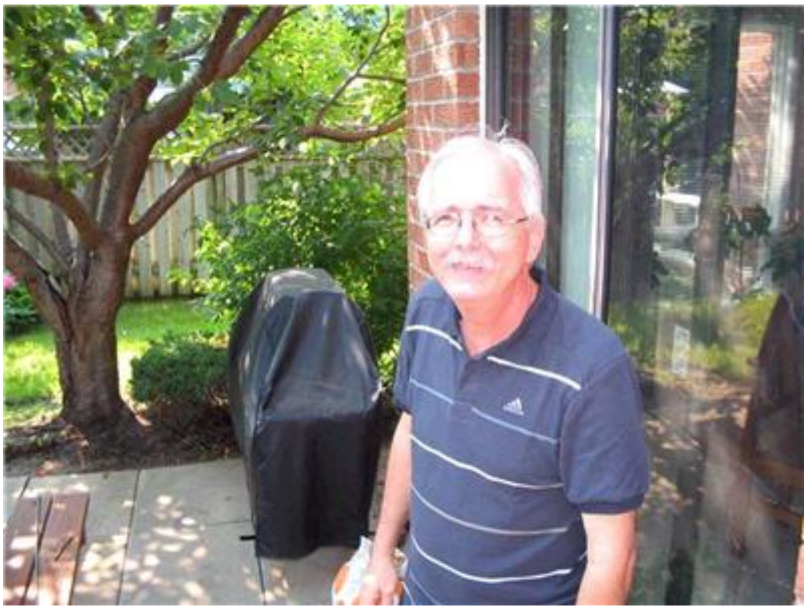


Manual de Construção de Triângulos

Todos os volumes disponibilizados ao público estão em

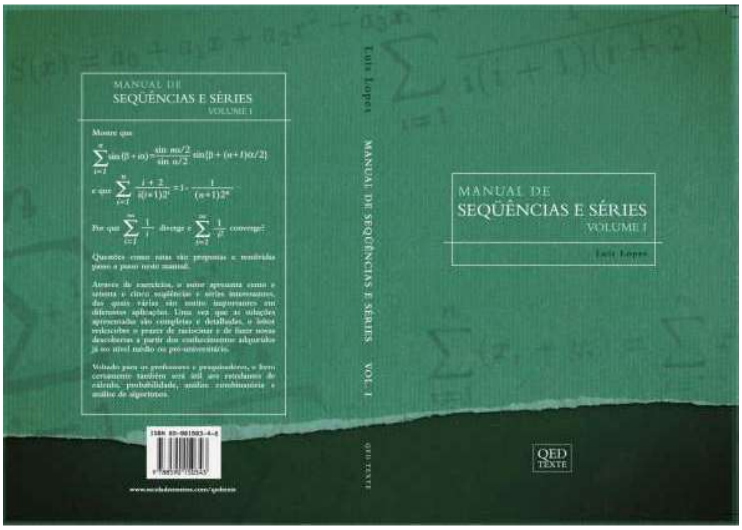
http://www.escolademestres.com/blogs/questoesresolvidas/matematica/306-construcoes-geometricas-de-triangulosversao-eletonica

Caso você goste do trabalho, há um link na mesma página para que você possa fazer uma contribuição para projeto através do Paypal.

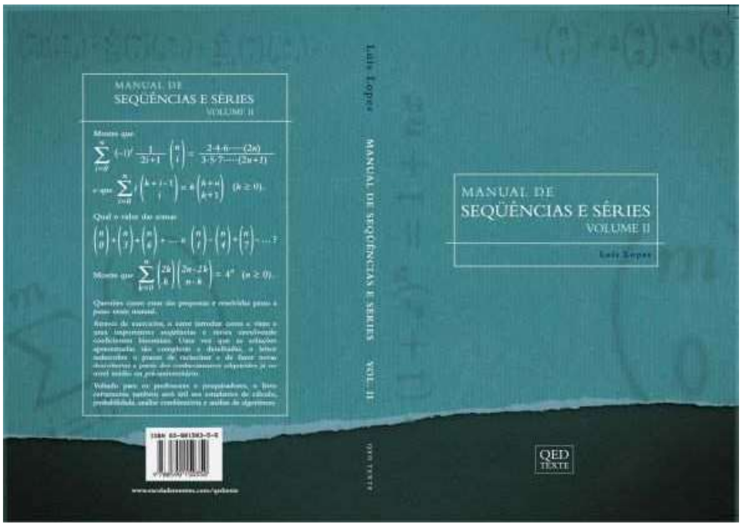
http://www.escolademestres.com/qedtexte

Tópicos abordados são os seguintes:

Seqüências e Séries -
Volume 1



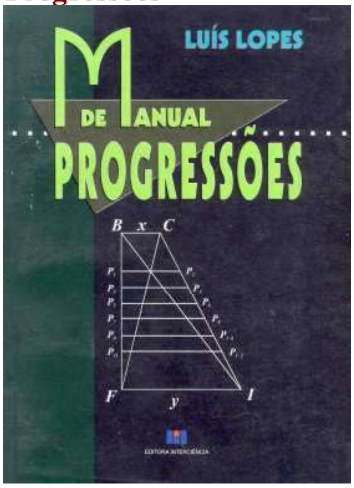
Volume 2



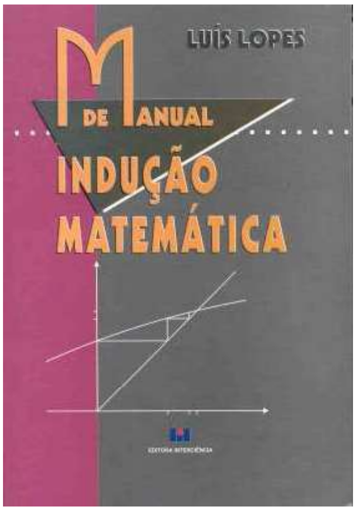
Coleção de Matemática do Prof Luís Lopes

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Progressões



Indução Matemática



http://www.escolademestres.com/qedtexte

This file was produced on February 4, 2015.
Montreal, CA and Rio de Janeiro, BR.
Work in progress.
Do not print. Spare the planet.
Contributions of all kinds are welcome.
Consider new constructions and insights,
algebraic developments and numerical solution,
discussion to existence and number of solutions,
references, etc.

Este arquivo foi criado em 4 de fevereiro de 2015.
Montreal, CA e Rio de Janeiro, BR.
Trabalho em desenvolvimento.
Não imprima. Evite desperdícios.
Colaborações de qualquer natureza são
solicitadas.

Conteúdo

Lista de Figuras

CAPÍTULO 3

EXERCÍCIOS

O enunciado de todos os exercícios começa por: construir um triângulo $\triangle$ **ABC** sendo dados ...

Exercício 1) $\blacktriangle$ $<\alpha,\ \beta,\ \gamma>$ `(alpha,beta,gamma)`.

Exercício 2) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ a>$ `(alpha,beta,a)`.

Exercício 3) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ c>$ `(alpha,beta,c)`.

Exercício 4) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ h_a>$ `(alpha,beta,h_a)`.

Exercício 5) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ h_c>$ `(alpha,beta,h_c)`.

Exercício 6) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ m_a>$ `(alpha,beta,m_a)`.

Exercício 7) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ m_c>$ `(alpha,beta,m_c)`.

Exercício 8) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ d_a>$ `(alpha,beta,d_a)`.

Exercício 9) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ d_c>$ `(alpha,beta,d_c)`.

Exercício 10) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ e_a>$ `(alpha,beta,e_a)`.

Exercício 11) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ e_c>$ `(alpha,beta,e_c)`.

