvendo assim o problema.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.67, na página 77):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) construir a bissetriz interna (reta $\mathfrak{d}_a$) do ângulo α e, em seguida, traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{A}, d_a)$ para obter o ponto D_a ($D_a = \mathfrak{d}_a \cap \phi_1$);

iii) construir o comprimento ℓ dado por (§). Traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{A}, \ell)$ e obter o ponto $\mathcal{M}_a$ ($\mathcal{M}_a = \mathfrak{d}_a \cap \phi_2$). Pelo ponto $\mathcal{M}_a$ assim obtido, traçar a reta $\mathfrak{v}$ perpendicular à reta $\mathfrak{d}_a$ ($\mathcal{M}_a \in \mathfrak{v}$ e $\mathfrak{v} \perp \mathfrak{d}_a$);

iv) traçar o arco $\phi_3 = (\mathbf{A}, m_a)$ e obter o ponto M_a ($M_a = \mathfrak{v} \cap \phi_3$);

v) se $\mathfrak{a} = (D_a, M_a)$, obter os pontos $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$) e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (notar que o triângulo que seria gerado por M'_a é congruente ao triângulo $\triangle\,\mathbf{ABC}$).

Observações:

i) para ter os detalhes da construção de ℓ, ver [12] (Woods), de onde este procedimento foi retirado;

ii) Detlef Laugwitz mostrou em [13] uma outra maneira de calcular o comprimento $\mathbf{A}\mathcal{M}_a$. Seja θ o ângulo $\angle D_a\mathbf{A}M_a$ (ver a figura 4.67, na página 77). Então $\mathbf{A}\mathcal{M}_a = m_a \cos\theta$ e precisamos conhecer o valor de $\cos\theta$.

Aplicando a lei dos senos nos $\triangle\,\mathbf{AB}M_a$ e $\triangle\,\mathbf{AC}M_a$, vem:

$$\frac{\mathbf{BC}}{2m_a}\left[\frac{1}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\theta)} + \frac{1}{\sin(\frac{\alpha}{2}-\theta)}\right] = \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \qquad (4.17)$$

Aplicando a lei dos senos nos $\triangle\,\mathbf{AB}D_a$ e $\triangle\,\mathbf{AC}D_a$, vem:

$$\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} = \frac{1}{d_a}\left[\frac{\mathbf{B}D_a + D_a\mathbf{C}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right] = \frac{\mathbf{BC}}{d_a}\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (4.18)$$

Substituindo o valor de $\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}$ dado por (4.17) em (4.18) e desenvolvendo $\sin(\frac{\alpha}{2} \pm \theta)$, resulta uma equação que simplifica para

$$\frac{d_a}{2m_a}[2\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\theta]\sin\tfrac{\alpha}{2} = \sin^2\tfrac{\alpha}{2}\cos^2\theta - \cos^2\tfrac{\alpha}{2}\sin^2\theta \qquad (4.19)$$

Usando $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ em (4.19), obtém-se uma equação quadrática em $\cos\theta$ cuja solução é

$$\cos\theta = \frac{d_a}{2m_a}\sin^2\tfrac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{d_a}{2m_a}\sin^2\tfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \cos^2\tfrac{\alpha}{2}}$$

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Seja B′ o simétrico do ponto **B** em relação ao ponto **A** (ver a figura 4.68, na página 78). Logo, **AB** = **A**B′ e B′**C** = $2\mathbf{A}M_a = 2m_a$ (já que **A** é o ponto médio de $\overline{\mathbf{B}\mathrm{B}'}$, e M_a é o ponto médio de $\overline{\mathbf{BC}}$). Mostraremos abaixo que podemos construir o △ B′**AC** (figura auxiliar), com o que o problema fica resolvido.

Trace a reta $(\mathrm{B}', \mathbf{C}) = \mathfrak{m}'_a$, construa a bissetriz (reta $\mathfrak{e}_a$) do ∠B′**AC** e considere o ponto $D'_a = \mathfrak{m}'_a \cap \mathfrak{e}_a$. Assim, $\overline{\mathbf{A}D'_a}$ é a bissetriz interna conduzida pelo vértice **A** no △ B′**AC** e podemos escrever:

$$\frac{\mathrm{B}'D'_a}{D'_a\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{A}\mathrm{B}'}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}} \tag{4.20}$$

$$\frac{\mathbf{B}D_a}{D_a\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}} \qquad \text{(teorema das bissetrizes no } \triangle\,\mathbf{ABC}\text{)} \tag{4.21}$$

Com as equações (4.20) e (4.21), vem:

$$\frac{\mathbf{B}D_a}{D_a\mathbf{C}} = \frac{\mathrm{B}'D'_a}{D'_a\mathbf{C}} \tag{4.22}$$

Portanto, as retas $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, \mathrm{B}')$ e $\mathfrak{c}' = (D_a, D'_a)$ são paralelas. Então $\measuredangle\mathbf{A}D_aD'_a = \measuredangle\mathbf{BA}D_a = \frac{\alpha}{2}$ e podemos construir o triângulo retângulo $\triangle\,\mathbf{A}D_aD'_a$ pois $\mathbf{A}D_a = d_a$ é conhecido.

Considere agora o △ B′**AC**. Deste triângulo conhecemos a medida do ângulo no vértice **A** ($\measuredangle\mathrm{B}'\mathbf{AC} = 180° - \alpha$), $\mathrm{B}'\mathbf{C} = 2m_a$ e $\mathbf{A}D'_a = d_a \tan\frac{\alpha}{2}$. Logo, já sabemos como construir o △ B′**AC** (ver o exercício 28). Finalmente, o ponto **B** é obtido na reta $\mathfrak{c}$ com **AB** = **A**B′.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.69, na página 79):

i) construir o triângulo retângulo $\triangle\,\mathbf{A}M_a\mathfrak{O}$, onde $\measuredangle\mathbf{A}\mathfrak{O}M_a = \alpha$ ou $180° - \alpha$, $\measuredangle\mathbf{A}M_a\mathfrak{O} = 90°$ e $\mathbf{A}M_a = m_a$, bem como um ponto T na reta $\mathfrak{m}_a = (\mathbf{A}, M_a)$ tal que $\mathbf{A}T = \frac{d_a}{2}$;

ii) traçar o círculo $\phi_1 = (\mathfrak{O}, \mathfrak{O}\mathbf{A})$ e obter o ponto A′ (A′ $= \mathfrak{m}_a \cap \phi_1$); traçar a reta $\mathfrak{t} = (\mathfrak{O}, M_a)$ e obter o diâmetro $\overline{P_1P_2}$, P_2 sendo o ponto para o qual $\measuredangle \mathbf{A}P_2\mathrm{A}' = \alpha$ ou $180° - \alpha$;

iii) traçar a reta $\mathfrak{s} = (\mathrm{A}', P_1)$; construir o ponto P no segmento $\overline{\mathrm{A}'P_2}$ tal que $\mathrm{A}'P = \mathbf{A}T$; construir a reta $\mathfrak{t}'$ ($P \in \mathfrak{t}'$ e $\mathfrak{t}' \parallel \mathfrak{t}$) e obter o ponto Q ($Q = \mathfrak{t}' \cap \mathfrak{s}$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{r} = (P_2, Q)$ e obter o ponto $P_3 \in \mathfrak{r}$ tal que $QP_3 = Q\mathrm{A}'$;

v) traçar o arco $\phi_5 = (P_2, P_2P_3)$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \phi_1 \cap \phi_5$);

vi) traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, M_a)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$, simétrico de $\mathbf{B}$ em relação a M_a.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (notar que o triângulo que seria gerado por B′ é congruente ao triângulo $\triangle\,\mathbf{ABC}$).

Observação: esta construção foi retirada de [15], p. 94, que se baseou nos procedimentos de Thébault em [12] e de Velissarios em [13].

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

Seja A′ o simétrico do ponto $\mathbf{A}$ em relação ao ponto M_a. Logo, $\mathbf{A}\mathrm{A}' = 2m_a$ e o quadrilátero $\diamondsuit\,\mathbf{BAC}\mathrm{A}'$ é um paralelogramo pois suas diagonais se intersectam nos seus pontos médios. Então $\measuredangle \mathbf{AC}\mathrm{A}' = 180° - \measuredangle \mathbf{BAC} = 180° - \alpha = \theta$ e pode-se construir o círculo circunscrito (Γ') ao $\triangle\,\mathbf{AC}\mathrm{A}'$ pois Γ' contém o arco capaz de θ sobre o segmento $\overline{\mathbf{A}\mathrm{A}'}$.

Construa a mediatriz (reta $\mathfrak{m}$) do segmento $\overline{\mathbf{A}\mathrm{A}'}$ e o ponto $P_1 = \mathfrak{m} \cap \Gamma'$, com P_1 pertencendo ao arco capaz. Finalmente, considere também o ponto P_2, segunda interseção da reta $\mathfrak{m}$ com o círculo Γ' e antípoda de P_1, e as retas $\mathfrak{m}_a = (\mathbf{A}, \mathrm{A}')$ e $\mathfrak{s} = (\mathbf{C}, P_2)$.

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{AC}\mathrm{A}'$ e o ponto $P_3 = \mathfrak{m}_a \cap \mathfrak{s}$. Uma análise da figura 4.70 (ver a página 80) nos mostrará que o ponto P_3 possui duas propriedades:

i) pertence à reta $\mathfrak{m}_a = (\mathbf{A}, \mathrm{A}')$;

ii) se ℓ representa sua distância au ponto P_2 ($P_2P_3 = \ell$), então

$$\ell = P_2P_7 \tag{4.23}$$

Para provar o resultado dado pela equação (4.23), notamos que $\mathfrak{s}$ é a bissetriz do $\angle \mathbf{AC}\mathrm{A}'$. Então $\overline{\mathbf{C}P_3}$ é a bissetriz interna do ângulo do vértice $\mathbf{C}$ no $\triangle\,\mathbf{AC}\mathrm{A}'$ e seu comprimento é

$$\mathbf{C}P_3 = \frac{2bc\cos\frac{\theta}{2}}{b+c} = \frac{2bc\sin\frac{\alpha}{2}}{b+c} = d_a \tan\tfrac{\alpha}{2}$$

Lembramos também que, pelo exercício 28, $P_2P_3 \cdot P_2\mathbf{C} = (P_2\mathrm{A}')^2$.

Sejam as retas $\mathfrak{t} = (P_1, \mathrm{A}')$ e $\mathfrak{u} = (P_2, \mathrm{A}')$. Coloca-se o ponto P_4 na reta $\mathfrak{u}$ tal que $P_2P_4 = d_a$. A perpendicular à reta $\mathfrak{u}$ conduzida pelo ponto P_4 intersecta a reta $\mathfrak{m}$ no ponto P_5 e coloca-se P_6 na reta $\mathfrak{t}$ tal que o $\diamondsuit\,\mathrm{A}'P_4P_5P_6$ é um retângulo. E como $\measuredangle P_1P_2\mathrm{A}' = \alpha/2$, tem-se que $P_4P_5 = \mathrm{A}'P_6 = d_a \tan\frac{\alpha}{2} = P_3\mathbf{C}$.

Se $\mathfrak{O}$ é o ponto médio do segmento $\overline{\mathrm{A}'P_6}$, considere a reta $\mathfrak{v} = (P_2, \mathfrak{O})$ e o círculo ϕ_1 com diâmetro $\overline{\mathrm{A}'P_6}$. Defina os pontos P_7 e P_8 como $P_7 = \mathfrak{v} \cap \phi_1$ e $P_8 = \mathfrak{v} \cap \phi_1$. Então $P_2P_7 \cdot P_2P_8 = (P_2\mathrm{A}')^2$ com $P_7P_8 = P_3\mathbf{C}$. Logo, $P_2P_3 = P_2P_7$ ∎

Daí a construção que segue (ver a figura 4.70, na página 80):

i) numa reta $\mathfrak{m}_a$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{A}$, M_a e A' tais que $\mathbf{A}M_a = m_a$ e $M_a\mathrm{A}' = m_a$; construir a reta $\mathfrak{m}$ e o círculo Γ'; obter os pontos $P_1 = \mathfrak{m} \cap \Gamma'$ e $P_2 = \mathfrak{m} \cap \Gamma'$, com P_1 no arco capaz de θ sobre o segmento $\overline{\mathbf{A}\mathrm{A}'}$;

ii) traçar as retas $\mathfrak{t} = (P_1, \mathrm{A}')$ e $\mathfrak{u} = (P_2, \mathrm{A}')$;

iii) colocar $P_4 \in \mathfrak{u}$ tal que $P_2P_4 = d_a$ e construir o retângulo $\diamondsuit\,\mathrm{A}'P_4P_5P_6$, com $P_5 \in \mathfrak{m}$ e $P_6 \in \mathfrak{t}$;

iv) traçar o círculo ϕ_1 com centro $\mathfrak{O}$ e diâmetro $\overline{\mathrm{A}'P_6}$ e a reta $\mathfrak{v} = (P_2, \mathfrak{O})$; obter os pontos $P_7 = \mathfrak{v} \cap \phi_1$ e $P_8 = \mathfrak{v} \cap \phi_1$;

v) traçar o arco $\phi_2 = (P_2, P_2P_7)$ e obter o ponto $P_3 = \mathfrak{m}_a \cap \phi_2$; traçar a reta $\mathfrak{s} = (P_2, P_3)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{s} \cap \Gamma'$); traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, M_a)$ e obter $\mathbf{B}$ como simétrico de $\mathbf{C}$ em relação ao ponto M_a.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (notar que o triângulo que seria gerado por P_3' é congruente ao triângulo $\triangle\,\mathbf{ABC}$).

Observação: se $\mathcal{C} = \mathfrak{d}_a \cap \mathfrak{s}$, então $\measuredangle \mathbf{A}\mathcal{C}\mathbf{C} = 90°$. Seja $\mathfrak{s}'$ a reta paralela à reta $\mathfrak{s}$ traçada por D_a ($D_a \in \mathfrak{s}'$ e $\mathfrak{s}' \parallel \mathfrak{s}$). Se $V = \mathfrak{s}' \cap \mathfrak{b}$, então $\measuredangle \mathbf{A}D_aV = 90°$ e $D_aV = d_a \tan\frac{\alpha}{2}$. Como $\mathbf{C}P_3 = VD_a$ e $\overline{\mathbf{C}P_3} \parallel \overline{VD_a}$, então o quadrilátero $\diamondsuit\, D_aP_3\mathbf{C}V$ é um paralelogramo e $\mathfrak{b}' \parallel \mathfrak{b}$, com $\mathfrak{b}' = (D_a, P_3)$.

Quarto procedimento – Método algébrico

Sejam $\delta = \beta - \gamma$ e $\mu = \measuredangle \mathbf{A} M_a H_a$. Já vimos que $\measuredangle H_a \mathbf{A} D_a = \frac{\delta}{2}$ e, pelo corolário 2.9 em [7], $\cos\alpha = -\frac{\cos(\mu+\delta)}{\cos\mu}$. Podemos então escrever o seguinte sistema de equações não lineares:

$$m_a \sin\mu = h_a \tag{4.24}$$

$$d_a \cos\frac{\delta}{2} = h_a \tag{4.25}$$

$$\sin\delta \tan\mu = \cos\delta + \cos\alpha \tag{4.26}$$

Com (4.24) e (4.25) obtemos

$$\frac{m_a^2 \sin^2\mu}{d_a^2} = \cos^2\frac{\delta}{2} = \frac{1+\cos\delta}{2}$$

Daí, vem:

$$\cos\delta = \frac{2m_a^2\sin^2\mu}{d_a^2} - 1 \quad \text{e} \quad \sin\delta = \frac{2m_a\sin\mu}{d_a^2}\sqrt{d_a^2 - m_a^2\sin^2\mu}$$

Substituindo estes valores em (4.26), resulta:

$$\left[1 - \left(\frac{m_a}{d_a}\right)^2\right]\frac{\sin^2\mu}{1-\sin^2\mu} - \left[\frac{d_a(1-\cos\alpha)}{2m_a\sin\mu}\right]^2 + 1 - \cos\alpha = 0 \tag{4.27}$$

Como $\langle \cos\alpha, m_a, d_a \rangle$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.27), obtendo assim o $\sin\mu$ e com isso os três lados $\langle a, b, c \rangle$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{11}{14}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}$ cm e $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}$ cm.

Com estes valores, a equação (4.27) torna-se

$$80601\sin^4\mu - 81280\sin^2\mu + 4096 = 0 \tag{4.28}$$

É conveniente fazer a substituição $\sin\mu = h_a/m_a$ e calcular h_a. A equação (4.28) torna-se

$$401h_a^4 - 20320h_a^2 + 51456 = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†), a única solução positiva que convém é $h_a = 4\sqrt{3}$. A construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$ pode ser efetuada agora sem dificuldades.

Observações:

i) este procedimento foi retirado de [4], problema 578, pp. 330–331;

ii) para saber mais sobre este problema e conhecer outros procedimentos, ver [3], [5], [13], [12] e [15], p. 94.

Quinto procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 4.71 (ver a página 81) nos mostrará que o ponto M_a possui duas propriedades:

i) pertence à circunferência $\phi = (\mathbf{A}, m_a)$;

ii) pertence à curva (cônica) $\mathfrak{H}$ dada por

$$\tan^2 \tfrac{\alpha}{2}(x^2 - d_a x) - y^2 = 0 \tag{4.29}$$

Seja $\mathfrak{a}$ uma reta livre que se move passando sempre pelo ponto D_a. Se $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são as interseções desta reta com as retas $\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{b}$, respectivamente, então a cônica dada por (4.29) representa o lugar geométrico descrito por M_a, ponto médio do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$.

Para provar o resultado dado por (4.29), coloquemos o $\triangle\,\mathbf{ABC}$ num sistema de coordenadas cartesianas retangulares onde o ponto $\mathbf{A}$ é a origem e a bissetriz interna $\mathfrak{d}_a$, a reta $y = 0$ (eixo x). Assim, as coordenadas do vértice $\mathbf{A}$ e do ponto D_a (pé da bissetriz interna) tomam os seguintes valores: $\mathbf{A} = (0, 0)$ e $D_a = (d_a, 0)$. Podemos escrever:

$$\text{reta } \mathfrak{b}\text{:} \quad y = \tan \tfrac{\alpha}{2} x \tag{4.30}$$

$$\text{reta } \mathfrak{c}\text{:} \quad y = -\tan \tfrac{\alpha}{2} x \tag{4.31}$$

Se θ é o ângulo formado por $\mathfrak{a}$ e o eixo x (reta $\mathfrak{d}_a$), então a equação de $\mathfrak{a}$ é dada por

$$\text{reta } \mathfrak{a}\text{:} \qquad y = \tan\theta(x - d_a) \tag{4.32}$$

Assim, $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$. Resolvendo (4.31) e (4.32), obtemos $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\tan\theta d_a}{\tan\theta + \tan\frac{\alpha}{2}}, -\frac{\tan\theta \tan\frac{\alpha}{2} d_a}{\tan\theta + \tan\frac{\alpha}{2}} \right) \tag{4.33}$$

Resolvendo (4.30) e (4.32), obtemos $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \left(\frac{\tan\theta d_a}{\tan\theta - \tan\frac{\alpha}{2}}, \frac{\tan\theta \tan\frac{\alpha}{2} d_a}{\tan\theta - \tan\frac{\alpha}{2}} \right) \tag{4.34}$$

Finalmente, $M_a = (\mathbf{B}+\mathbf{C})/2$, e de (4.33) e (4.34) obtemos:

$$M_a = \left(\frac{\tan^2\theta d_a}{\tan^2\theta - \tan^2\frac{\alpha}{2}}, \frac{\tan\theta\tan^2\frac{\alpha}{2}d_a}{\tan^2\theta - \tan^2\frac{\alpha}{2}} \right) \quad \text{ou} \quad M_a = (x_{M_a}, y_{M_a})$$

Podemos expressar $\tan\theta$ em função de x_{M_a} e y_{M_a}:

$$\tan\theta y_{M_a} = \frac{\tan^2\theta\tan^2\frac{\alpha}{2}d_a}{\tan^2\theta - \tan^2\frac{\alpha}{2}} = \tan^2\frac{\alpha}{2}x_{M_a} \implies \tan\theta = \frac{\tan^2\frac{\alpha}{2}x_{M_a}}{y_{M_a}}$$

Substituindo este valor de $\tan\theta$ em x_{M_a}, desenvolvendo e simplificando, resulta:

$$\tan^2\tfrac{\alpha}{2}(x^2 - d_a x) - y^2 = 0 \qquad \blacksquare$$

A equação (4.29) será uma hipérbole (ver [6], por exemplo) se $\tan\frac{\alpha}{2}d_a \neq 0$. Colocando-a na forma

$$\frac{(x-\frac{d_a}{2})^2}{(\frac{d_a}{2})^2} - \frac{y^2}{(\frac{\tan\frac{\alpha}{2}d_a}{2})^2} = 1$$

reconhecemos (4.29) como uma hipérbole ($\mathfrak{H}$) centrada no ponto $\mathcal{C} = (\frac{d_a}{2}, 0)$ e com excentricidade $\mathscr{E} = \sqrt{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$, focos nos pontos $\mathcal{F}_1 = (\frac{d_a}{2}(\mathscr{E}+1), 0)$ e $\mathcal{F}_2 = (-\frac{d_a}{2}(\mathscr{E}-1), 0)$, vértices nos pontos $\mathbf{A}$ e D_a, diretrizes $\mathfrak{DD}$ e $\mathfrak{DD}'$ dadas por $x = \frac{d_a}{2}(1 \pm \frac{1}{\mathscr{E}})$ e assíntotas dadas pelas retas $y = \pm\tan\frac{\alpha}{2}(x - \frac{d_a}{2})$, ou seja, as assíntotas são paralelas aos lados $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$ do triângulo (ver [1]).

O outro lugar geométrico do ponto M_a é o círculo (ϕ) centrado em $\mathbf{A}$ de raio m_a, ou seja,

$$x^2 + y^2 = m_a^2 \tag{4.35}$$

Assim, $M_a = \mathfrak{H} \cap \phi$. Geralmente, as interseções de uma hipérbole com um círculo não são construtíveis com régua e compasso mas se o centro do círculo pertence ao eixo da hipérbole, como acontece aqui (ainda mais particularmente, o centro coincide com um vértice da hipérbole), tal construção é possível. Para tal, basta observar que substituindo o valor de y^2 dado por (4.29) em (4.35), a coordenada x_{M_a} pode ser construída. Procedendo a este cálculo, após simples manipulações algébricas obtemos a seguinte equação do segundo grau em x_{M_a}:

$$\begin{aligned} x_{M_a}^2 + \tan^2\tfrac{\alpha}{2}(x_{M_a}^2 - d_a x_{M_a}) &= m_a^2 \\ x_{M_a}(x_{M_a} - d_a\sin^2\tfrac{\alpha}{2}) &= (m_a\cos\tfrac{\alpha}{2})^2 \\ x_{M_a}(x_{M_a} - u) &= v^2 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Observação: como visto no primeiro procedimento,

$$x_{M_a} = \mathbf{A}\mathcal{M}_a = \tfrac{1}{2}d_a \sin^2 \tfrac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}d_a \sin^2 \tfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(m_a \cos \tfrac{\alpha}{2}\right)^2}$$

onde $\mathcal{M}_a$ é a projeção ortogonal de M_a sobre a reta $\mathfrak{d}_a$.

Daí a construção que segue (ver o primeiro procedimento e a figura 4.71, na página 81).

i) construir o ângulo α de vértice **A**, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$; construir a reta $\mathfrak{d}_a$ e, servindo-se de d_a, coloca-se o ponto D_a na reta $\mathfrak{d}_a$;

ii) construir o comprimento x_{M_a} dado por (4.36);

iii) traçar o círculo $\phi_2 = (A, x_{M_a})$ e obter o ponto $\mathcal{M}_a$, projeção ortogonal de M_a sobre a reta $\mathfrak{d}_a$ ($\mathcal{M}_a = \mathfrak{d}_a \cap \phi_2$);

iv) construir a reta $\mathfrak{u}$ ($\mathcal{M}_a \in \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u} \perp \mathfrak{d}_a$); traçar o arco $\phi_3 = (\mathbf{A}, m_a)$ e obter o ponto M_a ($M_a = \mathfrak{u} \cap \phi_3$);

v) traçar a reta $\mathfrak{a} = (D_a, M_a)$ e obter os pontos **B** ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$) e **C** ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$).

Observação: a construção dos pontos M_a e M_a' pode ser feita de uma maneira bastante elegante mas antes de apresentá-la, vou transcrever a troca de mensagens entre Giovanni Artico (GA) e Nikolaos Dergiades (ND) no agora encerrado grupo Hyacinthos (mensagem # 15637 de 2007).

[GA]: Problem: "to find the intersections of an hyperbola (given by asymptotes and vertices) and a circle centred on the major axis of the hyperbola". Has anyone a (simple?) construction? Thanks

Giovanni Artico

[ND]: Let A, A' be the vertices of the hyperbola on the major axis and let O the center of the hyperbola mid point of AA'. The perpendicular to AA' at A meets one asymptote at B. Let (K,R) our circle with K(c,0). The equation of the circle is (x-c)^2 + y^2 = R^2. If x^2/a^2 -y^2/b^2 = 1 (hyperbola) then OA = a and AB = b. Eliminating y from the above equations we get (a^2 + b^2)x^2 - 2a^{2}cx - a^2(b^2 + R^2 - c^2) = 0. The same equation we get as the intersection of the asymptote y = bx/a and the circle (x-c)^2 + y^2 = b^2 + R^2. Hence we have the following construction:

The parallel from B to the major axis meets the tangent of our circe that is parallel to the minor axis at T. The circle (K,KT) meets

> the line OB at the points D, D’ and the parallels from these points to the minor axis meet our circle at the points of intersection with the hyperbola. Best regards
>
> Nikos Dergiades

Giovanni Artico pede a solução para o problema de encontrar (construir) as interseções de uma hipérbole dada pelas assíntotas e vértices com um círculo centrado no eixo transverso da hipérbole.

Traduzindo e adaptando a construção de Nikolaos Dergiades à nossa notação, temos:

> Sejam $\mathbf{A}$ e D_a os vértices da hipérbole no seu eixo principal (reta $\mathfrak{d}_a$) e $\mathcal{C}$ o seu centro, ponto médio de $\overline{\mathbf{A}D_a}$. A perpendicular à reta $\mathfrak{d}_a$ em D_a intersecta uma assíntota em B. Seja (K, R) o círculo de centro $K = (c, 0)$. A equação do círculo é $(x-c)^2 + y^2 = R^2$. Se $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hipérbole), então $\mathcal{C}D_a = a$ e $D_aB = b$. Eliminando y das equações acima, obtemos $(a^2+b^2)x^2 - 2a^2cx - a^2(b^2+R^2-c^2) = 0$. A mesma equação é obtida fazendo-se a interseção da assíntota $y = bx/a$ e o círculo $(x-c)^2 + y^2 = b^2 + R^2 = \sqrt{b^2+R^2}^{\,2}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.72, na página 82):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$; construir a bissetriz interna do ângulo α (reta $\mathfrak{d}_a$) e o ponto D_a ($D_a \in \mathfrak{d}_a$ e $\mathbf{A}D_a = d_a$);

ii) construir o ponto médio ($\mathcal{C}$) do segmento $\overline{\mathbf{A}D_a}$; construir as retas $\mathfrak{b}'$ ($\mathcal{C} \in \mathfrak{b}'$ e $\mathfrak{b}' \parallel \mathfrak{b}$) e $\mathfrak{c}'$ ($\mathcal{C} \in \mathfrak{c}'$ e $\mathfrak{c}' \parallel \mathfrak{c}$). Tem-se assim a hipérbole $\mathfrak{H}$, dada pelos vértices $\mathbf{A}$ e D_a e assíntotas $\mathfrak{b}'$ e $\mathfrak{c}'$. Deste modo o ponto $\mathcal{C}$ é o centro de $\mathfrak{H}$ e $\overline{\mathbf{A}D_a}$, seu eixo transverso.

iii) traçar o círculo $\phi_3 = (\mathbf{A}, m_a)$ e obter o ponto P_1 ($P_1 = \mathfrak{d}_a \cap \phi_3$); construir a reta $\mathfrak{e}'_a$ ($D_a \in \mathfrak{e}'_a$ e $\mathfrak{e}'_a \perp \mathfrak{d}_a$) e obter o ponto P_2 ($P_2 = \mathfrak{e}'_a \cap \mathfrak{b}'$);

iv) construir as retas $\mathfrak{d}'_a$ ($P_2 \in \mathfrak{d}'_a$ e $\mathfrak{d}'_a \parallel \mathfrak{d}_a$) e $\mathfrak{e}''_a$ ($P_1 \in \mathfrak{e}''_a$ e $\mathfrak{e}''_a \perp \mathfrak{d}_a$ e obter o ponto T ($T = \mathfrak{d}'_a \cap \mathfrak{e}''_a$);

v) traçar o círculo $\phi = (\mathbf{A}, \mathbf{A}T)$ e obter o ponto D ($D = \mathfrak{b}' \cap \phi$);

vi) construir a reta $\mathfrak{t}$ ($D \in \mathfrak{t}$ e $\mathfrak{t} \parallel \mathfrak{e}'_a$) e obter os pontos M_a ($M_a = \mathfrak{t} \cap \phi_3$) e M'_a ($M'_a = \mathfrak{t} \cap \phi_3$).

Exercício 76) $<\alpha, m_a, d_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{4.37}$$

$$2(b^2+c^2)-a^2 = 4m_a^2 \tag{4.38}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.39}$$

Como $<\cos\alpha, m_a, d_b>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.37)–(4.39), obtendo assim os três lados $<a, b, c>$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}$ cm e $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm.

Com estes valores, um programa qualquer fornece

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que este triângulo satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 77) $<\alpha, m_b, d_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{4.40}$$

$$4m_b^2 = 2(a^2+c^2) - b^2 \tag{4.41}$$

$$d_a = \frac{2bc\cos(\alpha/2)}{b+c} \Longrightarrow b = \frac{d_a c}{2c\cos(\alpha/2) - d_a} \tag{4.42}$$

Com (4.40) e (4.41) obtemos

$$4m_b^2 = b^2 + 4c^2 - 4bc\cos\alpha \tag{4.43}$$

Finalmente, substituindo o valor de b dado por (4.42) em (4.43), resulta

$$c^4 - \frac{8d_a(2+\cos\alpha)\cos(\alpha/2)}{16\cos^2(\alpha/2)}c^3 + \frac{(5+4\cos\alpha)d_a^2 - 16m_b^2\cos^2(\alpha/2)}{16\cos^2(\alpha/2)}c^2 + {} + \frac{16m_b^2 d_a\cos(\alpha/2)}{16\cos^2(\alpha/2)}c - \frac{4m_b^2 d_a^2}{16\cos^2(\alpha/2)} = 0 \tag{4.44}$$

Como $<\cos\alpha, m_b, d_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.44) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.44) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14} \Longrightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}$ cm.

A equação (4.44) torna-se

$$c^4 - \frac{52}{5}c^3 - \frac{1163}{300}c^2 + \frac{1204}{5}c - \frac{33712}{75} = 0 \qquad (\dagger)$$

Resolvendo ($\dagger$) com algum programa, obtemos uma raiz negativa e três raízes positivas, as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$c_1 = 2{,}446969\,8\,\text{cm} \implies b_1 = \frac{56}{15 - 56/c_1} < 0$$

$$c_2 = 4{,}768412\,9\,\text{cm} \implies b_2 = 17{,}198749\,8\,\text{cm e } a_2 = 13{,}771736\,9\,\text{cm}$$

$$c_3 = 8\,\text{cm} \implies b_3 = 7\,\text{cm e } a_3 = 5\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $<a_2, b_2, c_2>$ e $<a_3, b_3, c_3>$ satisfazem todas as condições do problema.

Exercício 78) $<\alpha, m_b, d_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha \qquad (4.45)$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \qquad (4.46)$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \qquad (4.47)$$

Como $<\cos\alpha, m_b, d_b>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.45)–(4.47), obtendo assim os três lados $<a, b, c>$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm.

Com estes valores, um programa qualquer fornece

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que este triângulo satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 79) $<\alpha, m_b, d_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{4.48}$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{4.49}$$

$$ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = d_c^2 \tag{4.50}$$

Como $<\cos\alpha, m_b, d_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.48)–(4.50), obtendo assim os três lados $<a, b, c>$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $d_c = \frac{5\sqrt{7}}{3}$ cm.

Com estes valores, um programa qualquer fornece

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que este triângulo satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 80) $<\alpha, m_a, e_a>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares onde, sem perda de generalidade, supomos $b > c$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{4.51}$$

$$a^2 = 2b^2 + 2c^2 - 4m_a^2 \tag{4.52}$$

$$\frac{2bc\sin\frac{\alpha}{2}}{b-c} = e_a \implies bc = \frac{(b-c)e_a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{4.53}$$

Com as equações (4.51) e (4.52) e sabendo que $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, obtemos

$$4m_a^2 = (b-c)^2 + (2\cos\tfrac{\alpha}{2})^2\,bc \tag{4.54}$$

Com o valor de bc dado por (4.53) reescrevemos (4.54), obtendo

$$(b-c)^2 + 2e_a\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}(b-c) - 4m_a^2 = 0 \tag{4.55}$$

Pegamos a raiz positiva de (4.55):

$$b - c = \frac{2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}e_a \cos^2\tfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(m_a \sin\tfrac{\alpha}{2}\right)^2} - e_a\,\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (\dagger)$$

e o comprimento $b - c$ é conhecido.

Tentemos aproveitar este novo dado. Com a experiência adquirida quando da resolução do problema $<\alpha, m_a, d_a>$ (ver o exercício 75), pensamos no ponto $\mathcal{M}_a$, pé da perpendicular conduzida pelo ponto M_a (ver a figura 4.73, na página 83) à bissetriz externa (reta $\mathfrak{e}_a$) do ângulo α (ou seja, $\mathcal{M}_a$ é a projeção do ponto M_a sobre a reta $\mathfrak{e}_a$). Como M_a é o ponto médio do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$, $\mathcal{M}_a$ é o ponto médio de $\overline{\mathcal{BC}}$ (teorema sobre feixe de paralelas, ver [8]), onde $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as projeções de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ sobre $\mathfrak{e}_a$. Assim, como um cálculo fácil pode mostrar,

$$\mathbf{A}\mathcal{M}_a = \frac{(b-c)\sin\frac{\alpha}{2}}{2} \qquad (\ddagger)$$

Substituindo o valor de $b - c$ dado por (†) em (‡), resulta

$$\mathbf{A}\mathcal{M}_a = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}e_a \cos^2\tfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(m_a \sin\tfrac{\alpha}{2}\right)^2} - \tfrac{1}{2}e_a\cos^2\tfrac{\alpha}{2} \qquad (\S)$$

e o comprimento $\ell = \mathbf{A}\mathcal{M}_a$ pode ser construído! Como o comprimento $\mathbf{A}M_a$ é conhecido, podemos construir o $\triangle\,\mathbf{A}\mathcal{M}_a M_a$ (figura auxiliar) e também o ponto E_a, resolvendo assim o problema.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.73, na página 83):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) construir a bissetriz externa (reta $\mathfrak{e}_a$) do ângulo α e, em seguida, traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{A}, e_a)$ para obter o ponto E_a ($E_a = \mathfrak{e}_a \cap \phi_1$);

iii) construir o comprimento ℓ dado por (§). Traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{A}, \ell)$ e obter o ponto $\mathcal{M}_a$ ($\mathcal{M}_a = \mathfrak{e}_a \cap \phi_2$). Pelo ponto $\mathcal{M}_a$ assim obtido, traçar a reta $\mathfrak{v}$ perpendicular à reta $\mathfrak{e}_a$ ($\mathcal{M}_a \in \mathfrak{v}$ e $\mathfrak{v} \perp \mathfrak{e}_a$);

iv) traçar o arco $\phi_3 = (\mathbf{A}, m_a)$ e obter o ponto M_a ($M_a = \mathfrak{v} \cap \phi_3$);

v) se $\mathfrak{a} = (E_a, M_a)$, obter os pontos $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$) e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Seja A$'$ o simétrico do ponto $\mathbf{A}$ em relação ao ponto M_a. Logo, $\mathbf{A}\mathrm{A}' = 2m_a$ e o quadrilátero $\diamondsuit\,\mathbf{BAC}\mathrm{A}'$ é um paralelogramo pois suas diagonais se intersectam nos seus pontos médios. Então $\measuredangle\mathbf{AC}\mathrm{A}' = 180° - \measuredangle\mathbf{BAC} = 180° - \alpha = \theta$ e pode-se construir o círculo circunscrito (Γ') ao $\triangle\,\mathbf{AC}\mathrm{A}'$ pois Γ' contém o arco capaz de θ sobre o segmento $\overline{\mathbf{A}\mathrm{A}'}$.

Construa a mediatriz (reta $\mathfrak{m}'$) do segmento $\overline{\mathbf{A}\mathrm{A}'}$ e o ponto $P_1 = \mathfrak{m} \cap \Gamma'$, com P_1 pertencendo ao arco capaz. Finalmente, considere também o ponto P_2, segunda interseção da reta $\mathfrak{m}'$ com o círculo Γ' e antípoda de P_1, e as retas $\mathfrak{m}_a = (\mathbf{A}, \mathrm{A}')$ e $\mathfrak{s} = (\mathbf{C}, P_1)$.

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{AC}\mathrm{A}'$ e o ponto $P_3 = \mathfrak{m}_a \cap \mathfrak{s}$. Uma análise da figura 4.74 (ver a página 84) nos mostrará que o ponto P_3 possui duas propriedades:

i) pertence à reta $\mathfrak{m}_a = (\mathbf{A}, \mathrm{A}')$;

ii) se ℓ representa sua distância au ponto P_1 ($P_1P_3 = \ell$), então

$$\ell = P_1P_8 \tag{4.56}$$

Para provar o resultado dado pela equação (4.56), notamos que $\mathfrak{s}$ é perpendicular à bissetriz do $\angle\mathbf{AC}\mathrm{A}'$. Então $\overline{\mathbf{C}P_3}$ é a bissetriz externa do ângulo do vértice $\mathbf{C}$ no $\triangle\,\mathbf{AC}\mathrm{A}'$ e seu comprimento é

$$\mathbf{C}P_3 = \frac{2bc\sin\frac{\theta}{2}}{b-c} = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b-c} = e_a\cot\tfrac{\alpha}{2}$$

Lembramos também que, pelo exercício 33, $P_1\mathbf{C}\cdot P_1P_3 = (P_1\mathbf{A})^2$.

Sejam as retas $\mathfrak{t} = (\mathbf{A}, P_2)$ e $\mathfrak{u} = (P_1, \mathbf{A})$. Coloca-se o ponto P_4 na reta $\mathfrak{u}$ tal que $P_1P_4 = e_a$. A perpendicular à reta $\mathfrak{u}$ conduzida pelo ponto P_4 intersecta a reta $\mathfrak{m}'$ no ponto P_5 e coloca-se P_6 na reta $\mathfrak{t}$ tal que o $\diamondsuit\,\mathbf{A}P_4P_5P_6$ é um retângulo. E como $\measuredangle P_1P_2\mathbf{A} = \alpha/2$, tem-se que $P_4P_5 = \mathbf{A}P_6 = e_a\cot\frac{\alpha}{2} = \mathbf{C}P_3$.