Exercício 12) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ R>$ `(alpha,beta,R)`.

Exercício 13) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r>$ `(alpha,beta,r)`.

Exercício 14) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r_a>$ `(alpha,beta,r_a)`.

Exercício 15) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r_c>$ `(alpha,beta,r_c)`.

Exercício 16) △ $<\alpha, a, b>$ `(alpha,a,b)`.

Exercício 17) △ $<\alpha, b, c>$ `(alpha,b,c)`.

Exercício 18) △ $<\alpha, a, h_a>$ `(alpha,a,h_a)`.

Exercício 19) △ $<\alpha, a, h_b>$ `(alpha,a,h_b)`.

Exercício 20) △ $<\alpha, b, h_a>$ `(alpha,b,h_a)`.

Exercício 21) △ $<\alpha, b, h_b>$ `(alpha,b,h_b)`.

Exercício 22) ▲ $<\alpha, b, h_c>$ `(alpha,b,h_c)`.

Exercício 23) △ $<\alpha, a, m_a>$ `(alpha,a,m_a)`.

Exercício 24) △ $<\alpha, a, m_b>$ `(alpha,a,m_b)`.

Exercício 25) △ $<\alpha, b, m_a>$ `(alpha,b,m_a)`.

Exercício 26) △ $<\alpha, b, m_b>$ `(alpha,b,m_b)`.

Exercício 27) △ $<\alpha, b, m_c>$ `(alpha,b,m_c)`.

Exercício 28) △ $<\alpha, a, d_a>$ `(alpha,a,d_a)`.

Exercício 29) $<\alpha, a, d_b>$ `(alpha,a,d_b)`.

Exercício 30) △ $<\alpha, b, d_a>$ `(alpha,b,d_a)`.

Exercício 31) $<\alpha, b, d_b>$ `(alpha,b,d_b)`.

Exercício 32) △ $<\alpha, b, d_c>$ `(alpha,b,d_c)`.

Exercício 33) △ $<\alpha, a, e_a>$ `(alpha,a,e_a)`.

Exercício 34) $<\alpha, a, e_b>$ `(alpha,a,e_b)`.

Exercício 35) △ $<\alpha, b, e_a>$ `(alpha,b,e_a)`.

Exercício 36) $<\alpha, b, e_b>$ `(alpha,b,e_b)`.

Exercício 37) △ $<\alpha, b, e_c>$ `(alpha,b,e_c)`.

Exercício 38) ▲ $<\alpha, a, R>$ `(alpha,a,R)`.

Exercício 39) △ $<\alpha, b, R>$ `(alpha,b,R)`.

Exercício 40) △ $<\alpha, a, r>$ `(alpha,a,r)`.

Exercício 41) △ $<\alpha, b, r>$ `(alpha,b,r)`.

Exercício 42) △ $<\alpha, a, r_a>$ `(alpha,a,r_a)`.

Exercício 43) △ $<\alpha, a, r_b>$ `(alpha,a,r_b)`.

Exercício 44) △ $<\alpha, b, r_a>$ `(alpha,b,r_a)`.

Exercício 45) $\triangle$ $< \alpha, b, r_b >$ (alpha,b,r_b).

Exercício 46) $\triangle$ $< \alpha, b, r_c >$ (alpha,b,r_c).

Exercício 47) $\triangle$ $< \alpha, h_a, h_b >$ (alpha,h_a,h_b).

Exercício 48) $\triangle$ $< \alpha, h_b, h_c >$ (alpha,h_b,h_c).

Exercício 49) $\triangle$ $< \alpha, h_a, m_a >$ (alpha,h_a,m_a).

Exercício 50) $\triangle$ $< \alpha, h_a, m_b >$ (alpha,h_a,m_b).

Exercício 51) $\triangle$ $< \alpha, h_b, m_a >$ (alpha,h_b,m_a).

Exercício 52) $\triangle$ $< \alpha, h_b, m_b >$ (alpha,h_b,m_b).

Exercício 53) $\triangle$ $< \alpha, h_b, m_c >$ (alpha,h_b,m_c).

Exercício 54) $\triangle$ $< \alpha, h_a, d_a >$ (alpha,h_a,d_a).

Exercício 55) $< \alpha, h_a, d_b >$ (alpha,h_a,d_b).

Exercício 56) $\triangle$ $< \alpha, h_b, d_a >$ (alpha,h_b,d_a).

Exercício 57) $\triangle$ $< \alpha, h_b, d_b >$ (alpha,h_b,d_b).

Exercício 58) $< \alpha, h_b, d_c >$ (alpha,h_b,d_c).

Exercício 59) $\triangle$ $< \alpha, h_a, e_a >$ (alpha,h_a,e_a).

Exercício 60) $< \alpha, h_a, e_b >$ (alpha,h_a,e_b).

Exercício 61) $\triangle$ $< \alpha, h_b, e_a >$ (alpha,h_b,e_a).

Exercício 62) $\triangle$ $< \alpha, h_b, e_b >$ (alpha,h_b,e_b).

Exercício 63) $< \alpha, h_b, e_c >$ (alpha,h_b,e_c).

Exercício 64) $\triangle$ $< \alpha, h_a, R >$ (alpha,h_a,R).

Exercício 65) $\triangle$ $< \alpha, h_b, R >$ (alpha,h_b,R).

Exercício 66) $\triangle$ $< \alpha, h_a, r >$ (alpha,h_a,r).

Exercício 67) $\triangle$ $< \alpha, h_b, r >$ (alpha,h_b,r).

Exercício 68) $\triangle$ $< \alpha, h_a, r_a >$ (alpha,h_a,r_a).

Exercício 69) $\triangle$ $< \alpha, h_a, r_b >$ (alpha,h_a,r_b).

Exercício 70) $\triangle$ $< \alpha, h_b, r_a >$ (alpha,h_b,r_a).

Exercício 71) $\triangle$ $< \alpha, h_b, r_b >$ (alpha,h_b,r_b).

Exercício 72) $\triangle$ $< \alpha, h_b, r_c >$ (alpha,h_b,r_c).

Exercício 73) $\triangle$ $< \alpha, m_a, m_b >$ (alpha,m_a,m_b).