Se $\mathfrak{O}$ é o ponto médio do segmento $\overline{\mathbf{A}P_6}$, sejam a reta $\mathfrak{v} = (P_1, \mathfrak{O})$ e o círculo ϕ_1 com diâmetro $\overline{\mathbf{A}P_6}$. Defina os pontos P_7 e P_8 como $P_7 = \mathfrak{v}\cap\phi_1$ e $P_8 = \mathfrak{v}\cap\phi_1$. Então $P_1P_7\cdot P_1P_8 = (P_1\mathbf{A})^2$ com $P_7P_8 = \mathbf{C}P_3$. Logo, $P_1P_3 = P_1P_8$ ∎

Daí a construção que segue (ver a figura 4.74, na página 84):

i) numa reta $\mathfrak{m}_a$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{A}$, M_a e A$'$ tais que $\mathbf{A}M_a = m_a$ e $M_a\mathrm{A}' = m_a$; construir o círculo Γ' e a reta $\mathfrak{m}'$; obter os pontos $P_1 = \mathfrak{m}\cap\Gamma'$ e $P_2 = \mathfrak{m}\cap\Gamma'$, com P_1 no arco capaz de θ sobre o segmento $\overline{\mathbf{A}\mathrm{A}'}$;

ii) traçar as retas $\mathfrak{t} = (\mathbf{A}, P_2)$ e $\mathfrak{u} = (\mathbf{A}, P_1)$;

iii) colocar $P_4 \in \mathfrak{u}$ tal que $P_1P_4 = e_a$ e construir o retângulo $\diamondsuit\, \mathbf{A}P_4P_5P_6$, com $P_5 \in \mathfrak{m}'$ e $P_6 \in \mathfrak{t}$;

iv) traçar o círculo ϕ_1 com centro $\mathfrak{O}$ e diâmetro $\overline{\mathbf{A}P_6}$ e a reta $\mathfrak{v} = (P_1, \mathfrak{O})$; obter os pontos $P_7 = \mathfrak{v} \cap \phi_1$ e $P_8 = \mathfrak{v} \cap \phi_1$;

v) traçar o arco $\phi_2 = (P_1, P_1P_8)$ e obter o ponto $P_3 = \mathfrak{m}_a \cap \phi_2$; traçar a reta $\mathfrak{s} = (P_3, P_1)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{s} \cap \Gamma'$); traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, M_a)$ e obter $\mathbf{B}$ como simétrico de $\mathbf{C}$ em relação ao ponto M_a.

Observação: se $\mathcal{C} = \mathfrak{c}_a \cap \mathfrak{s}$, então $\measuredangle \mathbf{A}\mathcal{C}\mathbf{C} = 90°$. Seja $\mathfrak{s}'$ a reta paralela à reta $\mathfrak{s}$ traçada por E_a ($E_a \in \mathfrak{s}'$ e $\mathfrak{s}' \parallel \mathfrak{s}$). Se $V = \mathfrak{s}' \cap \mathfrak{b}$, então $\measuredangle \mathbf{A}E_aV = 90°$ e $E_aV = e_a \cot \frac{\alpha}{2}$. Como $\mathbf{C}P_3 = VE_a$ e $\overline{\mathbf{C}P_3} \parallel \overline{VE_a}$, então o quadrilátero $\diamondsuit\, E_aP_3\mathbf{C}V$ é um paralelogramo e $\mathfrak{b}' \parallel \mathfrak{b}$, com $\mathfrak{b}' = (E_a, P_3)$.

Terceiro procedimento – Método do problema já resolvido

Seja B$'$ o simétrico do ponto $\mathbf{B}$ em relação ao ponto $\mathbf{A}$ (ver a figura 4.75, na página 85). Então $\mathbf{A}\mathrm{B}' = \mathbf{AB}$ e considere o $\triangle\, \mathbf{A}\mathrm{B}'\mathbf{C}$. Se $\overline{\mathbf{A}E'_a}$ é a bissetriz externa do vértice $\mathbf{A}$ deste triângulo, podemos escrever:

$$\frac{E'_a\mathrm{B}'}{E'_a\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{A}\mathrm{B}'}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}} \tag{4.57}$$

E como $\overline{\mathbf{A}E_a}$ é a bissetriz externa do vértice $\mathbf{A}$ do $\triangle\, \mathbf{ABC}$, podemos escrever:

$$\frac{E_a\mathbf{B}}{E_a\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}} \tag{4.58}$$

Assim, de (4.57) e (4.58), vem:

$$\frac{E_a\mathbf{B}}{E_a\mathbf{C}} = \frac{E'_a\mathrm{B}'}{E'_a\mathbf{C}}$$

e as retas $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, \mathrm{B}')$ e $\mathfrak{c}' = (E_a, E'_a)$ são paralelas.

Então $\measuredangle \mathbf{A}E'_aE_a = \measuredangle \mathrm{B}'\mathbf{A}E'_a = \frac{\alpha}{2}$ e podemos construir o triângulo retângulo $\triangle\, \mathbf{A}E_aE'_a$ pois $\mathbf{A}E_a = e_a$ é conhecido. Logo, podemos construir o comprimento $\mathbf{A}E'_a$.

Considere agora o $\triangle\, \mathbf{A}\mathrm{B}'\mathbf{C}$. Deste triângulo conhecemos $\measuredangle \mathbf{CA}\mathrm{B}' = 180° - \alpha$, $\mathrm{B}'\mathbf{C} = 2\mathbf{A}M_a = 2m_a$ (já que $\mathbf{A}$ e M_a são pontos médios de $\overline{\mathbf{B}\mathrm{B}'}$ e $\overline{\mathbf{BC}}$, respectivamente) e $\mathbf{A}E'_a$. Logo, sabemos como construir este triângulo (ver o exercício 33). Finalmente, o ponto $\mathbf{B}$ é obtido na reta $\mathfrak{c} = (\mathrm{B}', \mathbf{A})$ com $\mathbf{A}$ como ponto médio de $\overline{\mathrm{B}'\mathbf{B}}$.

Quarto procedimento – Método algébrico

Sejam $\delta = \beta - \gamma$ e $\mu = \measuredangle \mathbf{A} M_a H_a$. Sabemos que $\measuredangle H_a \mathbf{A} E_a = 90° - \frac{\delta}{2}$ e, pelo corolário 2.9 em [7], $\cos\alpha = -\frac{\cos(\mu+\delta)}{\cos\mu}$. Podemos então escrever o seguinte sistema de equações não lineares:

$$m_a \sin\mu = h_a \tag{4.59}$$

$$e_a \sin\tfrac{\delta}{2} = h_a \tag{4.60}$$

$$\sin\delta \tan\mu = \cos\delta + \cos\alpha \tag{4.61}$$

Com (4.59) e (4.60) obtemos

$$\frac{m_a^2 \sin^2\mu}{e_a^2} = \sin^2\tfrac{\delta}{2} = 1 - \cos^2\tfrac{\delta}{2} = 1 - \frac{1+\cos\delta}{2} = \frac{1-\cos\delta}{2}$$

Daí, vem:

$$\cos\delta = 1 - \frac{2m_a^2 \sin^2\mu}{e_a^2} \quad \text{e} \quad \sin\delta = \frac{2m_a \sin\mu}{e_a^2}\sqrt{e_a^2 - m_a^2\sin^2\mu}$$

Substituindo estes valores em (4.61), resulta:

$$\left[1 - \left(\frac{m_a}{e_a}\right)^2\right]\frac{\sin^2\mu}{1-\sin^2\mu} - \left[\frac{e_a(1+\cos\alpha)}{2m_a\sin\mu}\right]^2 + 1 + \cos\alpha = 0 \tag{4.62}$$

Como $<\cos\alpha, m_a, e_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.62), obtendo assim o $\sin\mu$ e com isso os três lados $<a, b, c>$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}$ cm e $e_a = 8\sqrt{21}$ cm.

Com estes valores, a equação (4.62) torna-se

$$3953\sin^4\mu - 110976\sin^2\mu + 102400 = 0 \tag{4.63}$$

É conveniente fazer a substituição $\sin\mu = h_a/m_a$ e calcular h_a. A equação (4.63) torna-se

$$59h_a^4 - 83232h_a^2 + 3859200 = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†), a única solução positiva que convém é $h_a = 4\sqrt{3}$. A construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$ pode ser efetuada agora sem dificuldades.

Exercício 81) $<\alpha, m_a, e_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{4.64}$$

$$2(b^2+c^2)-a^2 = 4m_a^2 \tag{4.65}$$

$$ac\Big[\big(\frac{b}{c-a}\big)^2 - 1\Big] = e_b^2 \tag{4.66}$$

Como $<\cos\alpha, m_a, e_b>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.64)–(4.66), Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}$ cm e $e_b = \frac{40}{3}$ cm.

Com estes valores, um programa qualquer fornece

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que este triângulo satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 82) $<\alpha, m_b, e_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares, onde primeiramente supomos $c > b$:

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha \tag{4.67}$$

$$4m_b^2 = 2(a^2+c^2)-b^2 \tag{4.68}$$

$$e_a = \frac{2bc\sin\frac{\alpha}{2}}{c-b} \Longrightarrow b = \frac{e_a c}{2c\sin\frac{\alpha}{2}+e_a} \tag{4.69}$$

Com o sistema (4.67)–(4.69), podemos mostrar que devemos encontrar as raízes da equação

$$c^4 + \frac{e_a(2-\cos\alpha)\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{1-\cos\alpha}c^3 + \frac{(5-4\cos\alpha)e_a^2/8 - m_b^2(1-\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}c^2 + \\ -\frac{2m_b^2 e_a\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{1-\cos\alpha}c - \frac{m_b^2 e_a^2}{2(1-\cos\alpha)} = 0 \tag{†}$$

Como $<\cos\alpha, m_b, e_a>$ são conhecidos, podemos resolver (†) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (†) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Devemos agora supor $b > c$. Neste caso,

$$b = \frac{e_a c}{e_a - 2c \sin\frac{\alpha}{2}}$$

e a equação cujas raízes devemos encontrar torna-se

$$c^4 - \frac{e_a(2-\cos\alpha)\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{1-\cos\alpha}c^3 + \frac{(5-4\cos\alpha)e_a^2/8 - m_b^2(1-\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}c^2 + \\ + \frac{2m_b^2 e_a\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{1-\cos\alpha}c - \frac{m_b^2 e_a^2}{2(1-\cos\alpha)} = 0 \qquad (\ddagger)$$

Como $<\cos\alpha, m_b, e_a>$ são conhecidos, podemos resolver (‡) com um programa qualquer para obter c. c^2 e c^0 (o termo independente) são iguais, as raízes de (†) e (‡) são simétricas. Logo, não há necessidade de resolver (‡).

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14} \Longrightarrow \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{3}{28}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $e_a = 8\sqrt{21}$ cm.

A equação (†) torna-se

$$c^4 + 68c^3 + \frac{5695}{4}c^2 - 3612c - 101136 = 0 \qquad (\S)$$

Resolvendo (§) com algum programa, obtemos uma raiz positiva e uma raiz negativa (raiz positiva de (‡)), as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$c_1 = 8\,\text{cm} \Longrightarrow b_1 = \frac{e_a c_1}{e_a + 2c_1 \sin\frac{\alpha}{2}} = 7\,\text{cm e } a_1 = 5\,\text{cm}$$

$$c_2' = -8{,}763984\,1\,\text{cm} \Longrightarrow c_2 = -c_2' \text{ e } b > c \Longrightarrow b_2 = \frac{e_a c_2}{e_a - 2c_2 \sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$c_2 = 8{,}763984\,1\,\text{cm} \Longrightarrow b_2 = 10{,}390019\,2\,\text{cm e } a_2 = 6{,}455139\,9\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $<a_1, b_1, c_1>$ e $<a_2, b_2, c_2>$ satisfazem todas as condições do problema.

Exercício 83) $<\alpha, m_b, e_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{4.70}$$
$$2(a^2+c^2)-b^2 = 4m_b^2 \tag{4.71}$$
$$ac\Big[\Big(\frac{b}{c-a}\Big)^2-1\Big] = e_b^2 \tag{4.72}$$

Como $<\cos\alpha, m_b, e_b>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.70)–(4.72), obtendo assim os três lados $<a,b,c>$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $e_b = \frac{40}{3}$ cm.

Com estes valores, um programa qualquer fornece

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que este triângulo satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 84) $<\alpha, m_b, e_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{4.73}$$
$$2(a^2+c^2)-b^2 = 4m_b^2 \tag{4.74}$$
$$ab\Big[\Big(\frac{c}{b-a}\Big)^2-1\Big] = e_c \tag{4.75}$$

Como $<\cos\alpha, m_b, e_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.73)–(4.75), obtendo assim os três lados $<a,b,c>$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $e_c = 5\sqrt{21}$ cm.

Com estes valores, um programa qualquer fornece

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que este triângulo satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 85) $<\alpha, m_a, R>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, R, a>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, a, m_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 23).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 86) $<\alpha, m_b, R>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, R, a>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, a, m_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 24).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 87) $<\alpha, m_a, r>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{4.76}$$

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.77}$$

$$\tan\tfrac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{2r}{b+c-a} \Longrightarrow b + c = \frac{2r}{\tan\frac{\alpha}{2}} + a \tag{4.78}$$

Com o sistema (4.76)–(4.78) podemos mostrar que o comprimento a é a raiz positiva da equação

$$a^2 + 8r\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}a + 8\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}r^2 - 4m_a^2 = 0 \tag{†}$$

Assim, a pode ser construído! Conhecemos então $<\alpha, a, m_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 23).

Uma análise da equação (†) nos dirá que esta equação possui no máximo uma raiz positiva (há dois casos a considerar: $\cos\alpha \geq 0$ e $\cos\alpha < 0$). Logo, temos a seguinte discussão:

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Segundo procedimento – Método algébrico

Sejam A′ o simétrico do ponto **A** em relação ao ponto M_a e $\mathcal{M}_a$ a projeção ortogonal de M_a sobre a reta $\mathfrak{d}_a$. Pode-se colocar o $\triangle$ **ABC** num sistema de coordenadas cartesianas retangulares onde o vértice **A** é a origem e a reta $\mathfrak{d}_a$, o eixo x. Assim, as coordenadas dos pontos a seguir tomam os seguintes valores: $\mathbf{A} = (0, 0)$, $I = (x_I, 0)$, $M_a = (x_M, y_M)$, $\mathcal{M}_a = (x_M, 0)$ e $\mathrm{A}' = (2x_M, 2y_M)$.

Se (ver a figura 4.76, na página 86) $\theta = \angle I\mathbf{A}Y$, então $\tan\theta = t = r/\sqrt{x_I^2 - r^2}$. A equação da reta $\mathfrak{b}$ é $y = tx$ e a da reta $\mathfrak{c}$ é $y = -tx$. A reta $\mathfrak{b}'' = (\mathrm{A}', \mathbf{B})$ é paralela à reta $\mathfrak{b}$ (o $\diamondsuit\,\mathbf{BAC}\mathrm{A}'$ é um paralelogramo) e tem como equação $y - 2y_M = t(x - 2x_M)$. Como $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}''$, obtêm-se as coordenadas para o ponto **B**, ou seja, $\mathbf{B} = (x_M - \frac{y_M}{t}, y_M - tx_M)$. As coordenadas $(x_{\mathbf{C}}, y_{\mathbf{C}})$ do ponto **C** e a equação da reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ são calculadas usando-se os pontos **B** e M_a. Assim $\mathbf{C} = (x_M + \frac{y_M}{t}, y_M + tx_M)$ e $\mathfrak{a}:\ t^2 x_M x - y_M y + y_M^2 - t^2 x_M^2 = 0$.

Sabe-se pela geometria analítica (ver [6], por exemplo) que a distância ℓ entre a reta $ux + vy + w = 0$ e o ponto $P = (x_1, y_1)$ é $\ell = \frac{ux_1 + vy_1 + w}{\pm\sqrt{u^2+v^2}}$, onde o sinal do denominador é o oposto do sinal de w. Considerando o ponto I e a reta $\mathfrak{a}$, $\ell = r$ e a fórmula da distância resulta na equação

$$r = \frac{t^2 x_I x_M + y_M^2 - t^2 x_M^2}{\pm\sqrt{t^4 x_M^2 + y_M^2}} \tag{4.79}$$

Substituindo t^2 por $r^2/(x_I^2 - r^2)$ e y_M^2 por $m_a^2 - x_M^2$ na equação (4.79) e simplificando, vem:

$$r^2\left[(m_a x_I^2 - m_a r^2)^2 + x_I^2 x_M^2 (2r^2 - x_I^2)\right] = \left[(x_I^2 m_a^2 - m_a^2 r^2) - x_I x_M (x_I x_M - r^2)\right]^2 \tag{4.80}$$

Desenvolvendo e simplificando (4.80), resulta:

$$\begin{gathered} x_I^4 x_M^4 - 2r^2 x_I^3 x_M^3 - r^4 x_I^2 x_M^2 - 2m_a^2 x_I^4 x_M^2 + 2m_a^2 r^2 x_I^2 x_M^2 + r^2 x_I^4 x_M^2 + 2m_a^2 r^2 x_I^3 x_M + \\ - 2m_a^2 r^4 x_I x_M + m_a^4 x_I^4 - 2m_a^4 r^2 x_I^2 + m_a^4 r^4 - m_a^2 r^6 + 2m_a^2 r^4 x_I^2 - m_a^2 r^2 x_I^4 = f(x_M) = 0 \end{gathered} \tag{†}$$

Usando um programa de computação algébrica (cálculos simbólicos), $f(x_M)$ pode ser fatorada:

$$f(x_M) = (x_I^2 x_M^2 + m_a^2 r^2 - m_a^2 x_I^2)[x_I^2 x_M^2 - 2r^2 x_I x_M - r^4 - m_a^2 x_I^2 + m_a^2 r^2 + r^2 x_I^2]$$

Assim, as raízes de $f(x_M)$ em (†) são:

$$(x_I x_M)^2 = m_a^2 (x_I^2 - r^2) \implies x_M = \pm\frac{m_a}{x_I}\sqrt{x_I^2 - r^2} \qquad \text{(raízes estranhas)}$$

$$\begin{aligned} x_I^2 x_M^2 - 2r^2 x_I x_M &= r^4 + m_a^2 x_I^2 - m_a^2 r^2 - r^2 x_I^2 \\ x_I x_M (x_I x_M - 2r^2) &= (x_I^2 - r^2)(m_a^2 - r^2) \\ x_M \left(x_M - 2r\frac{r}{x_I}\right) &= \left[1 - (\frac{r}{x_I})^2\right](m_a^2 - r^2) \end{aligned}$$

Como $\frac{r}{x_I} = \sin\frac{\alpha}{2}$, deve-se construir o comprimento x_M tal que

$$x_M\left(x_M - 2r\sin\tfrac{\alpha}{2}\right) = \left(\cos\tfrac{\alpha}{2}\sqrt{m_a^2 - r^2}\,\right)^2$$

Ou na notação da figura 4.76, $P_5P_6(P_5P_6 - 2IP_2) = P_2P_5{}^2$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.76, na página 86):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$; construir a reta $\mathfrak{d}_a$ e, servindo-se do raio r, coloca-se o ponto I na reta $\mathfrak{d}_a$; traçar a reta $\mathfrak{r}$ ($I \in \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{b}$) e obter o ponto Y;

ii) traçar o círculo inscrito γ_i e obter o ponto P_1 ($P_1 = \mathfrak{d}_a \cap \gamma_i$); traçar a reta $\mathfrak{b}'$ ($P_1 \in \mathfrak{b}'$ e $\mathfrak{b}' \parallel \mathfrak{b}$) e obter o ponto P_2 ($P_2 = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{b}'$);

iii) traçar o arco $\phi_1 = (I, m_a)$; obter o ponto P_3 ($P_3 = \mathfrak{b} \cap \phi_1$) e o comprimento $\ell_1 = YP_3 = \sqrt{m_a^2 - r^2}$; traçar o arco $\phi_2 = (I, \ell_1)$ e obter o ponto P_4 ($P_4 = \mathfrak{d}_a \cap \phi_2$);

iv) construir a reta $\mathfrak{s}$ ($P_4 \in \mathfrak{s}$ e $\mathfrak{s} \perp \mathfrak{b}'$); obter o ponto P_5 ($P_5 = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{b}'$) e traçar a reta $\mathfrak{t} = (I, P_5)$;

v) traçar o círculo $\phi_3 = (I, IP_2)$; obter o ponto P_6 ($P_6 = \mathfrak{t} \cap \phi_3$) e o comprimento $\ell_2 = P_5P_6$; traçar o arco $\phi_4 = (\mathbf{A}, \ell_2)$ e obter o ponto $\mathcal{M}_a$ ($\mathcal{M}_a = \mathfrak{d}_a \cap \phi_4$);

vi) construir a reta $\mathfrak{u}$ ($\mathcal{M}_a \in \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u} \perp \mathfrak{d}_a$); traçar o arco $\phi_5 = (\mathbf{A}, m_a)$ e obter o ponto M_a ($M_a = \mathfrak{u} \cap \phi_5$);

vii) traçar o círculo ϕ_6 de diâmetro $\overline{IM_a}$ e obter o ponto X ($X = \gamma_i \cap \phi_6$);

viii) traçar a reta $\mathfrak{a} = (M_a, X)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$) e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$).

Terceiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 4.77 (ver a página 87) nos mostrará que o ponto M_a possui duas propriedades:

i) pertence à circunferência $\phi = (\mathbf{A}, m_a)$;

ii) pertence à curva (cônica) $\mathfrak{H}$ dada por

$$(y \tan \tfrac{\alpha}{2})^2 - x^2 = (r \tan \tfrac{\alpha}{2})^2 \tag{4.81}$$

A cônica dada por (4.81) representa o lugar geométrico descrito por M_a quando a reta livre $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ se move tangenciando o círculo inscrito γ_i.

Para provar o resultado dado por (4.81), coloquemos o $\triangle\,\mathbf{ABC}$ num sistema de coordenadas cartesianas retangulares onde o ponto I é a origem e a bissetriz interna $\mathfrak{d}_a$, a reta $x = 0$ (eixo y). Assim, as coordenadas do incentro I e do vértice $\mathbf{A}$ tomam os seguintes valores: $I = (0, 0)$ e $\mathbf{A} = (0, -r \csc \frac{\alpha}{2})$. Podemos escrever:

$$\text{reta } \mathfrak{b}\text{:} \quad y - y_{\mathbf{A}} = \tan(90^\circ + \tfrac{\alpha}{2})(x - x_{\mathbf{A}}) \implies y + r \csc \tfrac{\alpha}{2} = -\cot \tfrac{\alpha}{2} x \tag{4.82}$$

$$\text{reta } \mathfrak{c}\text{:} \quad y - y_{\mathbf{A}} = \tan(90^\circ - \tfrac{\alpha}{2})(x - x_{\mathbf{A}}) \implies y + r \csc \tfrac{\alpha}{2} = \cot \tfrac{\alpha}{2} x \tag{4.83}$$

Sendo X o ponto de tangência do círculo inscrito γ_i com a reta $\mathfrak{a}$, defina a reta $\mathfrak{t} = (I, X)$. Se θ é o ângulo formado por $\mathfrak{t}$ e o eixo x (reta $\mathfrak{e}_a'$), as coordenadas de X são $X = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ e a equação da reta $\mathfrak{t}$ é dada por $\mathfrak{t}:\ y = \tan \theta x$. Então, como $X \in \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{t}$, a equação de $\mathfrak{a}$ é dada por

$$\begin{aligned} \text{reta } \mathfrak{a}\text{:} \qquad y - y_X &= -\tfrac{1}{\tan\theta}(x - x_X) \\ y - r\sin\theta &= -\cot\theta(x - r\cos\theta) \end{aligned} \tag{4.84}$$

Assim, $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$. Resolvendo (4.83) e (4.84), obtemos $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \left(r \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\theta}{\sin(\frac{\alpha}{2} + \theta)}, r \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\theta}{\sin(\frac{\alpha}{2} + \theta)} \right) \tag{4.85}$$

Resolvendo (4.82) e (4.84), obtemos $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \left(r \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\theta}{\sin(\frac{\alpha}{2} - \theta)}, -r \frac{\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\theta}{\sin(\frac{\alpha}{2} - \theta)} \right) \tag{4.86}$$

Finalmente, $M_a = (\mathbf{B} + \mathbf{C})/2$, e de (4.85) e (4.86) obtemos:

$$M_a = \left(-r \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cos\theta}{\sin\theta - \sin\frac{\alpha}{2}}, r \frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2} \sin\theta}{\sin\theta - \sin\frac{\alpha}{2}} \right) \quad \text{ou} \quad M_a = (x_{M_a}, y_{M_a})$$

Podemos expressar $\sin\theta$ em função de y_{M_a}:

$$y_{M_a} = r \frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\theta}{\sin\theta - \sin\frac{\alpha}{2}} \implies \sin\theta = \frac{y_{M_a} \sin\frac{\alpha}{2} + r}{y_{M_a} + r \sin\frac{\alpha}{2}}$$

Substituindo este valor de $\sin\theta$ em x_{M_a}, desenvolvendo e simplificando, resulta:

$$(y_{M_a}\tan\tfrac{\alpha}{2})^2 - x_{M_a}^2 = (r\tan\tfrac{\alpha}{2})^2 \qquad \blacksquare$$

A equação (4.81) será uma hipérbole (ver [6], por exemplo) se $r\tan\frac{\alpha}{2} \neq 0$. Colocando-a na forma

$$\frac{y^2}{r^2} - \frac{x^2}{(r\tan\frac{\alpha}{2})^2} = 1$$

reconhecemos (4.81) como uma hipérbole ($\mathfrak{H}$) centrada na origem (ou seja, no ponto I) e com focos nos pontos $\mathcal{F}_1 = (0, r\sec\frac{\alpha}{2})$ e $\mathcal{F}_2 = (0, -r\sec\frac{\alpha}{2})$, vértices nos pontos $\mathcal{V}_1 = (0, r)$ e $\mathcal{V}_2 = (0, -r)$ e assíntotas dadas pelas retas $y = \pm\cot\frac{\alpha}{2}x$, ou seja, as assíntotas são paralelas aos lados $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$ do triângulo (ver [1]).

O outro lugar geométrico do ponto M_a é o círculo (ϕ) centrado em $\mathbf{A}$ de raio m_a, ou seja,

$$x^2 + (y + r\csc\tfrac{\alpha}{2})^2 = m_a^2 \tag{4.87}$$

Assim, $M_a = \mathfrak{H} \cap \phi$. Geralmente, as interseções de uma hipérbole com um círculo não são construtíveis com régua e compasso mas se o centro do círculo pertence ao eixo da hipérbole, como acontece aqui, esta construção é possível. Para tal, basta observar que substituindo o valor de x^2 dado por (4.81) em (4.87), a coordenada y_{M_a} pode ser construída. Procedendo a este cálculo, após simples manipulações algébricas obtemos a seguinte equação do segundo grau em y_{M_a}:

$$\begin{aligned}
y_{M_a}^2 + 2r\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}y_{M_a} &= (m_a\cos\tfrac{\alpha}{2})^2 + (r\sin\tfrac{\alpha}{2})^2 - (r\cot\tfrac{\alpha}{2})^2 \\
y_{M_a}(y_{M_a} + 2r\cot\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2}) &= (m_a\cos\tfrac{\alpha}{2})^2 + (r\sin\tfrac{\alpha}{2})^2 - (r\cot\tfrac{\alpha}{2})^2 \\
y_{M_a}(y_{M_a} + u) &= v^2 \qquad (4.88)
\end{aligned}$$

Daí a construção que segue (ver a figura 4.78, na página 88):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$; construir a reta $\mathfrak{d}_a$ e, servindo-se do raio r, coloca-se o ponto I na reta $\mathfrak{d}_a$;

ii) construir a reta $\mathfrak{r}$ ($I \in \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{b}$) e obter o ponto Y; traçar o círculo inscrito $\gamma_i = (I, IY)$;

iii) construir o comprimento y_{M_a} dado por (4.88) (ver a figura 4.79, na página 89);

iv) traçar o círculo $\phi_1 = (I, y_{M_a})$ e obter o ponto $\mathcal{M}_a$, projeção ortogonal de M_a sobre a reta $\mathfrak{d}_a$ ($\mathcal{M}_a = \mathfrak{d}_a \cap \phi_1$);

v) construir a reta $\mathfrak{u}$ ($\mathcal{M}_a \in \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u} \perp \mathfrak{d}_a$); traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{A}, m_a)$ e obter o ponto M_a ($M_a = \mathfrak{u} \cap \phi_2$);

vi) traçar o círculo ϕ_3 de diâmetro $\overline{IM_a}$ e obter o ponto X ($X = \gamma_i \cap \phi_3$);

vii) traçar a reta $\mathfrak{a} = (M_a, X)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$) e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$).

Exercício 88) $<\alpha, m_b, r>$

Método algébrico

Podemos construir o $\triangle \mathbf{A}IY$ pois $\measuredangle I\mathbf{A}Y = \frac{\alpha}{2}$, $\measuredangle IY\mathbf{A} = 90°$ e $IY = r$. Logo, conhecemos $\mathbf{A}Y = r\cot\frac{\alpha}{2} = p - a = \ell$. Ou $a = b + c - 2\ell$. Assim, escrevemos o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a^2 = [(b+c) - 2\ell]^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{4.89}$$

$$b = \frac{2\ell(c-\ell)}{(1+\cos\alpha)c - 2\ell} \tag{4.90}$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{4.91}$$

Substituindo o valor de a^2 dado por (4.89) em (4.91), vem:

$$b^2 + 4(c - 2\ell)b + 4(c^2 - 2\ell c + 2\ell^2 - m_b^2) = 0 \tag{4.92}$$

Finalmente, substituindo o valor de b dado por (4.90) em (4.92), resulta:

$$\begin{aligned} &\ell^2(c-l)^2 + 2\ell(c^2 - 3\ell c + 2\ell^2)[(1+\cos\alpha)c - 2\ell] + \\ &\quad + (c^2 - 2\ell c + 2\ell^2 - m_b^2)[(1+\cos\alpha)c - 2\ell]^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.93}$$

Como $<\cos\alpha, m_b, r>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.93) com um programa qualquer para obter c. E, em seguida, b e a.

Se a equação (4.93) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14} \Longrightarrow \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $r = \sqrt{3}$ cm $\Longrightarrow \ell = 5$ cm.

A equação (4.93) torna-se

$$100c^4 - 1560c^3 + 5359c^2 + 15960c - 81536 = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtemos uma raiz negativa e três raízes positivas, as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$c_1 = 8\,\text{cm} \implies b_1 = 7\,\text{cm e } a_1 = 5\,\text{cm}$$

$$c_2 = 5{,}871888\,7\,\text{cm} \implies b_2 = \frac{28(c_2 - 5)}{5c_2 - 28} = 17{,}957998\,3\,\text{cm}$$

$$a_2 = b_2 + c_2 - 10 = 13{,}829887\,0\,\text{cm}$$

$$c_3 = 5{,}118919\,9\,\text{cm} \implies b_3 < 0$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $<a_1, b_1, c_1>$ e $<a_2, b_2, c_2>$ satisfazem todas as condições do problema.

Exercício 89) $<\alpha, m_a, r_a>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{4.94}$$

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.95}$$

$$\tan\tfrac{\alpha}{2} = \frac{r_a}{p} = \frac{2r_a}{a+b+c} \implies b + c = \frac{2r_a}{\tan\frac{\alpha}{2}} - a \tag{4.96}$$

Com o sistema (4.94)–(4.96) podemos mostrar que o comprimento a é uma raiz positiva da equação

$$a^2 - 8r_a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}a + 8\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}r_a^2 - 4m_a^2 = 0 \tag{†}$$

Assim, a pode ser construído! Conhecemos então $<\alpha, a, m_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 23).

Uma análise da equação (†) nos dirá que esta equação possui no máximo uma raiz positiva se $\alpha \geq 90°$ mas se $\alpha < 90°$ esta equação pode possuir duas raízes positivas. Logo, nada podemos afirmar quanto ao número de soluções sem um estudo mais aprofundado. Em [5], problema 181, encontramos tal estudo e podemos escrever:

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Segundo procedimento – Método algébrico

Sejam A′ o simétrico do ponto **A** em relação ao ponto M_a e $\mathcal{M}_a$ a projeção ortogonal de M_a sobre a reta $\mathfrak{d}_a$. Pode-se colocar o $\triangle$ **ABC** num sistema de coordenadas cartesianas retangulares onde o vértice **A** é a origem e a reta $\mathfrak{d}_a$, o eixo x. Assim, as coordenadas dos pontos a seguir tomam os seguintes valores: $\mathbf{A} = (0,0)$, $I_a = (x_I, 0)$, $M_a = (x_M, y_M)$, $\mathcal{M}_a = (x_M, 0)$ e $\mathrm{A}' = (2x_M, 2y_M)$.

Se (ver a figura 4.80, na página 90) $\theta = \angle I_a \mathbf{A} Y_a$, então $\tan\theta = t = r_a/\sqrt{x_I^2 - r_a^2}$. A equação da reta $\mathfrak{b}$ é $y = tx$ e a da reta $\mathfrak{c}$ é $y = -tx$. A reta $\mathfrak{b}'' = (\mathrm{A}', \mathbf{B})$ é paralela à reta $\mathfrak{b}$ (o $\diamondsuit\,\mathbf{BAC}\mathrm{A}'$ é um paralelogramo) e tem como equação $y - 2y_M = t(x - 2x_M)$. Como $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}''$, obtêm-se as coordenadas para o ponto **B**, ou seja, $\mathbf{B} = (x_M - \frac{y_M}{t}, y_M - tx_M)$. As coordenadas $(x_\mathbf{C}, y_\mathbf{C})$ do ponto **C** e a equação da reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ são calculadas usando-se os pontos **B** e M_a. Assim $\mathbf{C} = (x_M + \frac{y_M}{t}, y_M + tx_M)$ e $\mathfrak{a}:\ t^2 x_M x - y_M y + y_M^2 - t^2 x_M^2 = 0$.

Sabe-se pela geometria analítica (ver [6], por exemplo) que a distância ℓ entre a reta $ux + vy + w = 0$ e o ponto $P = (x_1, y_1)$ é $\ell = \frac{ux_1 + vy_1 + w}{\pm\sqrt{u^2+v^2}}$, onde o sinal do denominador é o oposto do sinal de w. Considerando o ponto I_a e a reta $\mathfrak{a}$, $\ell = r_a$ e a fórmula da distância resulta na equação

$$r_a = \frac{t^2 x_I x_M + y_M^2 - t^2 x_M^2}{\pm\sqrt{t^4 x_M^2 + y_M^2}} \tag{4.97}$$

Substituindo t^2 por $r_a^2/(x_I^2 - r_a^2)$ e y_M^2 por $m_a^2 - x_M^2$ na equação (4.97) e simplificando, vem:

$$r_a^2\left[(m_a x_I^2 - m_a r_a^2)^2 + x_I^2 x_M^2 (2r_a^2 - x_I^2)\right] = \left[(x_I^2 m_a^2 - m_a^2 r_a^2) - x_I x_M (x_I x_M - r_a^2)\right]^2 \tag{4.98}$$

Desenvolvendo e simplificando (4.98), resulta:

$$\begin{aligned} &x_I^4 x_M^4 - 2r_a^2 x_I^3 x_M^3 - r_a^4 x_I^2 x_M^2 - 2m_a^2 x_I^4 x_M^2 + 2m_a^2 r_a^2 x_I^2 x_M^2 + r_a^2 x_I^4 x_M^2 + 2m_a^2 r_a^2 x_I^3 x_M + \\ &- 2m_a^2 r_a^4 x_I x_M + m_a^4 x_I^4 - 2m_a^4 r_a^2 x_I^2 + m_a^4 r_a^4 - m_a^2 r_a^6 + 2m_a^2 r_a^4 x_I^2 - m_a^2 r_a^2 x_I^4 = \\ &= f(x_M) = 0 \qquad (\dagger) \end{aligned}$$

Usando um programa de computação algébrica (cálculos simbólicos), $f(x_M)$ pode ser fatorada:

$$f(x_M) = (x_I^2 x_M^2 + m_a^2 r_a^2 - m_a^2 x_I^2)[x_I^2 x_M^2 - 2r_a^2 x_I x_M - r_a^4 - m_a^2 x_I^2 + m_a^2 r_a^2 + r_a^2 x_I^2]$$

Assim, as raízes de $f(x_M)$ em (†) são:

$$(x_I x_M)^2 = m_a^2 (x_I^2 - r_a^2) \implies x_M = \pm\frac{m_a}{x_I}\sqrt{x_I^2 - r_a^2} \qquad \text{(raízes estranhas)}$$

$$\begin{aligned} x_I^2 x_M^2 - 2r_a^2 x_I x_M &= r_a^4 + m_a^2 x_I^2 - m_a^2 r_a^2 - r_a^2 x_I^2 \\ x_I x_M (x_I x_M - 2r_a^2) &= (x_I^2 - r_a^2)(m_a^2 - r_a^2) \\ x_M\left(x_M - 2r_a \frac{r_a}{x_I}\right) &= \left[1 - \left(\frac{r_a}{x_I}\right)^2\right](m_a^2 - r_a^2) \end{aligned}$$

Como $\frac{r_a}{x_I} = \sin\frac{\alpha}{2}$, deve-se construir o comprimento x_M tal que

$$x_M(x_M - 2r_a \sin\tfrac{\alpha}{2}) = \left(\cos\tfrac{\alpha}{2}\sqrt{m_a^2 - r_a^2}\right)^2 \qquad (4.99)$$

Ou na notação da figura 4.80, $P_5P_6(P_5P_6 - 2I_aP_2) = P_2P_5{}^2$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.80, na página 90):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$; construir a reta $\mathfrak{d}_a$ e, servindo-se do raio r_a, coloca-se o ponto I_a na reta $\mathfrak{d}_a$; traçar a reta $\mathfrak{r}$ ($I_a \in \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{b}$) e obter o ponto Y_a;

ii) traçar o círculo exinscrito γ_a e obter o ponto P_1 ($P_1 = \mathfrak{d}_a \cap \gamma_a$); traçar a reta $\mathfrak{b}'$ ($P_1 \in \mathfrak{b}'$ e $\mathfrak{b}' \parallel \mathfrak{b}$) e obter o ponto P_2 ($P_2 = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{b}'$);

iii) traçar o arco $\phi_1 = (I_a, m_a)$; obter o ponto P_3 ($P_3 = \mathfrak{b} \cap \phi_1$) e o comprimento $\ell_1 = Y_aP_3 = \sqrt{m_a^2 - r_a^2}$; traçar o arco $\phi_2 = (I_a, \ell_1)$ e obter o ponto P_4 ($P_4 = \mathfrak{d}_a \cap \phi_2$);

iv) construir a reta $\mathfrak{s}$ ($P_4 \in \mathfrak{s}$ e $\mathfrak{s} \perp \mathfrak{b}'$); obter o ponto P_5 ($P_5 = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{b}'$) e traçar a reta $\mathfrak{t} = (I_a, P_5)$;

v) traçar o círculo $\phi_3 = (I_a, I_aP_2)$; obter o ponto P_6 ($P_6 = \mathfrak{t} \cap \phi_3$) e o comprimento $\ell_2 = P_5P_6$; traçar o arco $\phi_4 = (\mathbf{A}, \ell_2)$ e obter o ponto $\mathcal{M}_a$ ($\mathcal{M}_a = \mathfrak{d}_a \cap \phi_4$);

vi) construir a reta $\mathfrak{u}$ ($\mathcal{M}_a \in \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u} \perp \mathfrak{d}_a$); traçar o arco $\phi_5 = (\mathbf{A}, m_a)$ e obter o ponto M_a ($M_a = \mathfrak{u} \cap \phi_5$);

vii) traçar o círculo ϕ_6 de diâmetro $\overline{I_aM_a}$ e obter o ponto X_a ($X_a = \gamma_a \cap \phi_6$);

viii) traçar a reta $\mathfrak{a} = (M_a, X_a)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$) e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$).

Observação: a construção acima supôs $m_a > r_a$. Para o caso $m_a < r_a$, ver a figura 4.81, na página 91, onde os detalhes da construção são deixados para o leitor. Deve-se notar ainda que P_2P_6 é uma raiz estranha da equação (4.99) e que somente P_6P_7 convém.

Exercício 90) $<\alpha, m_a, r_b>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Uma análise da figura 4.82 (ver a página 92) nos mostrará que podemos construir o $\triangle \mathbf{A}I_b Z_b$ pois $\measuredangle \mathbf{A}Z_b I_b = 90°$, $\measuredangle \mathbf{A}I_b Z_b = \alpha/2$ e $I_b Z_b = r_b$. Portanto, $\mathbf{A}Z_b = p - c = \ell$ é conhecido. Então, como $a + b - c = 2\ell$, escrevemos o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{4.100}$$

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.101}$$

$$a + b - c = 2\ell \tag{4.102}$$

Com o sistema (4.100)–(4.102) e sabendo que $\ell = r_b \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} r_b$, podemos mostrar que os comprimentos a são as raízes da equação

$$a^2 + 8r_b \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} a - 8\frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha} r_b^2 - 4m_a^2 = 0 \tag{†}$$

Assim, a pode ser construído! Conhecemos então $< \alpha, a, m_a >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 23).

Uma análise da equação (†) nos dirá que esta equação possui no máximo uma raiz positiva se $\alpha \leq 90°$ mas se $\alpha > 90°$ esta equação pode possuir duas raízes positivas. Logo, nada podemos afirmar quanto ao número de soluções sem um estudo mais aprofundado. Em [5], problema 182, encontramos tal estudo e podemos escrever:

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle \mathbf{ABC}$ e $\triangle \mathbf{AB'C'}$) soluções (ver a figura 4.83, na página 93).