Exercício 74) △ $<\alpha, m_b, m_c>$ `(alpha,m_b,m_c).`

Exercício 75) △ $<\alpha, m_a, d_a>$ `(alpha,m_a,d_a).`

Exercício 76) $<\alpha, m_a, d_b>$ `(alpha,m_a,d_b).`

Exercício 77) $<\alpha, m_b, d_a>$ `(alpha,m_b,d_a).`

Exercício 78) $<\alpha, m_b, d_b>$ `(alpha,m_b,d_b).`

Exercício 79) $<\alpha, m_b, d_c>$ `(alpha,m_b,d_c).`

Exercício 80) △ $<\alpha, m_a, e_a>$ `(alpha,m_a,e_a).`

Exercício 81) $<\alpha, m_a, e_b>$ `(alpha,m_a,e_b).`

Exercício 82) $<\alpha, m_b, e_a>$ `(alpha,m_b,e_a).`

Exercício 83) $<\alpha, m_b, e_b>$ `(alpha,m_b,e_b).`

Exercício 84) $<\alpha, m_b, e_c>$ `(alpha,m_b,e_c).`

Exercício 85) △ $<\alpha, m_a, R>$ `(alpha,m_a,R).`

Exercício 86) △ $<\alpha, m_b, R>$ `(alpha,m_b,R).`

Exercício 87) △ $<\alpha, m_a, r>$ `(alpha,m_a,r).`

Exercício 88) $<\alpha, m_b, r>$ `(alpha,m_b,r).`

Exercício 89) △ $<\alpha, m_a, r_a>$ `(alpha,m_a,r_a).`

Exercício 90) △ $<\alpha, m_a, r_b>$ `(alpha,m_a,r_b).`

Exercício 91) $<\alpha, m_b, r_a>$ `(alpha,m_b,r_a).`

Exercício 92) $<\alpha, m_b, r_b>$ `(alpha,m_b,r_b).`

Exercício 93) $<\alpha, m_b, r_c>$ `(alpha,m_b,r_c).`

Exercício 94) $<\alpha, d_a, d_b>$ `(alpha,d_a,d_b).`

Exercício 95) $<\alpha, d_b, d_c>$ `(alpha,d_b,d_c).`

Exercício 96) △ $<\alpha, d_a, e_a>$ `(alpha,d_a,e_a).`

Exercício 97) $<\alpha, d_a, e_b>$ `(alpha,d_a,e_b).`

Exercício 98) $<\alpha, d_b, e_a>$ `(alpha,d_b,e_a).`

Exercício 99) △ $<\alpha, d_b, e_b>$ `(alpha,d_b,e_b).`

Exercício 100) $<\alpha, d_b, e_c>$ `(alpha,d_b,e_c).`

Exercício 101) △ $<\alpha, d_a, R>$ `(alpha,d_a,R).`

Exercício 102) $<\alpha, d_b, R>$ `(alpha,d_b,R).`

Exercício 103) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, r>$ `(alpha,d_a,r).`

Exercício 104) $\triangle$ $<\alpha,\, d_b,\, r>$ `(alpha,d_b,r).`

Exercício 105) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, r_a>$ `(alpha,d_a,r_a).`

Exercício 106) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, r_b>$ `(alpha,d_a,r_b).`

Exercício 107) $<\alpha,\, d_b,\, r_a>$ `(alpha,d_b,r_a).`

Exercício 108) $\triangle$ $<\alpha,\, d_b,\, r_b>$ `(alpha,d_b,r_b).`

Exercício 109) $<\alpha,\, d_b,\, r_c>$ `(alpha,d_b,r_c).`

Exercício 110) $<\alpha,\, e_a,\, e_b>$ `(alpha,e_a,e_b).`

Exercício 111) $<\alpha,\, e_b,\, e_c>$ `(alpha,e_b,e_c).`

Exercício 112) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, R>$ `(alpha,e_a,R).`

Exercício 113) $<\alpha,\, e_b,\, R>$ `(alpha,e_b,R).`

Exercício 114) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, r>$ `(alpha,e_a,r).`

Exercício 115) $<\alpha,\, e_b,\, r>$ `(alpha,e_b,r).`

Exercício 116) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, r_a>$ `(alpha,e_a,r_a).`

Exercício 117) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, r_b>$ `(alpha,e_a,r_b).`

Exercício 118) $\triangle$ $<\alpha,\, e_b,\, r_a>$ `(alpha,e_b,r_a).`

Exercício 119) $<\alpha,\, e_b,\, r_b>$ `(alpha,e_b,r_b).`

Exercício 120) $\triangle$ $<\alpha,\, e_b,\, r_c>$ `(alpha,e_b,r_c).`

Exercício 121) $\triangle$ $<\alpha,\, R,\, r>$ `(alpha,R,r).`

Exercício 122) $\triangle$ $<\alpha,\, R,\, r_a>$ `(alpha,R,r_a).`

Exercício 123) $\triangle$ $<\alpha,\, R,\, r_b>$ `(alpha,R,r_b).`

Exercício 124) $\triangle$ $<\alpha,\, r,\, r_a>$ `(alpha,r,r_a).`

Exercício 125) $\triangle$ $<\alpha,\, r,\, r_b>$ `(alpha,r,r_b).`

Exercício 126) $\triangle$ $<\alpha,\, r_a,\, r_b>$ `(alpha,r_a,r_b).`

Exercício 127) $\triangle$ $<\alpha,\, r_b,\, r_c>$ `(alpha,r_b,r_c).`

Exercício 128) $\triangle$ $<a,\, b,\, c>$ `(a,b,c).`

Exercício 129) $\triangle$ $<a,\, b,\, h_a>$ `(a,b,h_a).`

Exercício 130) $\triangle$ $<a,\, b,\, h_c>$ `(a,b,h_c).`

Exercício 131) $\triangle$ $<a,\, b,\, m_a>$ `(a,b,m_a).`

Exercício 132) $\triangle$ $<a,\, b,\, m_c>$ `(a,b,m_c).`

Exercício 133) $<a,\, b,\, d_a>$ `(a,b,d_a).`

Exercício 134) $\triangle$ $<a,\, b,\, d_c>$ `(a,b,d_c).`

Exercício 135) $<a,\, b,\, e_a>$ `(a,b,e_a).`

Exercício 136) $\triangle$ $<a,\, b,\, e_c>$ `(a,b,e_c).`

Exercício 137) $\triangle$ $<a,\, b,\, R>$ `(a,b,R).`

Exercício 138) $<a,\, b,\, r>$ `(a,b,r).`

Exercício 139) $<a,\, b,\, r_a>$ `(a,b,r_a).`

Exercício 140) $<a,\, b,\, r_c>$ `(a,b,r_c).`

Exercício 141) $\triangle$ $<a,\, h_a,\, h_b>$ `(a,h_a,h_b).`

Exercício 142) $\triangle$ $<a,\, h_b,\, h_c>$ `(a,h_b,h_c).`

Exercício 143) $\triangle$ $<a,\, h_a,\, m_a>$ `(a,h_a,m_a).`

Exercício 144) $\triangle$ $<a,\, h_a,\, m_b>$ `(a,h_a,m_b).`

Exercício 145) $\triangle$ $<a,\, h_b,\, m_a>$ `(a,h_b,m_a).`

Exercício 146) $\triangle$ $<a,\, h_b,\, m_b>$ `(a,h_b,m_b).`

Exercício 147) $\triangle$ $<a,\, h_b,\, m_c>$ `(a,h_b,m_c).`

Exercício 148) $\triangle$ $<a,\, h_a,\, d_a>$ `(a,h_a,d_a).`

Exercício 149) $<a,\, h_a,\, d_b>$ `(a,h_a,d_b).`

Exercício 150) $<a,\, h_b,\, d_a>$ `(a,h_b,d_a).`

Exercício 151) $\triangle$ $<a,\, h_b,\, d_b>$ `(a,h_b,d_b).`

Exercício 152) $\triangle$ $<a,\, h_b,\, d_c>$ `(a,h_b,d_c).`

Exercício 153) $\triangle$ $<a,\, h_a,\, e_a>$ `(a,h_a,e_a).`

Exercício 154) $<a,\, h_a,\, e_b>$ `(a,h_a,e_b).`

Exercício 155) $<a,\, h_b,\, e_a>$ `(a,h_b,e_a).`

Exercício 156) $\triangle$ $<a,\, h_b,\, e_b>$ `(a,h_b,e_b).`

Exercício 157) $\triangle$ $<a,\, h_b,\, e_c>$ `(a,h_b,e_c).`

Exercício 158) $\triangle$ $<a,\, h_a,\, R>$ `(a,h_a,R).`

Exercício 159) $\triangle$ $<a,\, h_b,\, R>$ `(a,h_b,R).`

Exercício 160) $\triangle$ $<a,\, h_a,\, r>$ `(a,h_a,r).`

Exercício 161) $\triangle$ $\langle a, h_b, r \rangle$ `(a,h_b,r).`

Exercício 162) $\triangle$ $\langle a, h_a, r_a \rangle$ `(a,h_a,r_a).`

Exercício 163) $\triangle$ $\langle a, h_a, r_b \rangle$ `(a,h_a,r_b).`

Exercício 164) $\triangle$ $\langle a, h_b, r_a \rangle$ `(a,h_b,r_a).`

Exercício 165) $\triangle$ $\langle a, h_b, r_b \rangle$ `(a,h_b,r_b).`

Exercício 166) $\triangle$ $\langle a, h_b, r_c \rangle$ `(a,h_b,r_c).`

Exercício 167) $\triangle$ $\langle a, m_a, m_b \rangle$ `(a,m_a,m_b).`

Exercício 168) $\triangle$ $\langle a, m_b, m_c \rangle$ `(a,m_b,m_c).`

Exercício 169) $\triangle$ $\langle a, m_a, d_a \rangle$ `(a,m_a,d_a).`

Exercício 170) $\langle a, m_a, d_b \rangle$ `(a,m_a,d_b).`

Exercício 171) $\langle a, m_b, d_a \rangle$ `(a,m_b,d_a).`

Exercício 172) $\langle a, m_b, d_b \rangle$ `(a,m_b,d_b).`

Exercício 173) $\langle a, m_b, d_c \rangle$ `(a,m_b,d_c).`

Exercício 174) $\triangle$ $\langle a, m_a, e_a \rangle$ `(a,m_a,e_a).`

Exercício 175) $\langle a, m_a, e_b \rangle$ `(a,m_a,e_b).`

Exercício 176) $\langle a, m_b, e_a \rangle$ `(a,m_b,e_a).`

Exercício 177) $\langle a, m_b, e_b \rangle$ `(a,m_b,e_b).`

Exercício 178) $\langle a, m_b, e_c \rangle$ `(a,m_b,e_c).`

Exercício 179) $\triangle$ $\langle a, m_a, R \rangle$ `(a,m_a,R).`

Exercício 180) $\triangle$ $\langle a, m_b, R \rangle$ `(a,m_b,R).`

Exercício 181) $\langle a, m_a, r \rangle$ `(a,m_a,r).`

Exercício 182) $\langle a, m_b, r \rangle$ `(a,m_b,r).`

Exercício 183) $\langle a, m_a, r_a \rangle$ `(a,m_a,r_a).`

Exercício 184) $\langle a, m_a, r_b \rangle$ `(a,m_a,r_b).`

Exercício 185) $\langle a, m_b, r_a \rangle$ `(a,m_b,r_a).`

Exercício 186) $\langle a, m_b, r_b \rangle$ `(a,m_b,r_b).`

Exercício 187) $\langle a, m_b, r_c \rangle$ `(a,m_b,r_c).`

Exercício 188) $\langle a, d_a, d_b \rangle$ `(a,d_a,d_b).`

Exercício 189) $\langle a, d_b, d_c \rangle$ `(a,d_b,d_c).`

Exercício 190) △ $<a,\, d_a,\, e_a>$ `(a,d_a,e_a).`

Exercício 191) $<a,\, d_a,\, e_b>$ `(a,d_a,e_b).`

Exercício 192) $<a,\, d_b,\, e_a>$ `(a,d_b,e_a).`

Exercício 193) △ $<a,\, d_b,\, e_b>$ `(a,d_b,e_b).`

Exercício 194) $<a,\, d_b,\, e_c>$ `(a,d_b,e_c).`

Exercício 195) △ $<a,\, d_a,\, R>$ `(a,d_a,R).`

Exercício 196) $<a,\, d_b,\, R>$ `(a,d_b,R).`

Exercício 197) $<a,\, d_a,\, r>$ `(a,d_a,r).`

Exercício 198) $<a,\, d_b,\, r>$ `(a,d_b,r).`

Exercício 199) $<a,\, d_a,\, r_a>$ `(a,d_a,r_a).`

Exercício 200) $<a,\, d_a,\, r_b>$ `(a,d_a,r_b).`

Exercício 201) $<a,\, d_b,\, r_a>$ `(a,d_b,r_a).`

Exercício 202) $<a,\, d_b,\, r_b>$ `(a,d_b,r_b).`

Exercício 203) $<a,\, d_b,\, r_c>$ `(a,d_b,r_c).`

Exercício 204) $<a,\, e_a,\, e_b>$ `(a,e_a,e_b).`

Exercício 205) $<a,\, e_b,\, e_c>$ `(a,e_b,e_c).`

Exercício 206) △ $<a,\, e_a,\, R>$ `(a,e_a,R).`

Exercício 207) $<a,\, e_b,\, R>$ `(a,e_b,R).`

Exercício 208) $<a,\, e_a,\, r>$ `(a,e_a,r).`

Exercício 209) $<a,\, e_b,\, r>$ `(a,e_b,r).`

Exercício 210) $<a,\, e_a,\, r_a>$ `(a,e_a,r_a).`

Exercício 211) $<a,\, e_a,\, r_b>$ `(a,e_a,r_b).`

Exercício 212) $<a,\, e_b,\, r_a>$ `(a,e_b,r_a).`

Exercício 213) $<a,\, e_b,\, r_b>$ `(a,e_b,r_b).`

Exercício 214) $<a,\, e_b,\, r_c>$ `(a,e_b,r_c).`

Exercício 215) △ $<a,\, R,\, r>$ `(a,R,r).`

Exercício 216) △ $<a,\, R,\, r_a>$ `(a,R,r_a).`

Exercício 217) △ $<a,\, R,\, r_b>$ `(a,R,r_b).`

Exercício 218) △ $<a,\, r,\, r_a>$ `(a,r,r_a).`

Exercício 219) $\triangle$ $<a, r, r_b>$ `(a,r,r_b)`.

Exercício 220) $\triangle$ $<a, r_a, r_b>$ `(a,r_a,r_b)`.

Exercício 221) $\triangle$ $<a, r_b, r_c>$ `(a,r_b,r_c)`.

Exercício 222) $\triangle$ $<h_a, h_b, h_c>$ `(h_a,h_b,h_c)`.

Exercício 223) $\triangle$ $<h_a, h_b, m_a>$ `(h_a,h_b,m_a)`.

Exercício 224) $\triangle$ $<h_a, h_b, m_c>$ `(h_a,h_b,m_c)`.

Exercício 225) $<h_a, h_b, d_a>$ `(h_a,h_b,d_a)`.

Exercício 226) $\triangle$ $<h_a, h_b, d_c>$ `(h_a,h_b,d_c)`.

Exercício 227) $<h_a, h_b, e_a>$ `(h_a,h_b,e_a)`.

Exercício 228) $\triangle$ $<h_a, h_b, e_c>$ `(h_a,h_b,e_c)`.

Exercício 229) $<h_a, h_b, R>$ `(h_a,h_b,R)`.

Exercício 230) $\triangle$ $<h_a, h_b, r>$ `(h_a,h_b,r)`.

Exercício 231) $\triangle$ $<h_a, h_b, r_a>$ `(h_a,h_b,r_a)`.

Exercício 232) $\triangle$ $<h_a, h_b, r_c>$ `(h_a,h_b,r_c)`.

Exercício 233) $\triangle$ $<h_a, m_a, m_b>$ `(h_a,m_a,m_b)`.

Exercício 234) $\triangle$ $<h_a, m_b, m_c>$ `(h_a,m_b,m_c)`.

Exercício 235) $\triangle$ $<h_a, m_a, d_a>$ `(h_a,m_a,d_a)`.

Exercício 236) $<h_a, m_a, d_b>$ `(h_a,m_a,d_b)`.

Exercício 237) $\triangle$ $<h_a, m_b, d_a>$ `(h_a,m_b,d_a)`.