Segundo procedimento – Método algébrico

Sejam A' o simétrico do ponto $\mathbf{A}$ em relação ao ponto M_a e $\mathcal{M}_a$ a projeção ortogonal de M_a sobre a reta $\mathfrak{e}_a$. Pode-se colocar o $\triangle \mathbf{ABC}$ num sistema de coordenadas cartesianas retangulares onde o vértice $\mathbf{A}$ é a origem e a reta $\mathfrak{e}_a$, o eixo x. Assim, as coordenadas dos pontos a seguir tomam os seguintes valores: $\mathbf{A} = (0,0)$, $I_b = (x_I, 0)$, $M_a = (x_M, -y_M)$, $\mathcal{M}_a = (x_M, 0)$ e $\mathrm{A}' = (2x_M, -2y_M)$.

Se (ver a figura 4.82, na página 92) $\theta = \angle I_b \mathbf{A} Z_b$, então $\tan\theta = t = r_b/\mathbf{A}Z_b = r_b/\sqrt{x_I^2 - r_b^2}$. A equação da reta $\mathfrak{c}$ é $y = tx$ e a da reta $\mathfrak{b}$ é $y = -tx$. A reta $\mathfrak{c}' = (\mathrm{A}', \mathbf{C})$ é paralela à reta $\mathfrak{c}$ (o $\diamondsuit \mathbf{BAC}\mathrm{A}'$ é um paralelogramo) e tem como equação $y + 2y_M = t(x - 2x_M)$. Como $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}'$, obtêm-se as coordenadas para o ponto $\mathbf{C}$, ou seja, $\mathbf{C} = (x_M + \frac{y_M}{t}, -y_M - tx_M)$. As coordenadas $(x_\mathbf{B}, y_\mathbf{B})$ do ponto $\mathbf{B}$ e a equação da reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ são calculadas usando-se os pontos $\mathbf{C}$ e M_a. Assim $\mathbf{B} = (x_M - \frac{y_M}{t}, -y_M + tx_M)$ e $\mathfrak{a}:\ t^2 x_M x + y_M y + y_M^2 - t^2 x_M^2 = 0$.

Sabe-se pela geometria analítica (ver [6], por exemplo) que a distância ℓ entre a reta $ux + vy + w = 0$ e o ponto $P = (x_1, y_1)$ é $\ell = \frac{ux_1 + vy_1 + w}{\pm\sqrt{u^2+v^2}}$, onde o sinal do denominador é o oposto do sinal de w. Considerando o ponto I_b e a reta $\mathfrak{a}$, $\ell = r_b$ e a fórmula da distância resulta na equação

$$r_b = \frac{t^2 x_I x_M + y_M^2 - t^2 x_M^2}{\pm\sqrt{t^4 x_M^2 + y_M^2}} \tag{4.103}$$

Substituindo t^2 por $r_b^2/(x_I^2 - r_b^2)$ e y_M^2 por $m_a^2 - x_M^2$ na equação (4.103) e simplificando, vem:

$$r_b^2\big[(m_a x_I^2 - m_a r_b^2)^2 + x_I^2 x_M^2(2r_b^2 - x_I^2)\big] = \big[(x_I^2 m_a^2 - m_a^2 r_b^2) - x_I x_M(x_I x_M - r_b^2)\big]^2 \tag{4.104}$$

Desenvolvendo e simplificando (4.104), resulta:

$$x_I^4 x_M^4 - 2r_b^2 x_I^3 x_M^3 - r_b^4 x_I^2 x_M^2 - 2m_a^2 x_I^4 x_M^2 + 2m_a^2 r_b^2 x_I^2 x_M^2 + r_b^2 x_I^4 x_M^2 + 2m_a^2 r_b^2 x_I^3 x_M + \\ -2m_a^2 r_b^4 x_I x_M + m_a^4 x_I^4 - 2m_a^4 r_b^2 x_I^2 + m_a^4 r_b^4 - m_a^2 r_b^6 + 2m_a^2 r_b^4 x_I^2 - m_a^2 r_b^2 x_I^4 = f(x_M) = 0 \tag{†}$$

Usando um programa de computação algébrica (cálculos simbólicos), $f(x_M)$ pode ser fatorada:

$$f(x_M) = (x_I^2 x_M^2 + m_a^2 r_b^2 - m_a^2 x_I^2)[x_I^2 x_M^2 - 2r_b^2 x_I x_M - r_b^4 - m_a^2 x_I^2 + m_a^2 r_b^2 + r_b^2 x_I^2]$$

Assim, as raízes de $f(x_M)$ em (†) são:

$$(x_I x_M)^2 = m_a^2(x_I^2 - r_b^2) \implies x_M = \pm\frac{m_a}{x_I}\sqrt{x_I^2 - r_b^2} \qquad \text{(raízes estranhas)}$$

$$\begin{aligned} x_I^2 x_M^2 - 2r_b^2 x_I x_M &= r_b^4 + m_a^2 x_I^2 - m_a^2 r_b^2 - r_b^2 x_I^2 \\ x_I x_M(x_I x_M - 2r_b^2) &= (x_I^2 - r_b^2)(m_a^2 - r_b^2) \\ x_M\big(x_M - 2r_b\frac{r_b}{x_I}\big) &= \big[1 - (\frac{r_b}{x_I})^2\big](m_a^2 - r_b^2) \end{aligned}$$

Como $\frac{r_b}{x_I} = \cos\frac{\alpha}{2} = \sin\theta$, deve-se construir o comprimento x_M tal que

$$x_M(x_M - 2r_b\sin\theta) = \big(\cos\theta\sqrt{m_a^2 - r_b^2}\big)^2 \tag{‡}$$

Ou na notação da figura 4.82, $P_5P_7(P_5P_7 - 2I_bP_2) = P_2P_5{}^2$. Entretanto, esta raiz é estranha e estamos interessados no comprimento ℓ tal que $\ell = -x_M$ ou $\ell(\ell + 2r_b\sin\theta) = P_2P_5{}^2$. Assim, $\ell = P_5P_6$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.82, na página 92):

i) construir o ângulo α de vértice **A**, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$; construir a reta $\mathfrak{e}_a$ e, servindo-se do raio r_b, coloca-se o ponto I_b na reta $\mathfrak{e}_a$; traçar a reta $\mathfrak{r}$ ($I_b \in \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{b}$) e obter o ponto Y_b;

ii) traçar o círculo exinscrito γ_b e obter os pontos Z_b ($Z_b \in \gamma_b$ e $\mathbf{A}Z_b = \mathbf{A}Y_b$) e P_1 ($P_1 = \mathfrak{e}_a \cap \gamma_b$); traçar a reta $\mathfrak{b}'$ ($P_1 \in \mathfrak{b}'$ e $\mathfrak{b}' \parallel \mathfrak{b}$) e obter o ponto P_2 ($P_2 = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{b}'$);

iii) traçar o arco $\phi_1 = (I_b, m_a)$; obter o ponto P_3 ($P_3 = \mathfrak{c} \cap \phi_1$) e o comprimento $\ell_1 = Z_b P_3 = \sqrt{m_a^2 - r_b^2}$; traçar o arco $\phi_2 = (I_b, \ell_1)$ e obter o ponto P_4 ($P_4 = \mathfrak{e}_a \cap \phi_2$);

iv) construir a reta $\mathfrak{s}$ ($P_4 \in \mathfrak{s}$ e $\mathfrak{s} \perp \mathfrak{b}'$); obter o ponto P_5 ($P_5 = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{b}'$) e traçar a reta $\mathfrak{t} = (I_b, P_5)$;

v) traçar o círculo $\phi_3 = (I_b, I_b P_2)$; obter o ponto P_6 ($P_6 = \mathfrak{t} \cap \phi_3$) e o comprimento $\ell_2 = P_5 P_6$; traçar o arco $\phi_4 = (\mathbf{A}, \ell_2)$ e obter o ponto $\mathcal{M}_a$ ($\mathcal{M}_a = \mathfrak{e}_a \cap \phi_4$);

vi) construir a reta $\mathfrak{u}$ ($\mathcal{M}_a \in \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u} \perp \mathfrak{e}_a$); traçar o arco $\phi_5 = (\mathbf{A}, m_a)$ e obter o ponto M_a ($M_a = \mathfrak{u} \cap \phi_5$);

vii) traçar o círculo ϕ_6 de diâmetro $\overline{I_b M_a}$ e obter o ponto X_b ($X_b = \gamma_b \cap \phi_6$);

viii) traçar a reta $\mathfrak{a} = (M_a, X_b)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$) e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$).

Caso $r_b > m_a$, a equação (‡) torna-se

$$x_M(x_M - 2r_b \sin\theta) = -\left(\cos\theta\sqrt{r_b^2 - m_a^2}\right)^2$$

Ou na notação da figura 4.83, $x_M(x_M - P_2P_7) + P_2P_5{}^2 = 0$. Assim, $\mathbf{A}\mathcal{M}_a = P_2P_6$ e $\mathbf{A}\mathcal{M}'_a = P_6P_7$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.83, na página 93):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$; construir a reta $\mathfrak{e}_a$ e, servindo-se do raio r_b, coloca-se o ponto I_b na reta $\mathfrak{e}_a$; traçar a reta $\mathfrak{r}$ ($I_b \in \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{b}$) e obter o ponto Y_b;

ii) traçar o círculo exinscrito γ_b e obter os pontos P_1 ($P_1 = \mathfrak{e}_a \cap \gamma_b$) e P'_3 ($P'_3 = \mathfrak{r} \cap \gamma_b$, ou seja, P'_3 é o antípoda de Y_b); traçar a reta $\mathfrak{b}'$ ($P_1 \in \mathfrak{b}'$ e $\mathfrak{b}' \parallel \mathfrak{b}$) e obter o ponto P_2 ($P_2 = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{b}'$);

iii) traçar o círculo $\phi_1 = (I_b, I_b P_2)$ e obter o ponto P_7 ($P_7 = \mathfrak{r} \cap \phi_1$, ou seja, P_7 é o antípoda de P_2);

iv) traçar o semicírculo ϕ_2 de diâmetro $\overline{I_b P_3'}$ e o arco $\phi_3 = (P_3', m_a)$; obter o ponto P_3 ($P_3 = \phi_2 \cap \phi_3$) e o comprimento $\ell_1 = I_b P_3 = \sqrt{r_b^2 - m_a^2}$; traçar o arco $\phi_4 = (I_b, \ell_1)$ e obter o ponto P_4 ($P_4 = \mathfrak{e}_a \cap \phi_4$);

v) construir a reta $\mathfrak{s}$ ($P_4 \in \mathfrak{s}$ e $\mathfrak{s} \perp \mathfrak{b}'$); obter os pontos P_5 ($P_5 = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{b}'$) e P_5' ($P_5' = \mathfrak{s} \cap \phi_1$);

vi) construir a reta $\mathfrak{t}$ ($P_5' \in \mathfrak{t}$ e $\mathfrak{t} \perp \mathfrak{r}$); obter o ponto P_6 ($P_6 = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{r}$) e os comprimentos $\ell_2 = P_2 P_6$ e $\ell_3 = P_6 P_7$;

vii) traçar os arcos $\phi_5 = (\mathbf{A}, \ell_2)$ e $\phi_6 = (\mathbf{A}, \ell_3)$ e obter os pontos $\mathcal{M}_a$ ($\mathcal{M}_a = \mathfrak{e}_a \cap \phi_5$) e $\mathcal{M}_a'$ ($\mathcal{M}_a' = \mathfrak{e}_a \cap \phi_6$);

viii) construir as retas $\mathfrak{u}$ ($\mathcal{M}_a \in \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u} \perp \mathfrak{e}_a$) e $\mathfrak{u}'$ ($\mathcal{M}_a' \in \mathfrak{u}'$ e $\mathfrak{u}' \perp \mathfrak{e}_a$); traçar o arco $\phi_7 = (\mathbf{A}, m_a)$ e obter os pontos M_a ($M_a = \mathfrak{u} \cap \phi_7$) e M_a' ($M_a' = \mathfrak{u}' \cap \phi_7$);

ix) traçar os semicírculos ϕ_8 e ϕ_8' de diâmetros $\overline{I_b M_a}$ e $\overline{I_b M_a'}$ e obter os pontos X_b ($X_b = \gamma_b \cap \phi_8$) e X_b' ($X_b' = \gamma_b \cap \phi_8'$);

x) traçar as retas $\mathfrak{a} = (M_a, X_b)$ e $\mathfrak{a}' = (M_a', X_b')$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$), $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$), $\mathbf{B}'$ ($\mathbf{B}' = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}'$) e $\mathbf{C}'$ ($\mathbf{C}' = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}'$).

Exercício 91) $<\alpha, m_b, r_a>$

Método algébrico

Podemos construir o $\triangle \mathbf{A} I_a Y_a$ pois $\measuredangle I_a \mathbf{A} Y_a = \frac{\alpha}{2}$, $\measuredangle I_a Y_a \mathbf{A} = 90°$ e $I_a Y_a = r_a$. Logo, conhecemos $\mathbf{A} Y_a = r_a \cot \frac{\alpha}{2} = p$. Assim, escrevemos o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a + b + c = 2p \implies a = 2p - (b + c) \tag{4.105}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha \tag{4.106}$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{4.107}$$

Substituindo o valor de a dado por (4.105) em (4.106) e (4.107), obtemos equações (4.108) e (4.109):

$$b = \frac{2p(p - c)}{2p - (1 + \cos\alpha)c} \tag{4.108}$$

$$b^2 - 4(2p - c)b + 4(c^2 - 2pc + 2p^2 - m_b^2) = 0 \tag{4.109}$$

Finalmente, substituindo o valor de b dado por (4.108) em (4.109), resulta:

$$p^2(p-c)^2 - 2p(c^2 - 3pc + 2p^2)[2p - (1+\cos\alpha)c] + \\ + (c^2 - 2pc + 2p^2 - m_b^2)[2p - (1+\cos\alpha)c]^2 = 0 \qquad (4.110)$$

Como $< \cos\alpha, m_b, r_a >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.110) com um programa qualquer para obter c. E, em seguida, b e a.

Se a equação (4.110) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14} \Longrightarrow \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm} \Longrightarrow p = 10\,\text{cm}$.

A equação (4.110) torna-se

$$(c-8)(100c^3 - 2320c^2 + 12551c + 11368) = 0$$

cuja única raiz positiva é $c = 8\,\text{cm}$. Então $b = 7\,\text{cm}$ e $a = 5\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $< a, b, c >$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 92) $< \alpha, m_b, r_b >$

Método algébrico

Podemos construir o $\triangle \mathbf{A} I_b Z_b$ pois $\measuredangle \mathbf{A} I_b Z_b = \frac{\alpha}{2}$, $\measuredangle I_b Z_b \mathbf{A} = 90°$ e $I_b Z_b = r_b$. Logo, conhecemos $\mathbf{A} Z_b = r_b \tan\frac{\alpha}{2} = p - c = \ell$. Assim, escrevemos o seguinte sistema de equações não lineares:

$$p - c = \ell \implies a + b - c = 2\ell \;\therefore\; a = 2\ell - b + c \qquad (4.111)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad (4.112)$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \qquad (4.113)$$

Substituindo o valor de a dado por (4.111) em (4.112) e (4.113), obtemos equações (4.114) e (4.115):

$$b = \frac{2\ell(c+\ell)}{2\ell + (1-\cos\alpha)c} \qquad (4.114)$$

$$b^2 - 4(c+2\ell)b + 4(c^2 + 2\ell c + 2\ell^2 - m_b^2) = 0 \qquad (4.115)$$

Finalmente, substituindo o valor de b dado por (4.114) em (4.115), resulta:

$$\ell^2(c+\ell)^2 - 2\ell(c^2 + 3\ell c + 2\ell^2)[2\ell + (1-\cos\alpha)c] + \\ + (c^2 + 2\ell c + 2\ell^2 - m_b^2)[2\ell + (1-\cos\alpha)c]^2 = 0 \qquad (4.116)$$

Como $<\cos\alpha, m_b, r_b>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.116) com um programa qualquer para obter c. E, em seguida, b e a.

Se a equação (4.116) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14} \Longrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm $\Longrightarrow l = 2$ cm.

A equação (4.116) torna-se

$$(c-8)(36c^3 + 1104c^2 + 12439c + 49000) = 0$$

cuja única raiz positiva é $c = 8$ cm. Então $b = 7$ cm e $a = 5$ cm.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 93) $<\alpha, m_b, r_c>$

Método algébrico

Podemos construir o $\triangle\,\mathbf{A}I_cY_c$ pois $\measuredangle\mathbf{A}I_cY_c = \frac{\alpha}{2}$, $\measuredangle I_cY_c\mathbf{A} = 90^\circ$ e $I_cY_c = r_c$. Logo, conhecemos $\mathbf{A}Y_c = r_c\tan\frac{\alpha}{2} = p - b = \ell$. Assim, escrevemos o seguinte sistema de equações não lineares:

$$p - b = \ell \implies a - b + c = 2\ell \;\therefore\; a = 2\ell + b - c \tag{4.117}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{4.118}$$
$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{4.119}$$

Substituindo o valor de a dado por (4.117) em (4.118) e (4.119), obtemos equações (4.120) e (4.121):

$$b = \frac{2\ell(c-\ell)}{2\ell - (1-\cos\alpha)c} \tag{4.120}$$
$$b^2 - 4(c-2\ell)b + 4(c^2 - 2\ell c + 2\ell^2 - m_b^2) = 0 \tag{4.121}$$

Finalmente, substituindo o valor de b dado por (4.120) em (4.121), resulta:

$$\begin{aligned}\ell^2(c-\ell)^2 - 2\ell(c^2 - 3\ell c + 2\ell^2)[2\ell - (1-\cos\alpha)c] + {}\\ + (c^2 - 2\ell c + 2\ell^2 - m_b^2)[2\ell - (1-\cos\alpha)c]^2 = 0\end{aligned} \tag{4.122}$$

Como $<\cos\alpha, m_b, r_c>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.122) com um programa qualquer para obter c. E, em seguida, b e a.

Se a equação (4.122) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14} \Longrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $r_c = 5\sqrt{3}$ cm $\Longrightarrow l = 3$ cm.

A equação (4.122) torna-se

$$(c-8)(4c^3 - 104c^2 + 231c + 11760) = 0 \qquad (\dagger)$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtemos uma raiz positiva, uma raiz negativa e duas raízes complexas, as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$\begin{aligned} c_1 &= 8\,\text{cm} \Longrightarrow b_1 = 7\,\text{cm e } a_1 = 5\,\text{cm} \\ c_2 &= -\ 8{,}439021\,3 \\ c_3 &= 17{,}219510\,6 - 7{,}202089\,0\ i \\ c_4 &= 17{,}219510\,6 + 7{,}202089\,0\ i \end{aligned}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $< a_1, b_1, c_1 >$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 94) $< \alpha, d_a, d_b >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha \qquad (4.123)$$

$$\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right] bc = d_a^2 \qquad (4.124)$$

$$\left[1 - \left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right] ac = d_b^2 \qquad (4.125)$$

Como $< \cos\alpha, d_a, d_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.123)–(4.125), obtendo assim os três lados $< a, b, c >$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}$ cm e $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm.

Com estes valores, um programa qualquer fornece

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que este triângulo satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 95) $<\alpha, d_b, d_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos\alpha \tag{4.126}$$

$$\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right]ac=d_b^2 \tag{4.127}$$

$$\left[1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]ab=d_c^2 \tag{4.128}$$

Como $<\cos\alpha, d_b, d_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.126)–(4.128), obtendo assim os três lados $<a, b, c>$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm e $d_c = \frac{5\sqrt{7}}{3}$ cm.

Com estes valores, um programa qualquer fornece

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que este triângulo satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 96) $<\alpha, d_a, e_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<d_a, e_a, h_a>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, h_a, d_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver os exercícios 54 e 59).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 97) $<\alpha, d_a, e_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos\alpha \tag{4.129}$$

$$\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]bc=d_a^2 \tag{4.130}$$

$$\left[\left(\frac{b}{c-a}\right)^2-1\right]ac=e_b^2 \tag{4.131}$$

Como $< \cos\alpha, d_a, e_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.129)–(4.131), obtendo assim os três lados $< a, b, c >$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}$ cm e $e_b = \frac{40}{3}$ cm.