Exercício 238) $<h_a, m_b, d_b>$ `(h_a,m_b,d_b)`.

Exercício 239) $<h_a, m_b, d_c>$ `(h_a,m_b,d_c)`.

Exercício 240) $\triangle$ $<h_a, m_a, e_a>$ `(h_a,m_a,e_a)`.

Exercício 241) $<h_a, m_a, e_b>$ `(h_a,m_a,e_b)`.

Exercício 242) $\triangle$ $<h_a, m_b, e_a>$ `(h_a,m_b,e_a)`.

Exercício 243) $<h_a, m_b, e_b>$ `(h_a,m_b,e_b)`.

Exercício 244) $<h_a, m_b, e_c>$ `(h_a,m_b,e_c)`.

Exercício 245) $\triangle$ $<h_a, m_a, R>$ `(h_a,m_a,R)`.

Exercício 246) $<h_a, m_b, R>$ `(h_a,m_b,R)`.

Exercício 247) $\triangle$ $<h_a, m_a, r>$ `(h_a,m_a,r)`.

Exercício 248) $\triangle$ $< h_a, m_b, r >$ `(h_a,m_b,r).`

Exercício 249) $\triangle$ $< h_a, m_a, r_a >$ `(h_a,m_a,r_a).`

Exercício 250) $\triangle$ $< h_a, m_a, r_b >$ `(h_a,m_a,r_b).`

Exercício 251) $\triangle$ $< h_a, m_b, r_a >$ `(h_a,m_b,r_a).`

Exercício 252) $\triangle$ $< h_a, m_b, r_b >$ `(h_a,m_b,r_b).`

Exercício 253) $\triangle$ $< h_a, m_b, r_c >$ `(h_a,m_b,r_c).`

Exercício 254) $< h_a, d_a, d_b >$ `(h_a,d_a,d_b).`

Exercício 255) $< h_a, d_b, d_c >$ `(h_a,d_b,d_c).`

Exercício 256) $\blacktriangle$ $< h_a, d_a, e_a >$ `(h_a,d_a,e_a).`

Exercício 257) $< h_a, d_a, e_b >$ `(h_a,d_a,e_b).`

Exercício 258) $< h_a, d_b, e_a >$ `(h_a,d_b,e_a).`

Exercício 259) $< h_a, d_b, e_b >$ `(h_a,d_b,e_b).`

Exercício 260) $< h_a, d_b, e_c >$ `(h_a,d_b,e_c).`

Exercício 261) $\triangle$ $< h_a, d_a, R >$ `(h_a,d_a,R).`

Exercício 262) $< h_a, d_b, R >$ `(h_a,d_b,R).`

Exercício 263) $\triangle$ $< h_a, d_a, r >$ `(h_a,d_a,r).`

Exercício 264) $< h_a, d_b, r >$ `(h_a,d_b,r).`

Exercício 265) $\triangle$ $< h_a, d_a, r_a >$ `(h_a,d_a,r_a).`

Exercício 266) $\triangle$ $< h_a, d_a, r_b >$ `(h_a,d_a,r_b).`

Exercício 267) $< h_a, d_b, r_a >$ `(h_a,d_b,r_a).`

Exercício 268) $< h_a, d_b, r_b >$ `(h_a,d_b,r_b).`

Exercício 269) $< h_a, d_b, r_c >$ `(h_a,d_b,r_c).`

Exercício 270) $< h_a, e_a, e_b >$ `(h_a,e_a,e_b).`

Exercício 271) $< h_a, e_b, e_c >$ `(h_a,e_b,e_c).`

Exercício 272) $\triangle$ $< h_a, e_a, R >$ `(h_a,e_a,R).`

Exercício 273) $< h_a, e_b, R >$ `(h_a,e_b,R).`

Exercício 274) $\triangle$ $< h_a, e_a, r >$ `(h_a,e_a,r).`

Exercício 275) $< h_a, e_b, r >$ `(h_a,e_b,r).`

Exercício 276) $\triangle$ $< h_a, e_a, r_a >$ `(h_a,e_a,r_a).`

Exercício 277) △ $<h_a, e_a, r_b>$ (h_a,e_a,r_b).

Exercício 278) $<h_a, e_b, r_a>$ (h_a,e_b,r_a).

Exercício 279) $<h_a, e_b, r_b>$ (h_a,e_b,r_b).

Exercício 280) $<h_a, e_b, r_c>$ (h_a,e_b,r_c).

Exercício 281) △ $<h_a, R, r>$ (h_a,R,r).

Exercício 282) △ $<h_a, R, r_a>$ (h_a,R,r_a).

Exercício 283) △ $<h_a, R, r_b>$ (h_a,R,r_b).

Exercício 284) ▲ $<h_a, r, r_a>$ (h_a,r,r_a).

Exercício 285) △ $<h_a, r, r_b>$ (h_a,r,r_b).

Exercício 286) △ $<h_a, r_a, r_b>$ (h_a,r_a,r_b).

Exercício 287) ▲ $<h_a, r_b, r_c>$ (h_a,r_b,r_c).

Exercício 288) △ $<m_a, m_b, m_c>$ (m_a,m_b,m_c).

Exercício 289) $<m_a, m_b, d_a>$ (m_a,m_b,d_a).

Exercício 290) $<m_a, m_b, d_c>$ (m_a,m_b,d_c).

Exercício 291) $<m_a, m_b, e_a>$ (m_a,m_b,e_a).

Exercício 292) $<m_a, m_b, e_c>$ (m_a,m_b,e_c).

Exercício 293) $<m_a, m_b, R>$ (m_a,m_b,R).

Exercício 294) $<m_a, m_b, r>$ (m_a,m_b,r).

Exercício 295) $<m_a, m_b, r_a>$ (m_a,m_b,r_a).

Exercício 296) $<m_a, m_b, r_c>$ (m_a,m_b,r_c).

Exercício 297) $<m_a, d_a, d_b>$ (m_a,d_a,d_b).

Exercício 298) $<m_a, d_b, d_c>$ (m_a,d_b,d_c).

Exercício 299) △ $<m_a, d_a, e_a>$ (m_a,d_a,e_a).

Exercício 300) $<m_a, d_a, e_b>$ (m_a,d_a,e_b).

Exercício 301) $<m_a, d_b, e_a>$ (m_a,d_b,e_a).

Exercício 302) △ $<m_a, d_b, e_b>$ (m_a,d_b,e_b).

Exercício 303) $<m_a, d_b, e_c>$ (m_a,d_b,e_c).

Exercício 304) △ $<m_a, d_a, R>$ (m_a,d_a,R).

Exercício 305) $<m_a, d_b, R>$ (m_a,d_b,R).

Exercício 306) $<m_a, d_a, r>$ `(m_a,d_a,r).`

Exercício 307) $<m_a, d_b, r>$ `(m_a,d_b,r).`

Exercício 308) $<m_a, d_a, r_a>$ `(m_a,d_a,r_a).`

Exercício 309) $<m_a, d_a, r_b>$ `(m_a,d_a,r_b).`

Exercício 310) $<m_a, d_b, r_a>$ `(m_a,d_b,r_a).`

Exercício 311) $<m_a, d_b, r_b>$ `(m_a,d_b,r_b).`

Exercício 312) $<m_a, d_b, r_c>$ `(m_a,d_b,r_c).`

Exercício 313) $<m_a, e_a, e_b>$ `(m_a,e_a,e_b).`

Exercício 314) $<m_a, e_b, e_c>$ `(m_a,e_b,e_c).`

Exercício 315) $\triangle$ $<m_a, e_a, R>$ `(m_a,e_a,R).`

Exercício 316) $<m_a, e_b, R>$ `(m_a,e_b,R).`

Exercício 317) $<m_a, e_a, r>$ `(m_a,e_a,r).`

Exercício 318) $<m_a, e_b, r>$ `(m_a,e_b,r).`

Exercício 319) $<m_a, e_a, r_a>$ `(m_a,e_a,r_a).`

Exercício 320) $<m_a, e_a, r_b>$ `(m_a,e_a,r_b).`

Exercício 321) $<m_a, e_b, r_a>$ `(m_a,e_b,r_a).`

Exercício 322) $<m_a, e_b, r_b>$ `(m_a,e_b,r_b).`

Exercício 323) $<m_a, e_b, r_c>$ `(m_a,e_b,r_c).`

Exercício 324) $<m_a, R, r>$ `(m_a,R,r).`

Exercício 325) $<m_a, R, r_a>$ `(m_a,R,r_a).`

Exercício 326) $<m_a, R, r_b>$ `(m_a,R,r_b).`

Exercício 327) $\triangle$ $<m_a, r, r_a>$ `(m_a,r,r_a).`

Exercício 328) $\triangle$ $<m_a, r, r_b>$ `(m_a,r,r_b).`

Exercício 329) $\triangle$ $<m_a, r_a, r_b>$ `(m_a,r_a,r_b).`

Exercício 330) $\triangle$ $<m_a, r_b, r_c>$ `(m_a,r_b,r_c).`

Exercício 331) $<d_a, d_b, d_c>$ `(d_a,d_b,d_c).`

Exercício 332) $<d_a, d_b, e_a>$ `(d_a,d_b,e_a).`

Exercício 333) $<d_a, d_b, e_c>$ `(d_a,d_b,e_c).`

Exercício 334) $<d_a, d_b, R>$ `(d_a,d_b,R).`

Exercício 335) $<d_a, d_b, r>$ `(d_a,d_b,r)`.

Exercício 336) $<d_a, d_b, r_a>$ `(d_a,d_b,r_a)`.

Exercício 337) $<d_a, d_b, r_c>$ `(d_a,d_b,r_c)`.

Exercício 338) $<d_a, e_a, e_b>$ `(d_a,e_a,e_b)`.

Exercício 339) $<d_a, e_b, e_c>$ `(d_a,e_b,e_c)`.

Exercício 340) $\triangle$ $<d_a, e_a, R>$ `(d_a,e_a,R)`.

Exercício 341) $<d_a, e_b, R>$ `(d_a,e_b,R)`.

Exercício 342) $\triangle$ $<d_a, e_a, r>$ `(d_a,e_a,r)`.

Exercício 343) $<d_a, e_b, r>$ `(d_a,e_b,r)`.

Exercício 344) $\triangle$ $<d_a, e_a, r_a>$ `(d_a,e_a,r_a)`.

Exercício 345) $\triangle$ $<d_a, e_a, r_b>$ `(d_a,e_a,r_b)`.

Exercício 346) $<d_a, e_b, r_a>$ `(d_a,e_b,r_a)`.

Exercício 347) $<d_a, e_b, r_b>$ `(d_a,e_b,r_b)`.

Exercício 348) $<d_a, e_b, r_c>$ `(d_a,e_b,r_c)`.

Exercício 349) $<d_a, R, r>$ `(d_a,R,r)`.

Exercício 350) $<d_a, R, r_a>$ `(d_a,R,r_a)`.

Exercício 351) $<d_a, R, r_b>$ `(d_a,R,r_b)`.

Exercício 352) $\triangle$ $<d_a, r, r_a>$ `(d_a,r,r_a)`.

Exercício 353) $<d_a, r, r_b>$ `(d_a,r,r_b)`.

Exercício 354) $<d_a, r_a, r_b>$ `(d_a,r_a,r_b)`.

Exercício 355) $\triangle$ $<d_a, r_b, r_c>$ `(d_a,r_b,r_c)`.

Exercício 356) $<e_a, e_b, e_c>$ `(e_a,e_b,e_c)`.

Exercício 357) $<e_a, e_b, R>$ `(e_a,e_b,R)`.

Exercício 358) $<e_a, e_b, r>$ `(e_a,e_b,r)`.

Exercício 359) $<e_a, e_b, r_a>$ `(e_a,e_b,r_a)`.

Exercício 360) $<e_a, e_b, r_c>$ `(e_a,e_b,r_c)`.

Exercício 361) $<e_a, R, r>$ `(e_a,R,r)`.

Exercício 362) $<e_a, R, r_a>$ `(e_a,R,r_a)`.

Exercício 363) $<e_a, R, r_b>$ `(e_a,R,r_b)`.

Exercício 364) $\triangle$ $<e_a, r, r_a>$ `(e_a,r,r_a).`

Exercício 365) $<e_a, r, r_b>$ `(e_a,r,r_b).`

Exercício 366) $<e_a, r_a, r_b>$ `(e_a,r_a,r_b).`

Exercício 367) $\triangle$ $<e_a, r_b, r_c>$ `(e_a,r_b,r_c).`

Exercício 368) $\triangle$ $<R, r, r_a>$ `(R,r,r_a).`

Exercício 369) $\triangle$ $<R, r_a, r_b>$ `(R,r_a,r_b).`

Exercício 370) $\triangle$ $<r, r_a, r_b>$ `(r,r_a,r_b).`

Exercício 371) $\triangle$ $<r_a, r_b, r_c>$ `(r_a,r_b,r_c).`

CAPÍTULO 4

CONSTRUÇÕES E SOLUÇÕES ALGÉBRICAS

Exercício 101) $<\alpha, d_a, R>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, R, a>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, a, d_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 28).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 102) $<\alpha, d_b, R>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, R, a>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, a, d_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 29).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 103) $<\alpha, d_a, r>$

Primeiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle ID_aX$. Uma análise da figura 4.84 (ver a página 61) nos mostrará que o ponto X possui duas propriedades:

i) pertence ao círculo inscrito γ_i;

ii) um observador colocado em X enxerga o segmento $\overline{ID_a}$ segundo um ângulo reto (X pertence ao arco capaz—ϕ— do ângulo reto sobre o segmento $\overline{ID_a}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.84, na página 61):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) construir a bissetriz interna (reta $\mathfrak{d}_a$) do ângulo α;

iii) colocar I e D_a em $\mathfrak{d}_a$ servindo-se do raio r e do comprimento d_a, respectivamente; traçar o círculo inscrito $\gamma_i = (I, r)$;

iv) construir o arco capaz (círculo ϕ) do ângulo reto sobre o segmento $\overline{ID_a}$ e obter o ponto X ($X = \gamma_i \cap \phi$);

v) se $\mathfrak{a} = (X, D_a)$ é a reta definida pelos pontos X e D_a, então $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (notar que o triângulo que seria gerado por X' é congruente ao triângulo $\triangle\,\mathbf{ABC}$).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Se conhecermos a posição do ponto I_a, nos encontraremos com um problema já resolvido (exercício 66). Com o teorema 2.2 visto em [9], concluímos que os pontos $< \mathbf{A}, D_a >$ e $< I, I_a >$ formam um grupo harmônico. Logo, nosso problema se resume agora a encontrar a posição do ponto I_a na bissetriz interna (reta $\mathfrak{d}_a$) do ângulo α.

Temos o seguinte problema: encontrar a posição de um quarto ponto que forma com três outros uma divisão harmônica.

Há diversas maneiras de se resolver este problema (ver [1], [3] ou [5], por exemplo). Vamos apresentar aqui uma construção que utiliza bastante as ideias do teorema 2.2.