Com estes valores, um programa qualquer fornece

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que este triângulo satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 98) $< \alpha, d_b, e_a >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{4.132}$$

$$\left[1 - \left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right] ac = d_b^2 \tag{4.133}$$

$$\left[\left(\frac{a}{c-b}\right)^2 - 1\right] bc = e_a^2 \tag{4.134}$$

Como $< \cos\alpha, d_b, e_a >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.132)–(4.134), obtendo assim os três lados $< a, b, c >$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm e $e_a = 8\sqrt{21}$ cm.

Com estes valores, um programa qualquer fornece

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que ce triângulo satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 99) $< \alpha, d_b, e_b >$

Método do problema já resolvido

Como $< d_b, e_b, h_b >$ formam um datum, conhecemos $< \alpha, h_b, d_b >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 57).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 100) $<\alpha, d_b, e_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{4.135}$$

$$\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right]ac = d_b^2 \tag{4.136}$$

$$\left[\left(\frac{c}{a-b}\right)^2 - 1\right]ab = e_c^2 \tag{4.137}$$

Como $<\cos\alpha, d_b, e_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.135)–(4.137), obtendo assim os três lados $<a, b, c>$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm e $e_c = 5\sqrt{21}$ cm.

Com estes valores, um programa qualquer fornece

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que este triângulo satisfaz todas as condições do problema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] R. W. Brink. *Analytic Geometry*. D. Appleton-Century Company, 1935.

[2] H. G. Calfa and L. A. de Almeida e R. C. Barbosa. *Desenho Geométrico Plano*, volume 2, Tomo I of *Coleção Marechal Trompowski*. Biblioteca do Exército Editora, 1995.

[3] H. W. Eves. Problem 1054, Two euclidean constructions. *Mathematics Magazine*, 53:52–53, 1980.

[4] Frère Gabriel Marie (F. G.-M.). *Exercices de Trigonométrie*. Cours de Mathématiques Élémentaires. A. Mame et Fils Éditeurs, Paris, ca 1920.

[5] K. Herterich. *Die Konstruktion von Dreiecken*. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1986.

[6] E. L. Lima. *Coordenadas no Plano*. IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1993.

[7] L. Lopes. *Manual de Construção de Triângulos*, volume 1. A ser publicado, Rio de Janeiro, 2015.

[8] A. C. de O. Morgado and E. Wagner e M. Jorge. *Geometria II*. Editora Francisco Alves, Rio de Janeiro, 1973.

[9] S. L. Netto. *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções*. Coleção do Professor de Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 2009.

[10] A. S. Posamentier and W. Wernick. *Advanced Geometric Constructions*. Dale Seymour Publications, Palo Alto, CA, USA, 1988.

[11] G. J.-M. Tessier and R. Beaugrand. *Manuel de Géométrie Plane*. Centre de Psychologie et de Pédagogie, Montreal, 1958.

[12] V. Thébault and R. Woods. Elementary problems and solutions, E1375, Construction of a triangle. *The American Mathematical Monthly*, 67:185–186, 1960.

[13] G. Velissarios and D. Laugwitz. Elementary problems and solutions, E3134, Constructing a triangle. *The American Mathematical Monthly*, 95:458–460, 1988.

[14] E. Wagner. *Construções Geométricas*. Coleção do Professor de Matemática. IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1993.

[15] P. Yiu. Elegant geometric constructions. http://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200512.pdf, 2005. Último acesso: março de 2010.

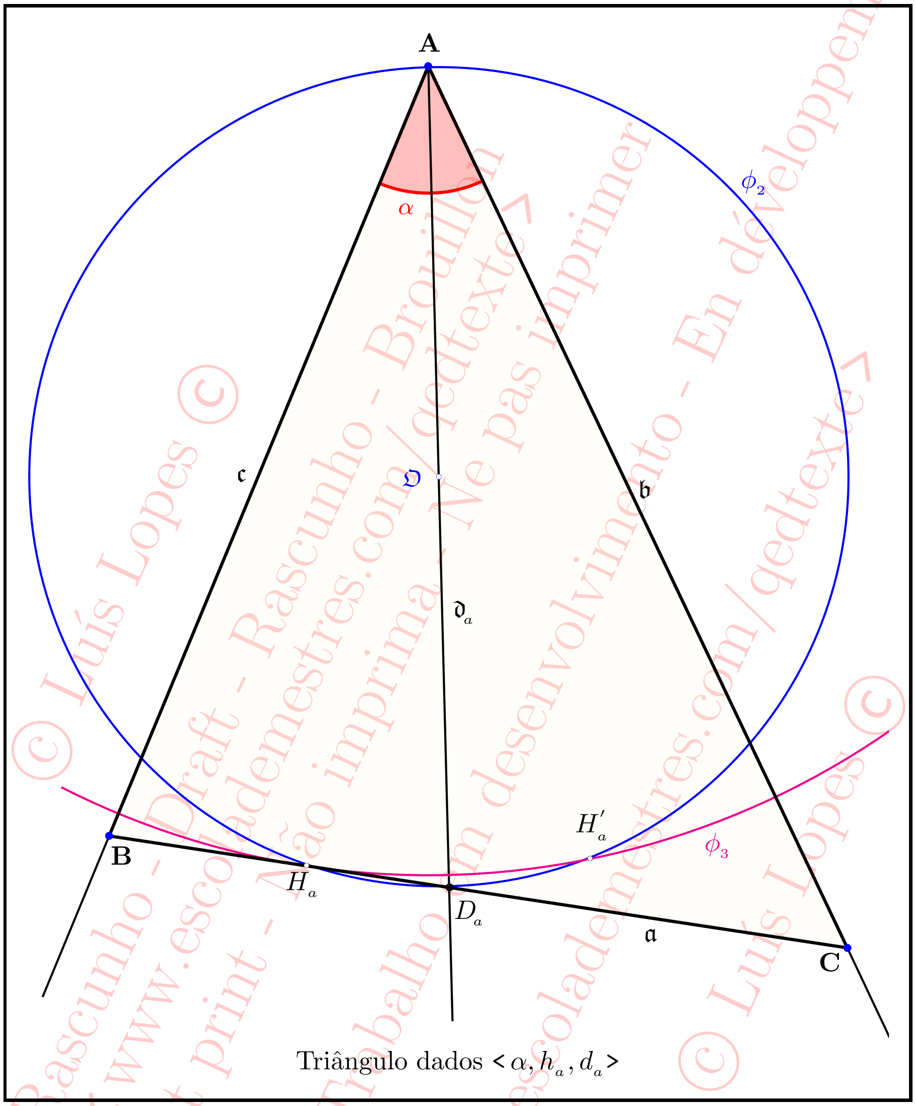
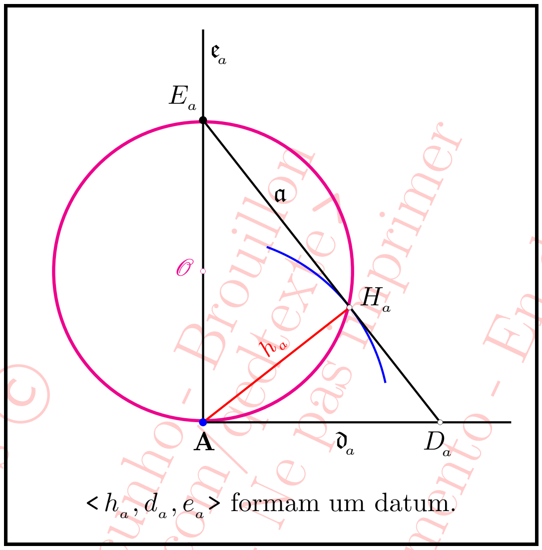


Figura 4.59: Exercício 54.



$< h_a, d_a, e_a >$ formam um datum.

Figura 4.60: Exercício 59.

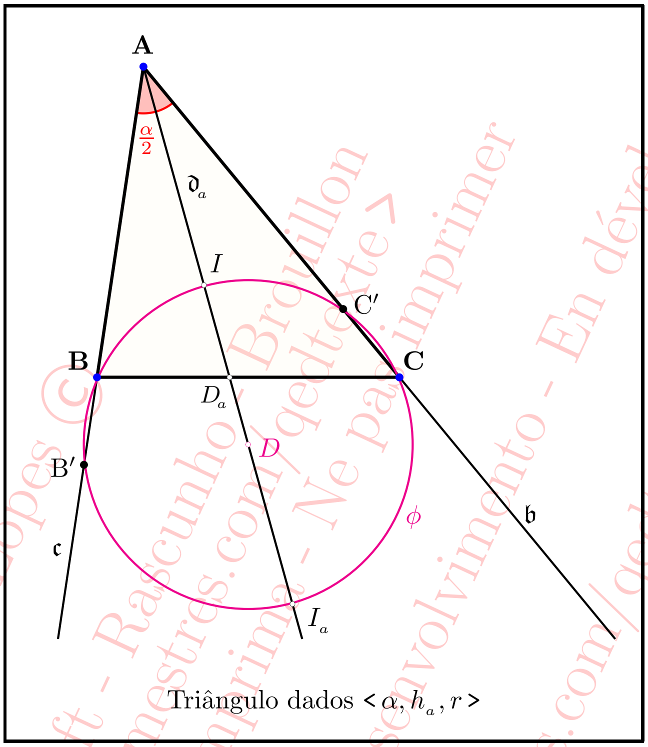


Figura 4.61: Exercício 66 — Segundo procedimento.

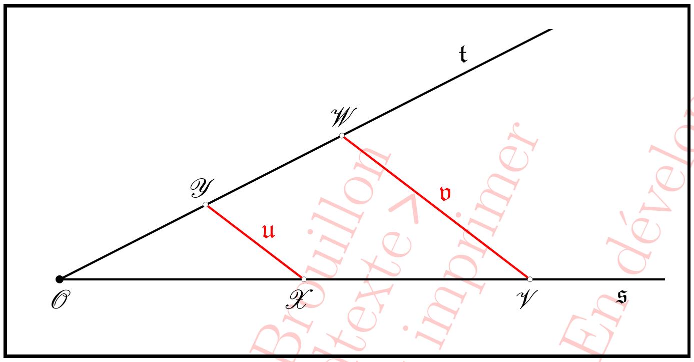


Figura 4.62: Construção da quarta proporcional.

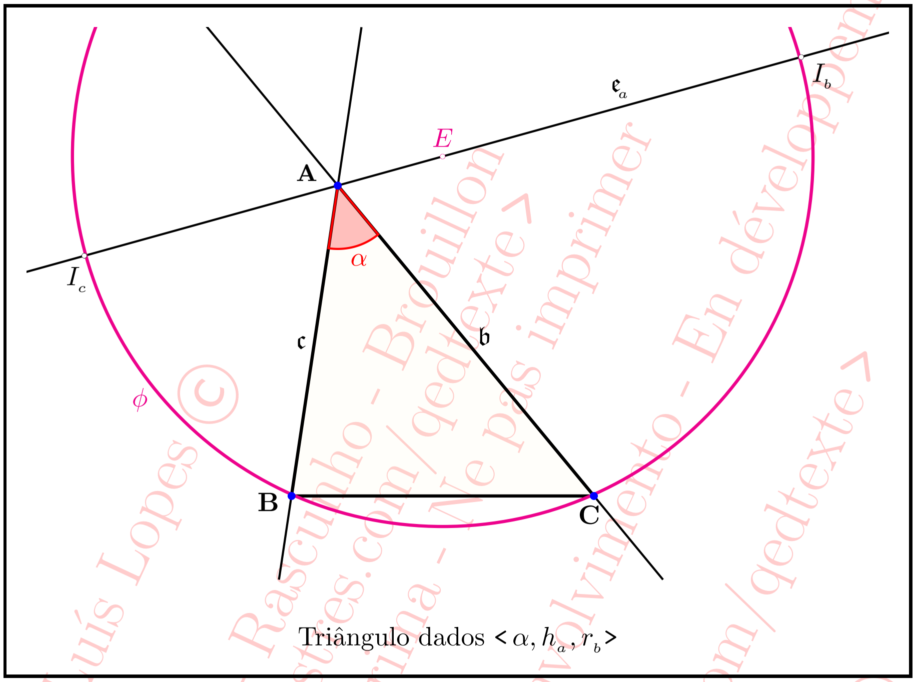


Figura 4.63: Exercício 69.

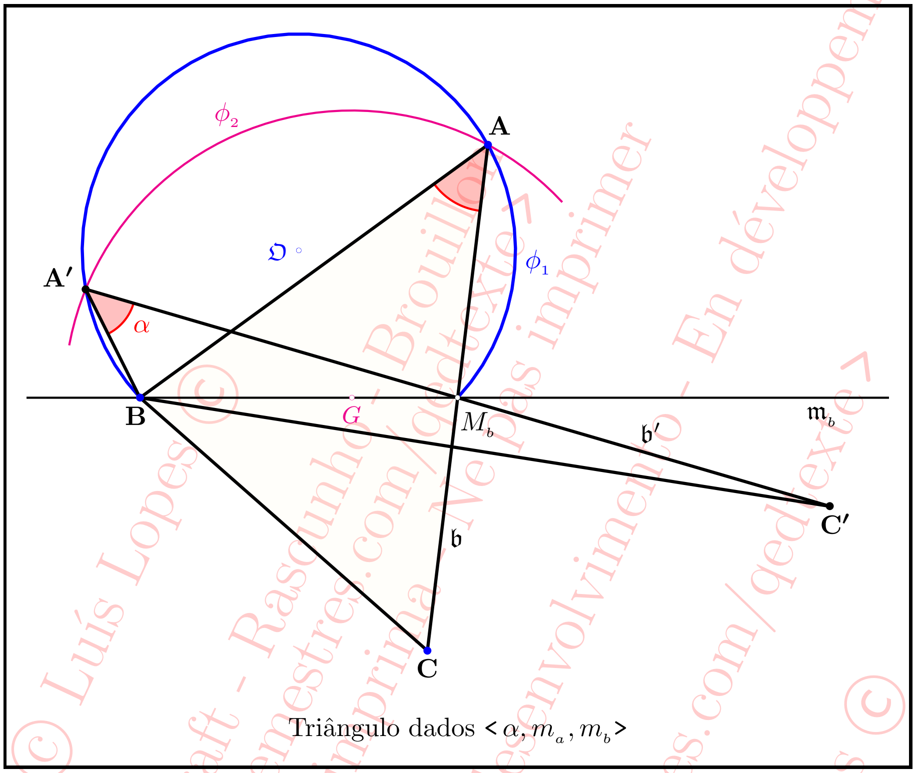


Figura 4.64: Exercício 73.

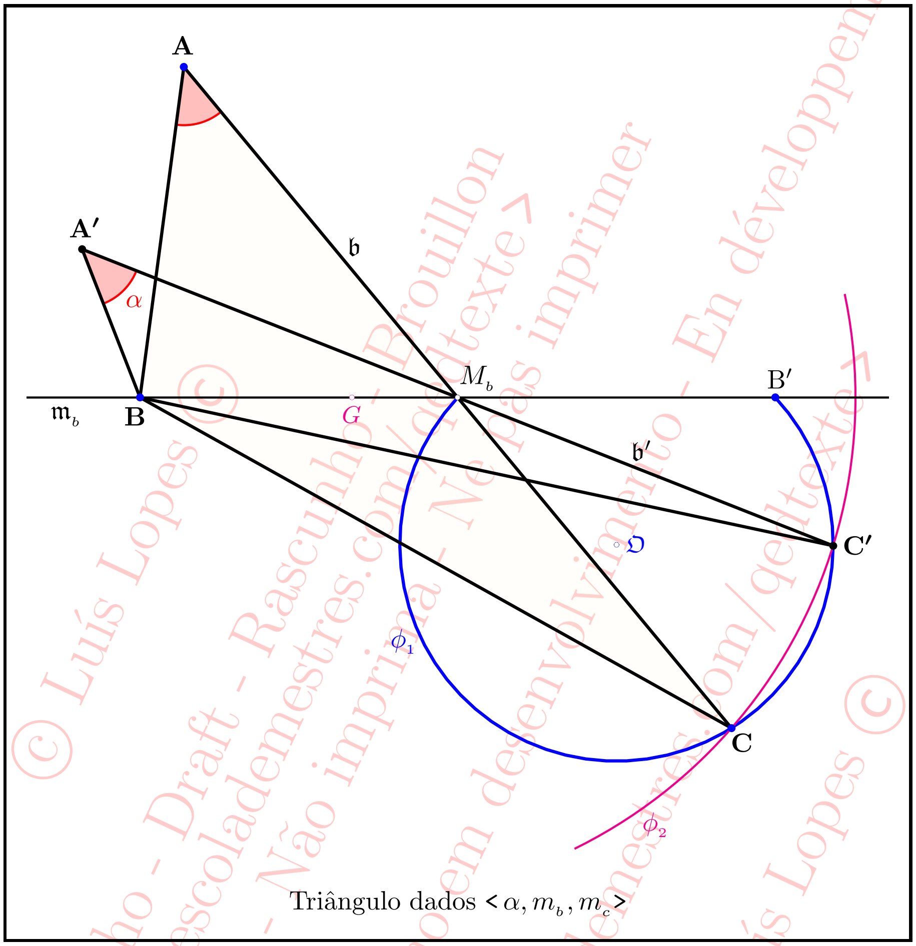


Figura 4.65: Exercício 74 — Primeiro procedimento.

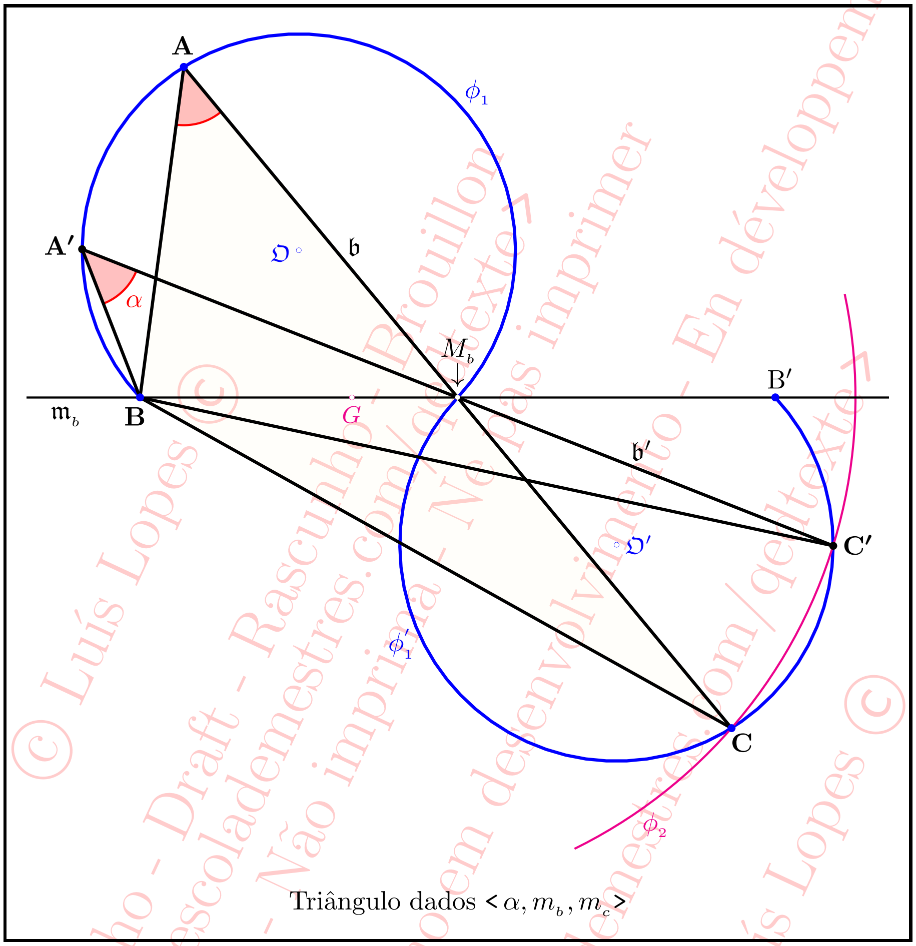


Figura 4.66: Exercício 74 — Segundo procedimento.