Numa reta $\mathfrak{d}_a$ qualquer (ver a figura 4.85, na página 62), colocar os pontos $\mathbf{A}$, I e D_a como mostrado na figura 4.84 (ver a página 61). Com o segmento $\overline{\mathbf{A}D_a}$ como diâmetro, traçar o círculo ϕ. Pelo ponto I, conduzir uma corda qualquer $\overline{\mathscr{T}\mathscr{U}}$ e obter o ponto $\mathscr{U}'$, simétrico em relação à reta $\mathfrak{d}_a$ do ponto $\mathscr{U}$ ($\mathscr{U}' \in \phi$ e $\overline{\mathscr{U}\mathscr{U}'} \perp \mathfrak{d}_a$). Traçar a reta $\mathfrak{r} = (\mathscr{T}, \mathscr{U}')$ e obter o ponto I_a ($I_a = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{d}_a$).

Para justificar I_a como o ponto procurado, observar que o segmento $\overline{\mathscr{T}D_a}$ é a bissetriz interna do ângulo de vértice $\mathscr{T}$ do $\triangle\,\mathscr{T}II_a$ e $\overline{\mathscr{T}\mathbf{A}}$, sua bissetriz externa.

Exercício 104) $<\alpha, d_b, r>$

Método do problema já resolvido

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle \mathbf{AB}D_b$. Deste triângulo (ver a figura 4.84, na página 61) conhecemos um ângulo (o ângulo α), o lado oposto (ℓ_1) a este ângulo ($\ell_1 = \mathbf{B}D_b = d_b$) e a bissetriz interna (ℓ_2) deste mesmo ângulo ($\ell_2 = \mathbf{A}I$). Logo, nos encontramos com os dados do exercício 28).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Observação: o comprimento ℓ_2 é obtido colocando-se o ponto I na reta $\mathfrak{d}_a$ (bissetriz interna do ângulo α) servindo-se do raio r.

Exercício 105) $<\alpha, d_a, r_a>$

Método do problema já resolvido

Seguindo as ideias do segundo procedimento do exercício 103, podemos construir o ponto I pois os pontos $<\mathbf{A}, D_a>$ e $<I, I_a>$ formam um grupo harmônico e conhecemos as posições dos pontos $<\mathbf{A}, D_a>$ e I_a.

Logo, conhecemos as posições dos quatro pontos $<\mathbf{A}, D_a>$ e $<I, I_a>$ e nos encontramos com um problema já resolvido (ver o exercício 66).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 106) $<\alpha, d_a, r_b>$

Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle I_b D_a X_b$. Uma análise da figura 4.86 (ver a página 63) nos mostrará que o ponto X_b possui duas propriedades:

i) pertence ao círculo exinscrito γ_b;

ii) um observador colocado em X_b enxerga o segmento $\overline{I_b D_a}$ segundo um ângulo reto (X_b pertence ao arco capaz—ϕ— do ângulo reto sobre o segmento $\overline{I_b D_a}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.86, na página 63):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$; construir as bissetrizes interna (reta $\mathfrak{d}_a$) e externa (reta $\mathfrak{e}_a$) do ângulo α;

ii) colocar os pontos I_b e D_a nas retas $\mathfrak{e}_a$ e $\mathfrak{d}_a$ servindo-se do raio r_b e do comprimento d_a, respectivamente; traçar o círculo exinscrito $\gamma_b = (I_b, r_b)$;

iii) construir o arco capaz (círculo ϕ) do ângulo reto sobre o segmento $\overline{I_b D_a}$ e obter o ponto X_b ($X_b = \gamma_b \cap \phi$);

iv) se $\mathfrak{a} = (X_b, D_a)$ é a reta definida pelos pontos X_b e D_a, então $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 107) $<\alpha, d_b, r_a>$

Método algébrico

Vimos no exercício 91 que $\mathbf{A}Y_a = p = r_a \cot\frac{\alpha}{2}$ e $b = \frac{2p(p-c)}{2p-(1+\cos\alpha)c}$. Assim, escrevemos o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a + b + c = 2p \implies a = 2p - (b + c) \tag{4.1}$$

$$b = \frac{2p(p-c)}{2p - (1+\cos\alpha)c} \tag{4.2}$$

$$(a+c)^2 d_b^2 = 4pa(p-b)c \tag{4.3}$$

Como $<\cos\alpha, d_b, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.1)–(4.3), obtendo assim os três lados $<a, b, c>$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14} \Longrightarrow \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm e $r_a = 2\sqrt{3}$ cm $\Longrightarrow p = 10$ cm.

Substituindo estes valores em (4.2) e (4.1), vem:

$$b = \frac{56(10-c)}{56-5c} \tag{4.4}$$

$$a = \frac{5(c^2 - 20c + 112)}{56-5c} \tag{4.5}$$

Finalmente, substituindo os valores de b e a dados por (4.4) e (4.5) em (4.3), resulta:

$$169c^4 - 3380c^3 + 11184c^2 + 197120c - 1254400 = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtemos uma raiz positiva, uma raiz negativa e duas raízes complexas, as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$\begin{aligned} c_1 &= \quad 8\,\text{cm} \implies b_1 = 7\,\text{cm e } a_1 = 5\,\text{cm} \\ c_2 &= -7{,}668139\,1 \\ c_3 &= \quad 9{,}834069\,6 - 4{,}928145\,5\, i \\ c_4 &= \quad 9{,}834069\,6 + 4{,}928145\,5\, i \end{aligned}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $< a_1, b_1, c_1 >$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 108) $< \alpha, d_b, r_b >$

Método do problema já resolvido

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle \mathbf{AB}D_b$. Deste triângulo (ver a figura 4.86, na página 63) conhecemos um ângulo (o ângulo α), o lado oposto (ℓ_1) a este ângulo ($\ell_1 = \mathbf{B}D_b = d_b$) e a bissetriz externa (ℓ_2) deste mesmo ângulo ($\ell_2 = \mathbf{A}I_b$). Logo, nos encontramos com os dados do exercício 33, já resolvido.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Observação: o comprimento ℓ_2 é obtido colocando-se o ponto I_b na reta $\mathfrak{e}_a$ (bissetriz externa do ângulo α) servindo-se do raio r_b.

Exercício 109) $< \alpha, d_b, r_c >$

Método algébrico

Vimos no exercício 93 que $\ell = \mathbf{A}Y_c = p - b = r_c \tan\frac{\alpha}{2}$ e $b = \frac{2\ell(c-\ell)}{2\ell-(1-\cos\alpha)c}$. Assim, escrevemos o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a + b + c = 2p = 2(\ell + b) \implies a = 2\ell + b - c \tag{4.6}$$

$$b = \frac{2\ell(c-\ell)}{2\ell - (1-\cos\alpha)c} \tag{4.7}$$

$$(a+c)^2 d_b^2 = 4pa(p-b)c$$

$$(a+c)^2 d_b^2 = 4\ell a(\ell + b)c \tag{4.8}$$

Como $< \cos\alpha, d_b, r_c >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.6)–(4.8), obtendo assim os três lados $< a, b, c >$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14} \Longrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm e $r_c = 5\sqrt{3}$ cm $\Longrightarrow \ell = 3$ cm.