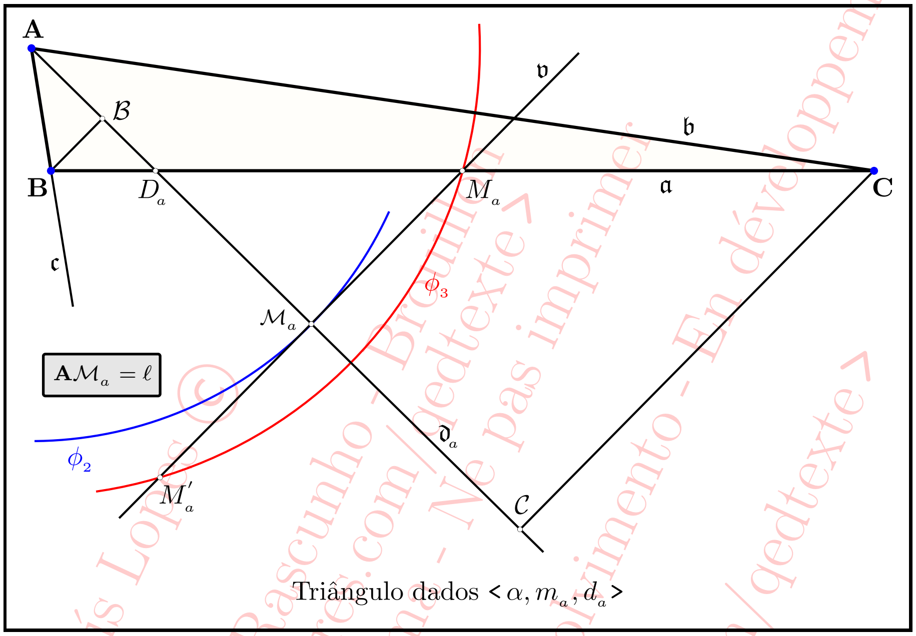


Figura 4.67: Exercício 75 — Primeiro procedimento.

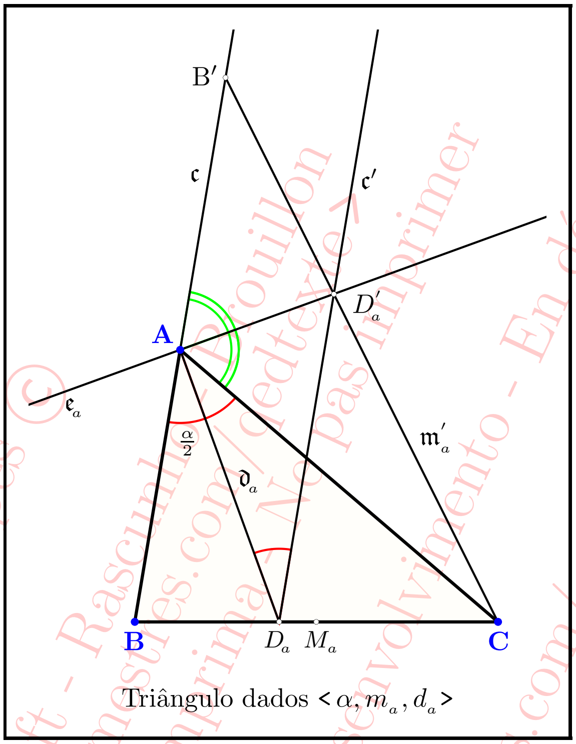


Figura 4.68: Exercício 75 — Figura-piloto.

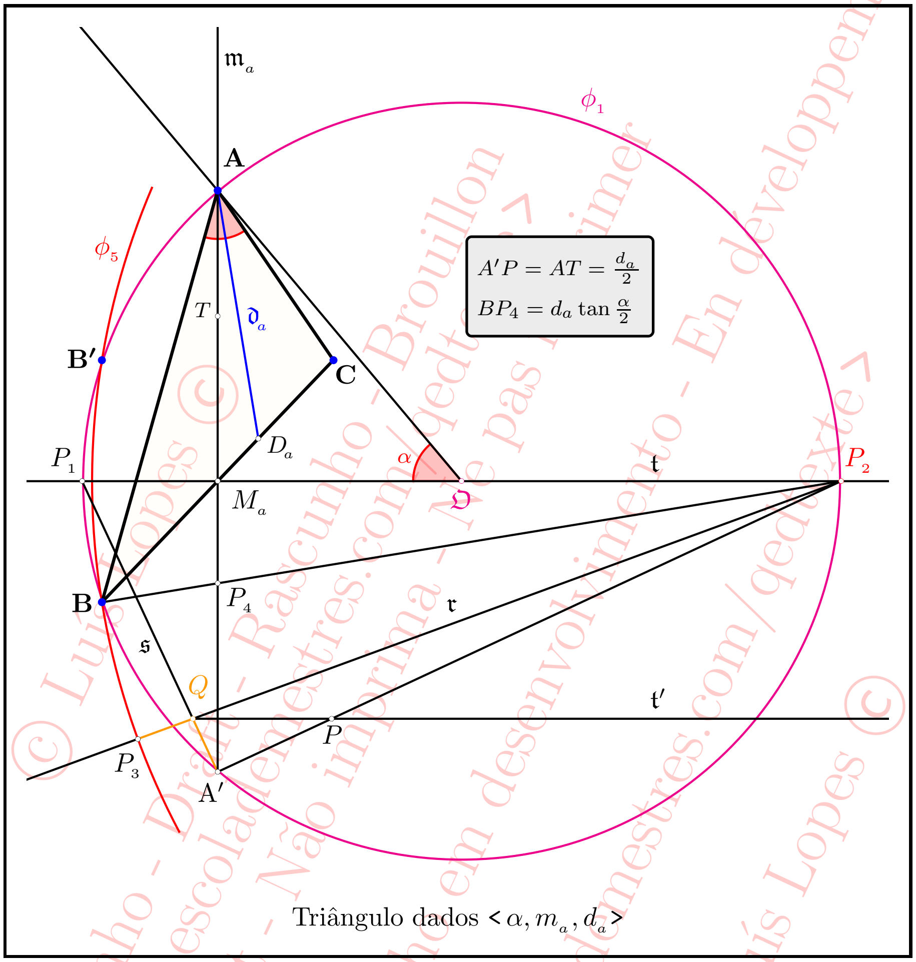
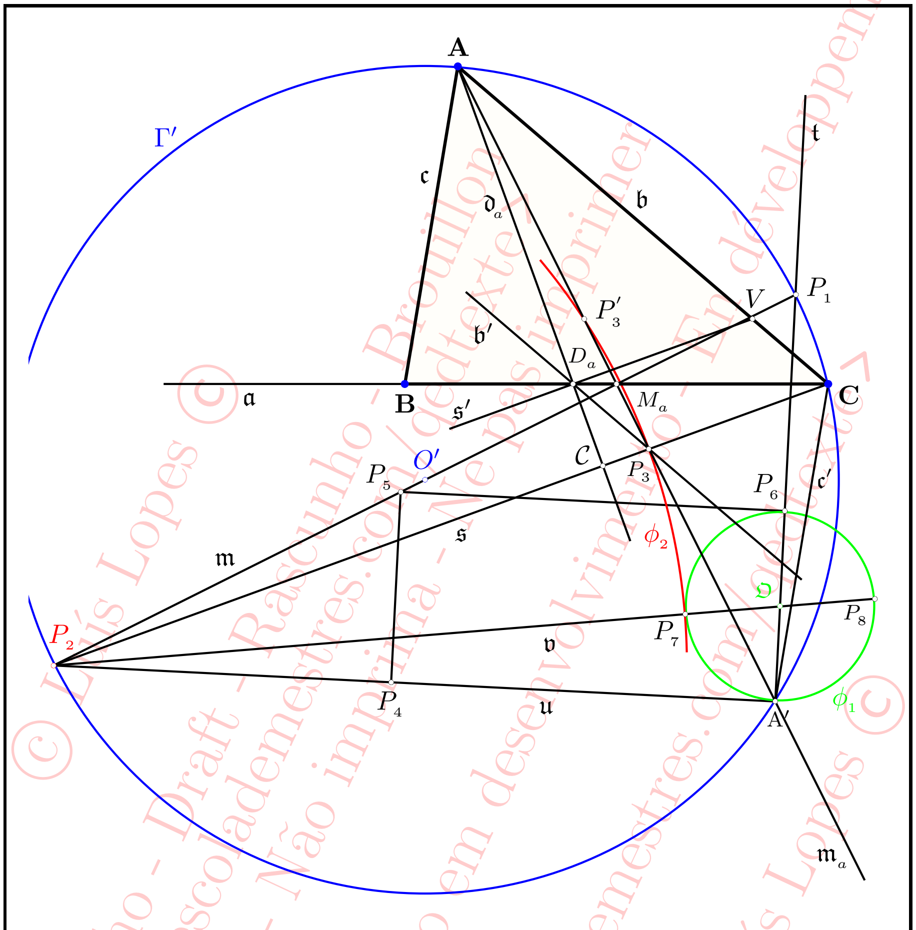


Figura 4.69: Exercício 75 — Segundo procedimento.



Triângulo dados $<\alpha, m_a, d_a>$

Figura 4.70: Exercício 75 — Terceiro procedimento.

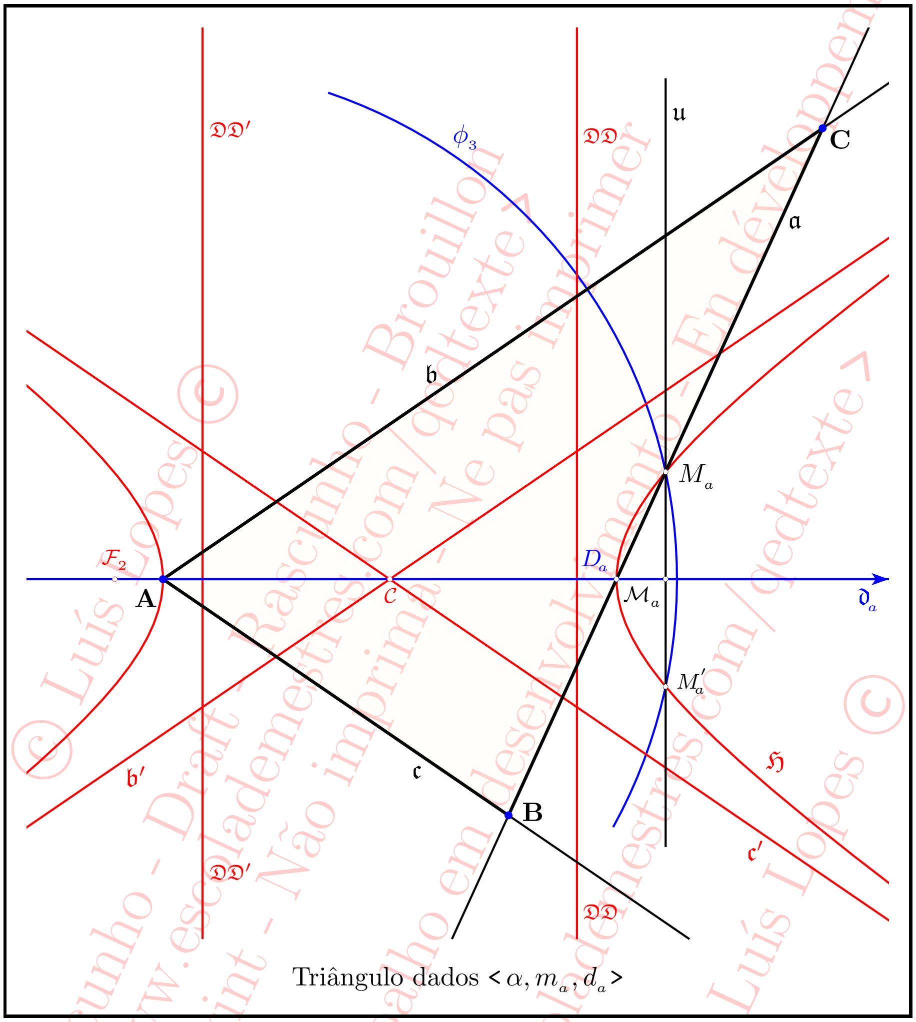


Figura 4.71: Exercício 75 — Quinto procedimento. Hipérbole descrita por M_a.

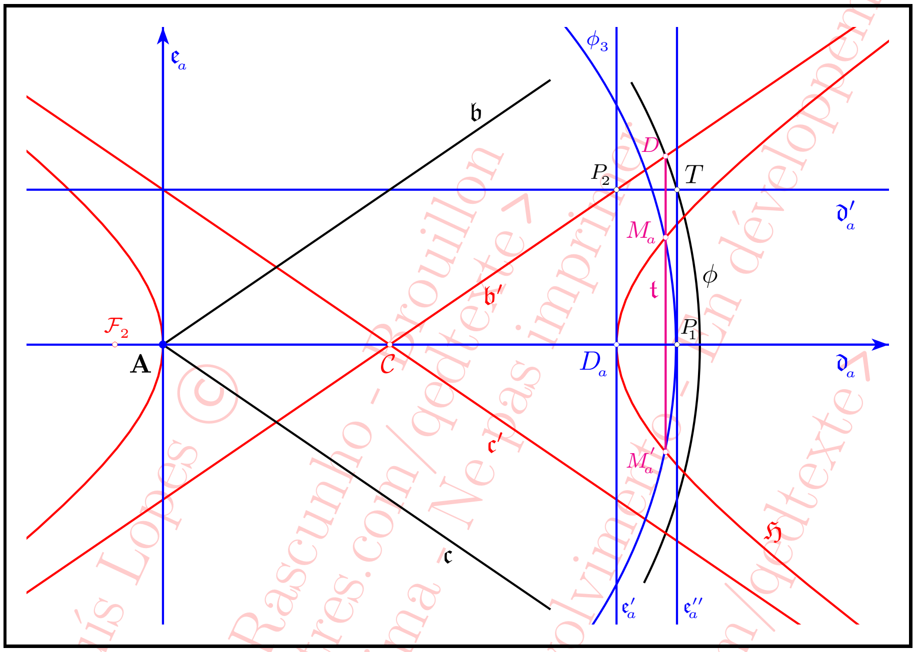


Figura 4.72: Interseções da hipérbole com o círculo centrado no eixo transverso.

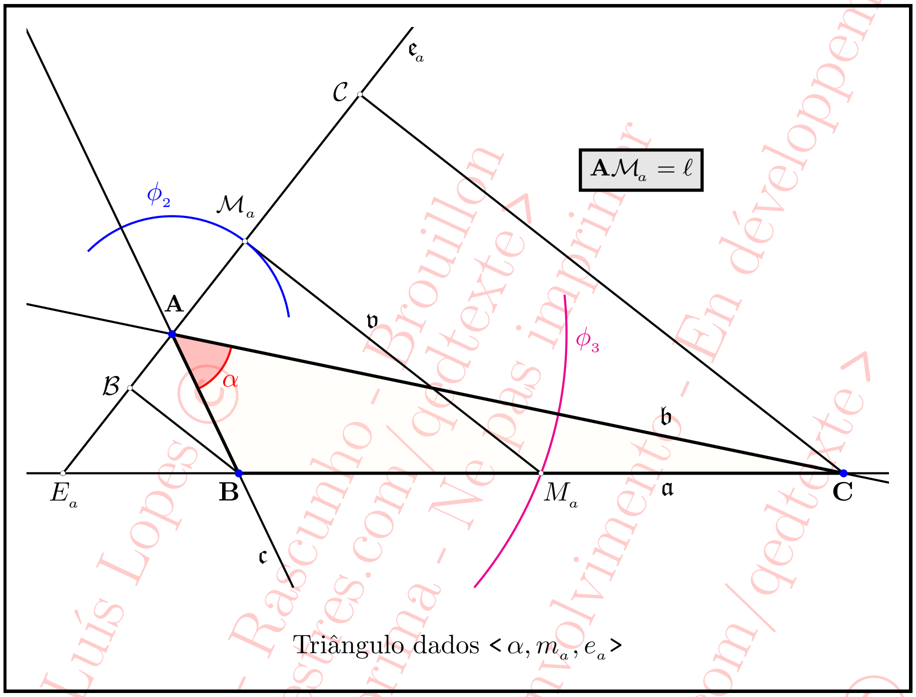
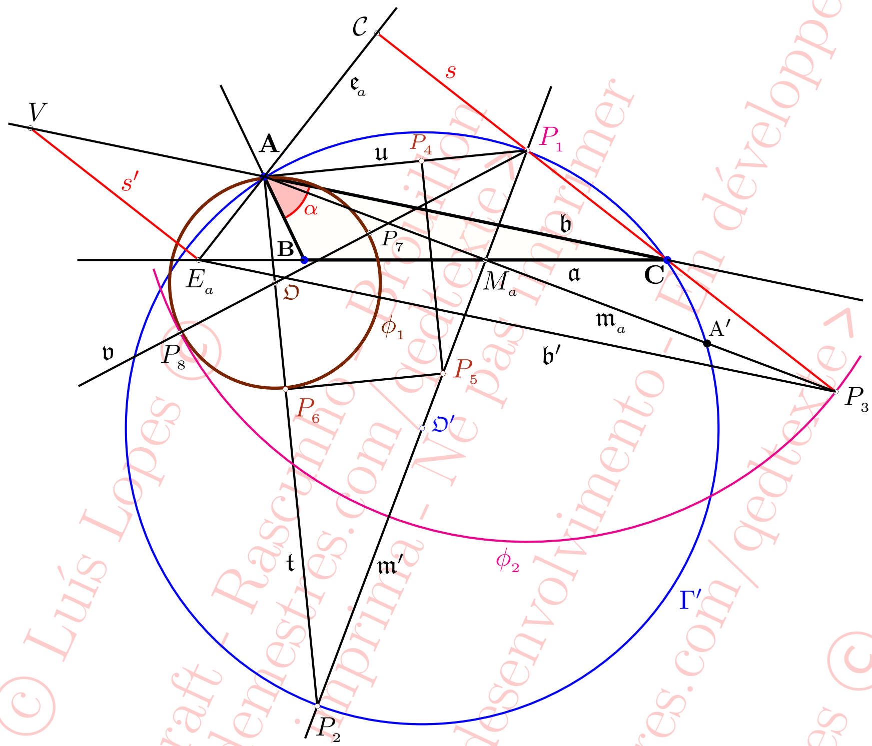
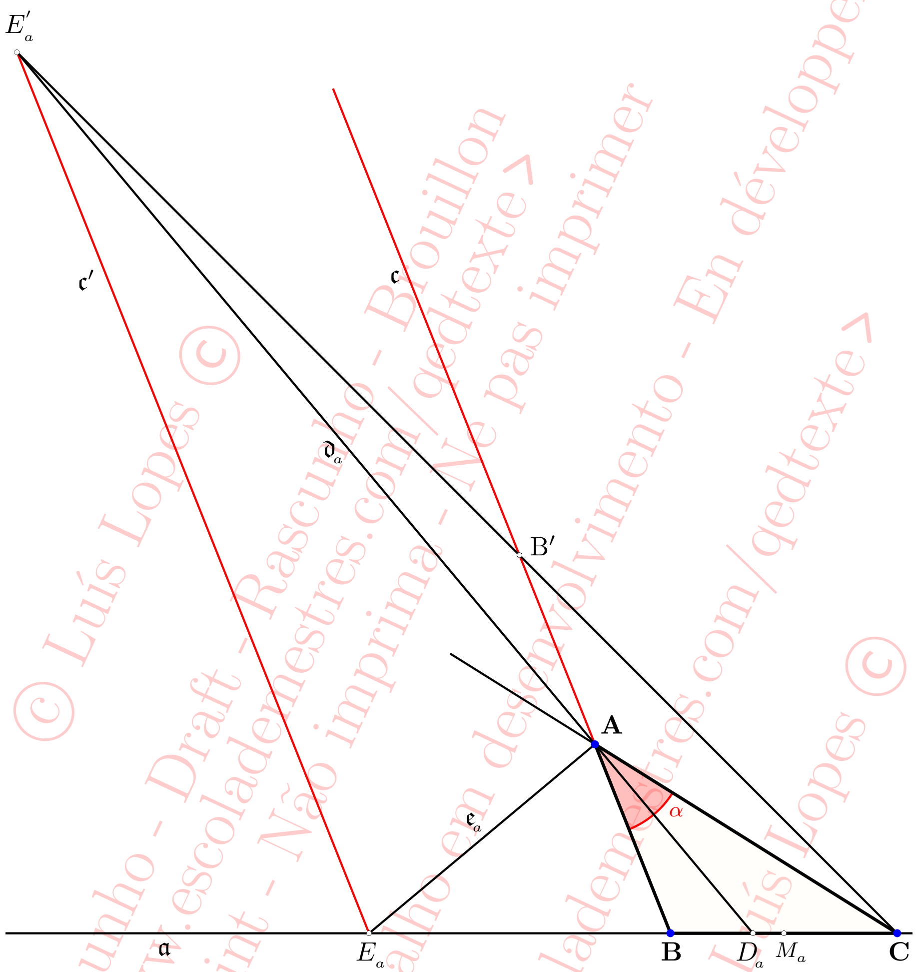


Figura 4.73: Exercício 80 — Primeiro procedimento.



Triângulo dados $<\alpha, m_a, e_a>$

Figura 4.74: Exercício 80 — Segundo procedimento.



Triângulo dados $<\alpha, m_a, e_a>$

Figura 4.75: Exercício 80 — Terceiro procedimento.

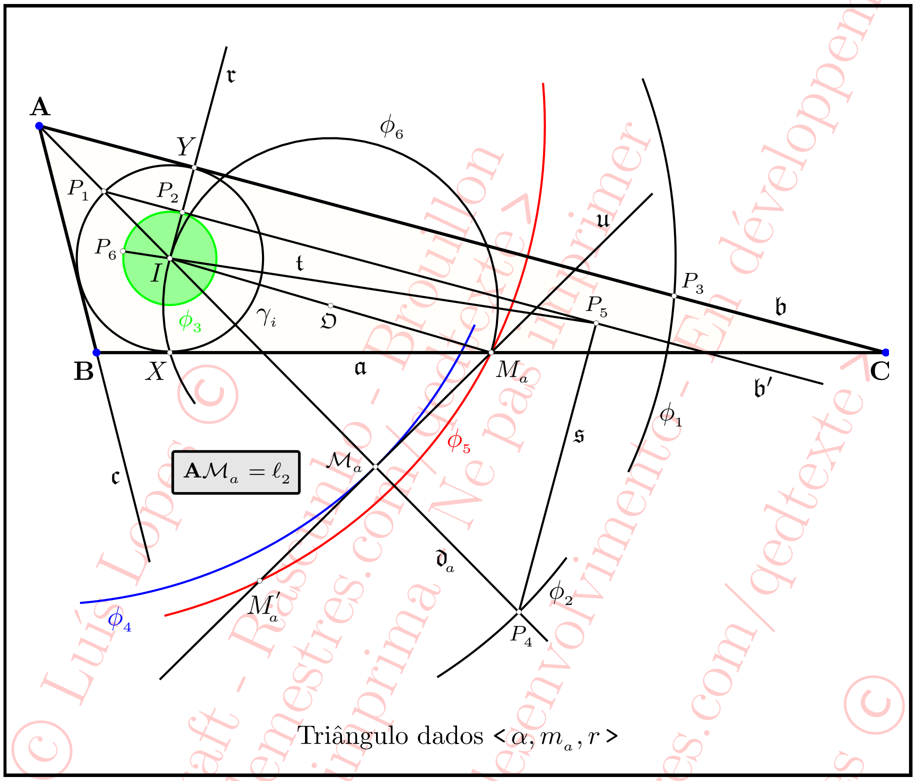


Figura 4.76: Exercício 87 — Segundo procedimento.

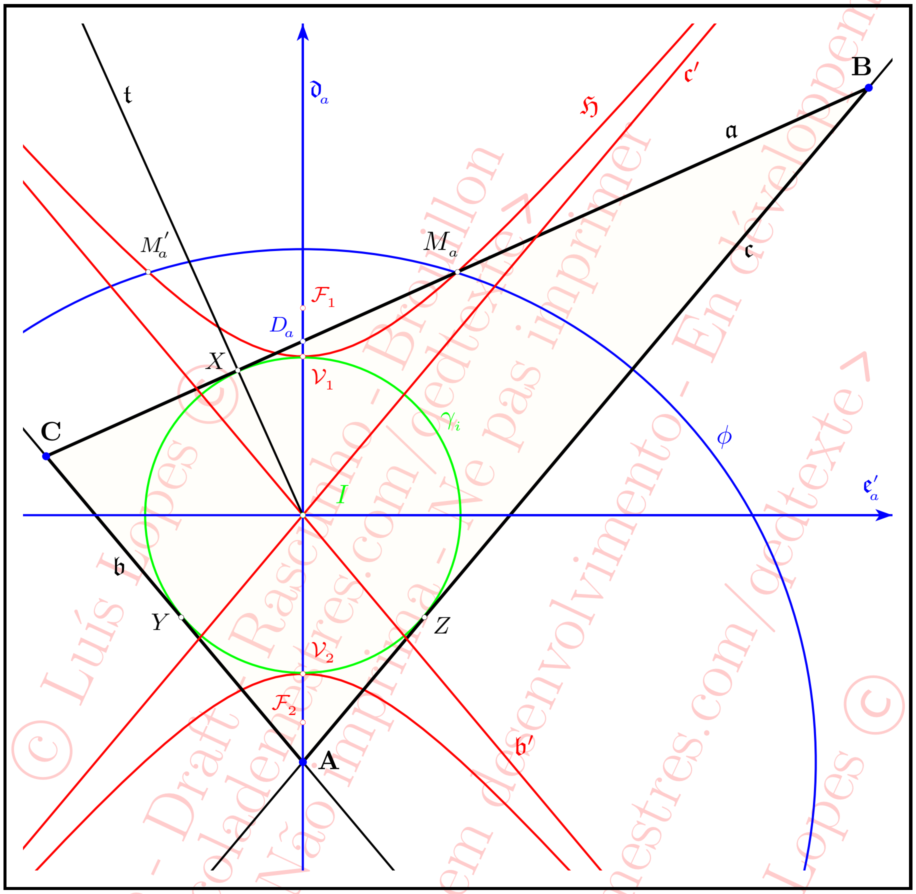
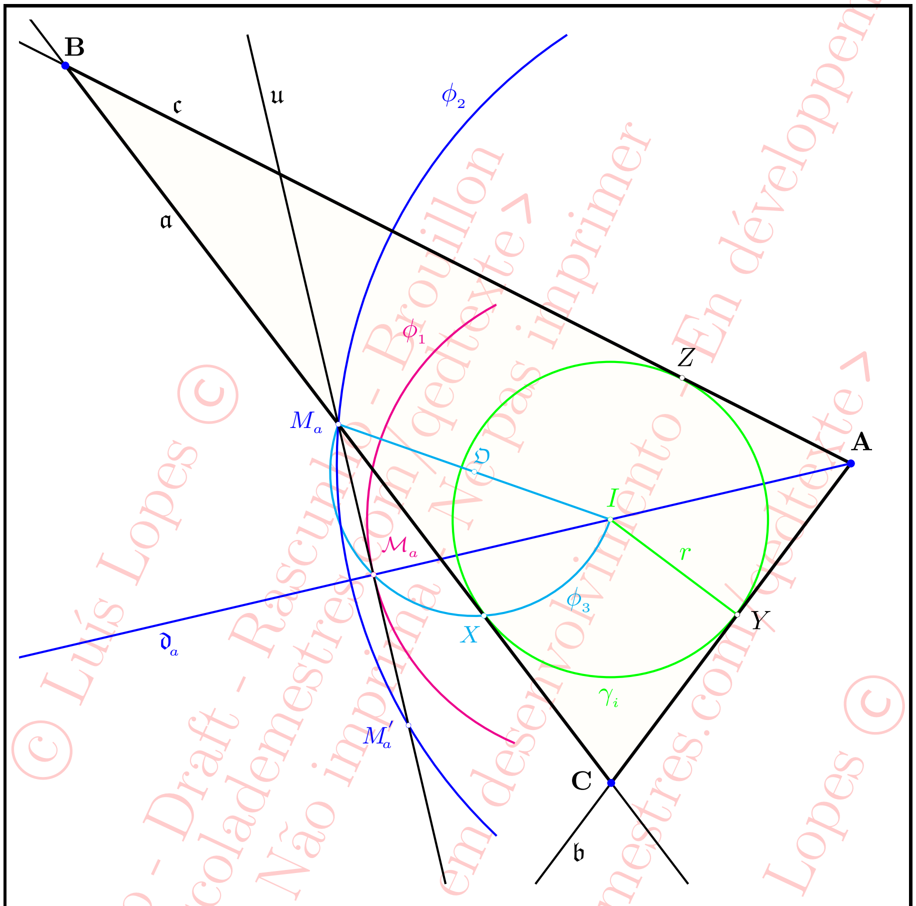


Figura 4.77: Hipérbole descrita por M_a.



Triângulo dados < α, m_a, r >

Figura 4.78: Exercício 87 — Terceiro procedimento.

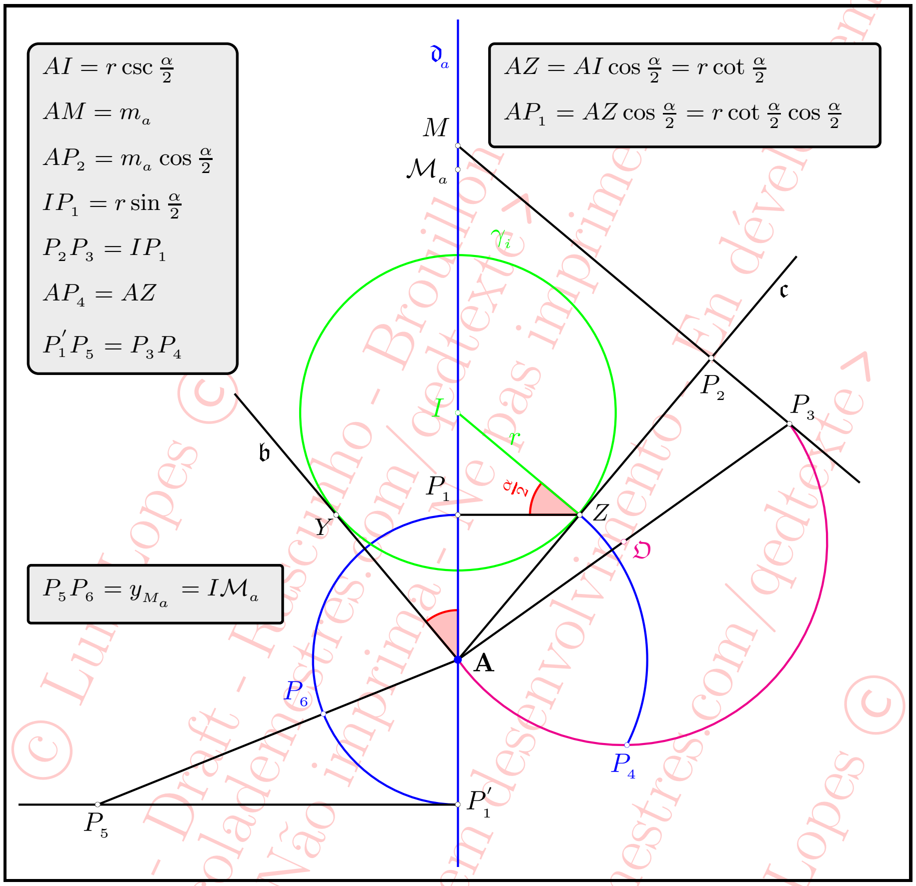
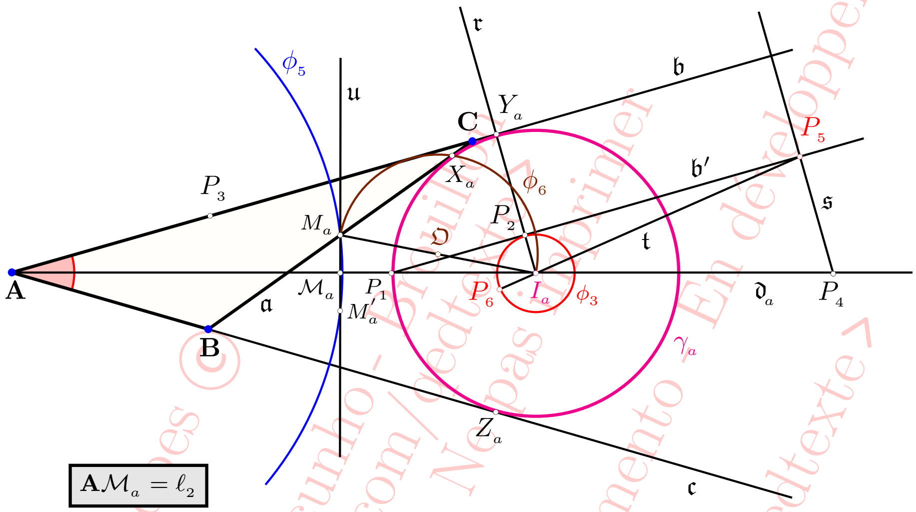


Figura 4.79: Construção do comprimento y_{M_a} dado por (4.88).



Triângulo dados $<\alpha, m_a, r_a>$

Figura 4.80: Exercício 89 — Segundo procedimento com $m_a > r_a$.

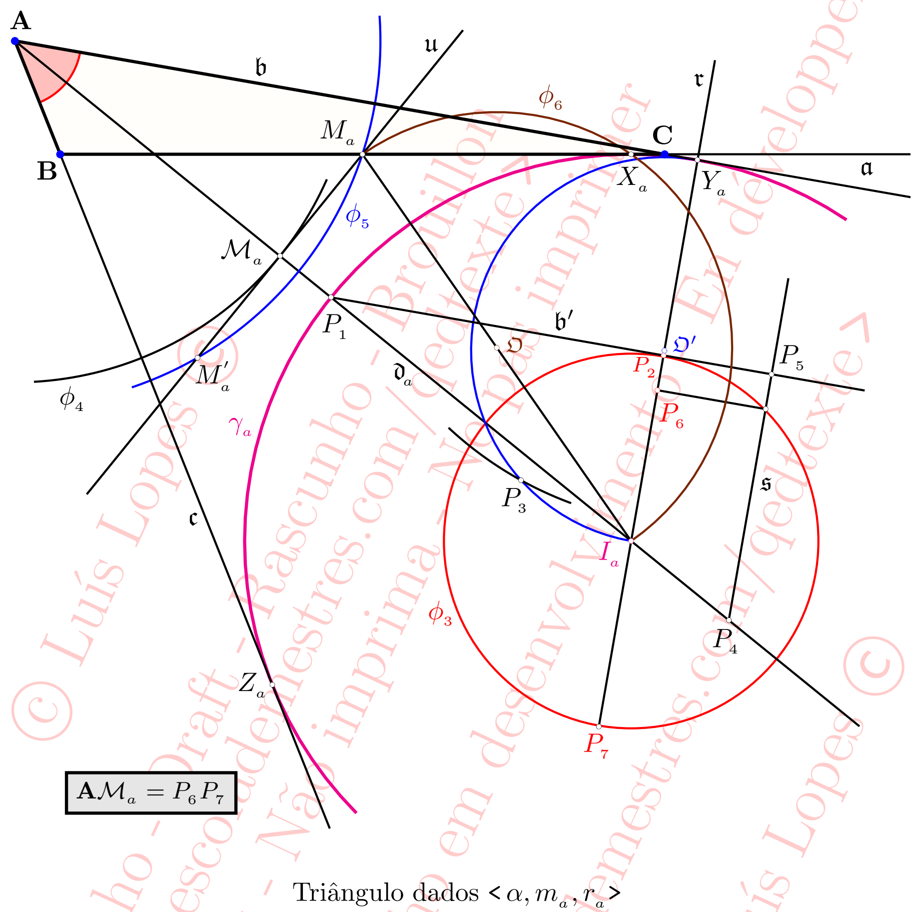


Figura 4.81: Exercício 89 — Segundo procedimento com $r_a > m_a$.

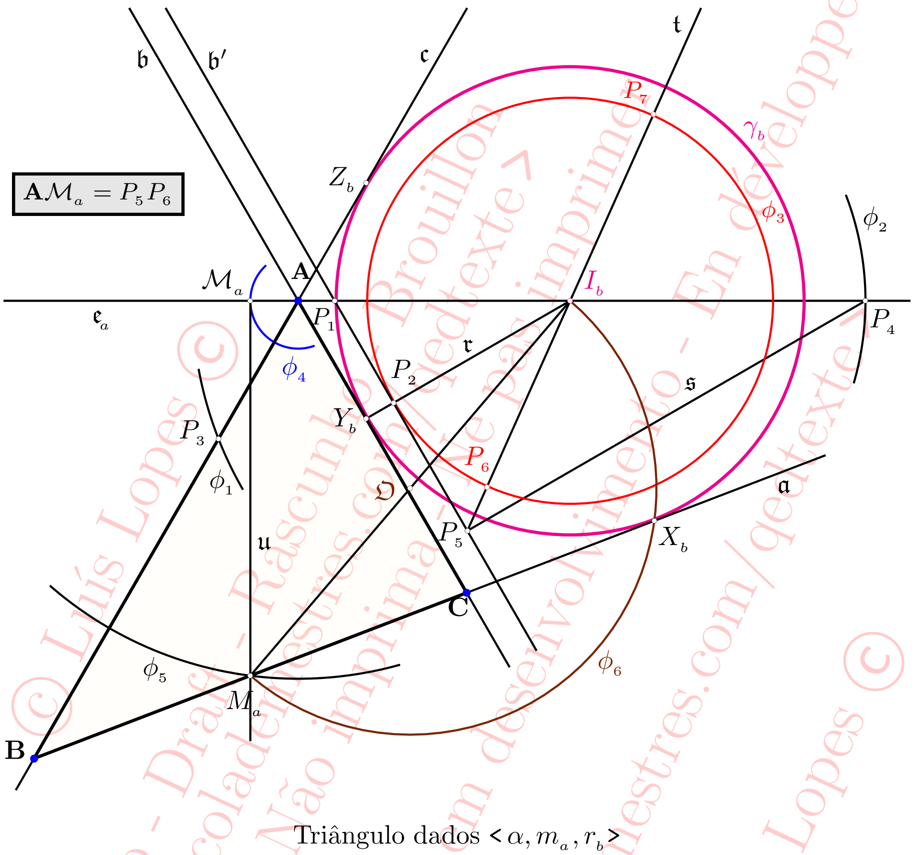


Figura 4.82: Exercício 90 — Segundo procedimento com $m_a > r_b$.

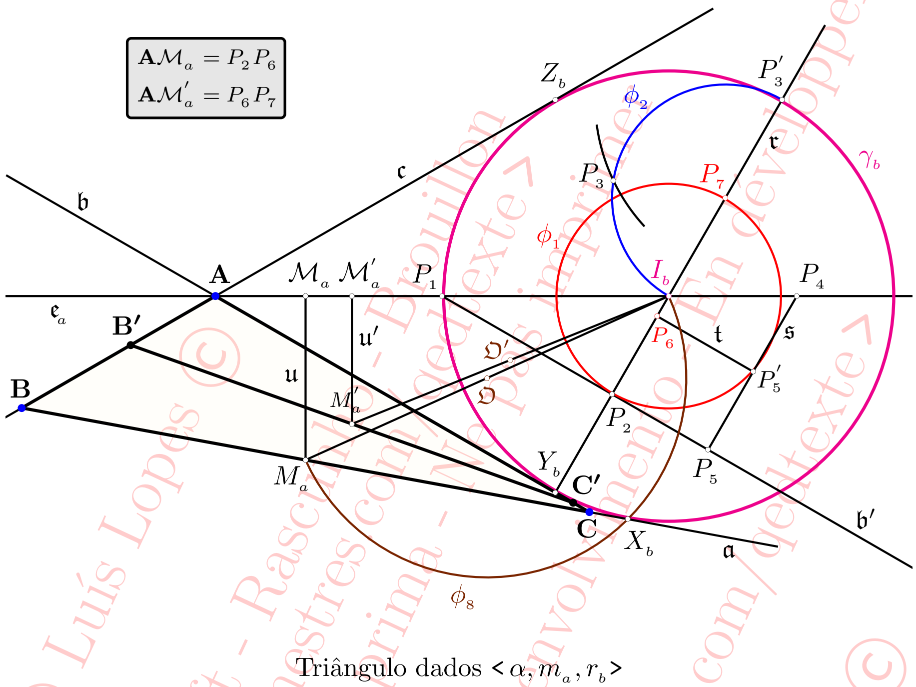


Figura 4.83: Exercício 90 — Segundo procedimento com $r_b > m_a$.