Substituindo estes valores em (4.7) e (4.6), vem:

$$b = \frac{28(c-3)}{28-c} \tag{4.9}$$
$$a = \frac{c^2 - 6c + 84}{28-c} \tag{4.10}$$

Finalmente, substituindo os valores de b e a dados por (4.9) e (4.10) em (4.8), resulta:

$$(c-8)(169c^3 + 338c^2 + 9156c + 14112) = 0$$

cuja única raiz positiva é $c = 8$ cm. Então $b = 7$ cm e $a = 5$ cm.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 110) $<\alpha, e_a, e_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{4.11}$$
$$\left[\left(\frac{a}{c-b}\right)^2 - 1\right]bc = e_a^2 \tag{4.12}$$
$$\left[\left(\frac{b}{c-a}\right)^2 - 1\right]ac = e_b^2 \tag{4.13}$$

Como $<\cos\alpha, e_a, e_b>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.11)–(4.13), obtendo assim os três lados $<a, b, c>$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $e_a = 8\sqrt{21}$ cm e $e_b = \frac{40}{3}$ cm.

Com estes valores, um programa qualquer fornece

$$a = 5\text{ cm}; \qquad b = 7\text{ cm}; \qquad c = 8\text{ cm}.$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que este triângulo satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 111) $<\alpha, e_b, e_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{4.14}$$

$$\left[\left(\frac{b}{c-a}\right)^2 - 1\right] ac = e_b^2 \tag{4.15}$$

$$\left[\left(\frac{c}{a-b}\right)^2 - 1\right] ab = e_c^2 \tag{4.16}$$

Como $<\cos\alpha, e_b, e_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.14)–(4.16), obtendo assim os três lados $<a, b, c>$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $e_b = \frac{40}{3}$ cm e $e_c = 5\sqrt{21}$ cm.

Com estes valores, um programa qualquer fornece

$$a = 5\,\text{cm}; \qquad b = 7\,\text{cm}; \qquad c = 8\,\text{cm}.$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que este triângulo satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 112) $<\alpha, e_a, R>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, R, a>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, a, e_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 33).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 113) $<\alpha, e_b, R>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, R, a>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, a, e_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 34).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 114) $<\alpha, e_a, r>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle IE_aX$. Uma análise da figura 4.87 (ver a página 64) nos mostrará que o ponto X possui duas propriedades:

i) pertence ao círculo inscrito γ_i;

ii) um observador colocado em X enxerga o segmento $\overline{IE_a}$ segundo um ângulo reto (X pertence ao arco capaz—ϕ—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{IE_a}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.87, na página 64):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) construir as bissetrizes interna (reta $\mathfrak{d}_a$) e externa (reta $\mathfrak{e}_a$) do ângulo α;

iii) colocar os pontos I e E_a nas retas $\mathfrak{d}_a$ e $\mathfrak{e}_a$ servindo-se do raio r e do comprimento e_a, respectivamente; traçar o círculo inscrito $\gamma_i = (I, r)$;

iv) construir o arco capaz (círculo ϕ) do ângulo reto sobre o segmento $\overline{IE_a}$ e obter o ponto X ($X = \gamma_i \cap \phi$);

v) se $\mathfrak{a} = (X, E_a)$ é a reta definida pelos pontos X e E_a, então $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 115) $<\alpha, e_b, r>$

Método algébrico

Vimos no exercício 88 que $\ell = \mathbf{A}Y = p - a = r\cot\frac{\alpha}{2}$ e $b = \frac{2\ell(c-\ell)}{(1+\cos\alpha)c-2\ell}$. Assim, escrevemos o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\ell = p - a \implies a = b + c - 2\ell \tag{4.17}$$

$$b = \frac{2\ell(c-\ell)}{(1+\cos\alpha)c - 2\ell} \tag{4.18}$$

$$(c-a)^2 e_b^2 = 4ac(p-a)(p-c)$$

$$(c-a)^2 e_b^2 = 4\ell a(\ell + a - c)c \tag{4.19}$$

Como $< \cos\alpha, e_b, r >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.17)–(4.19), obtendo assim os três lados $< a, b, c >$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14} \Longrightarrow \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, $e_b = \frac{40}{3}$ cm e $r = \sqrt{3}$ cm $\Longrightarrow \ell = 5$ cm.

Substituindo estes valores em (4.18) e (4.17), vem:

$$b = \frac{28(c-5)}{5c-28} \tag{4.20}$$

$$a = \frac{5(c^2 - 10c + 28)}{5c-28} \tag{4.21}$$

Finalmente, substituindo os valores de b e a dados por (4.20) e (4.21) em (4.19), resulta:

$$27c^4 - 270c^3 - 6988c^2 + 98560c - 313600 = 0 \tag{\dagger}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtemos uma raiz negativa e três raízes positivas, as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$c_1 = 14{,}165098\,0\,\text{cm} \Longrightarrow b_1 = \frac{28(c_1 - 5)}{5c_1 - 28} = 5{,}992289\,7\,\text{cm e}$$

$$a_1 = b_1 + c_1 - 10 = 10{,}157387\,7\,\text{cm}$$

$$c_2 = 8\,\text{cm} \Longrightarrow b_2 = 7\,\text{cm e } a_2 = 5\,\text{cm}$$

$$c_3 = 5{,}728141\,6\,\text{cm} \Longrightarrow b_3 = 31{,}821000\,4\,\text{cm e } a_3 = 27{,}549142\,0\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os três triângulos cujos lados são $< a_1, b_1, c_1 >$, $< a_2, b_2, c_2 >$ e $< a_3, b_3, c_3 >$ satisfazem todas as condições do problema.

Exercício 116) $\quad < \alpha, e_a, r_a >$

Método da interseção de dois lugares geométricos

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle I_a E_a X_a$. Uma análise da figura 4.88 (ver a página 65) nos mostrará que o ponto X_a possui duas propriedades:

i) pertence ao círculo exinscrito γ_a;

ii) um observador colocado em X_a enxerga o segmento $\overline{I_a E_a}$ segundo um ângulo reto (X_a pertence ao arco capaz—ϕ—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{I_a E_a}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.88, na página 65):

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) construir as bissetrizes interna (reta $\mathfrak{d}_a$) e externa (reta $\mathfrak{e}_a$) do ângulo α;

iii) colocar os pontos I_a e E_a nas retas $\mathfrak{d}_a$ e $\mathfrak{e}_a$ servindo-se do raio r_a e do comprimento e_a, respectivamente; traçar o círculo exinscrito $\gamma_a = (I_a, r_a)$;

iv) construir o arco capaz (círculo ϕ) do ângulo reto sobre o segmento $\overline{I_a E_a}$ e obter o ponto X_a ($X_a = \gamma_a \cap \phi$);

v) se $\mathfrak{a} = (X_a, E_a)$ é a reta definida pelos pontos X_a e E_a, então $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 117) $< \alpha, e_a, r_b >$

Método do problema já resolvido

Seguindo as ideias do segundo procedimento do exercício 103, podemos construir o ponto I_c pois os pontos $< \mathbf{A}, E_a >$ e $< I_b, I_c >$ formam um grupo harmônico e conhecemos as posições dos pontos $< \mathbf{A}, E_a >$ e I_b.

Logo, conhecemos as posições dos quatro pontos $< \mathbf{A}, E_a >$ e $< I_b, I_c >$ (ver a figura 4.89, na página 66) e nos encontramos com um problema já resolvido (ver o exercício 69).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 118) $< \alpha, e_b, r_a >$

Método do problema já resolvido

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\, \mathbf{AB}E_b$. Para tanto, devemos considerar duas possibilidades (ver as figuras 4.90 e 4.91, nas páginas 67 e 68):

i) $\overline{\mathbf{A}I_a}$ é a bissetriz interna conduzida pelo vértice $\mathbf{A}$;

ii) $\overline{\mathbf{A}I_a}$ é a bissetriz externa conduzida pelo vértice $\mathbf{A}$.

Do triângulo do caso i), conhecemos um ângulo (o ângulo α), o lado oposto (ℓ_1) a este ângulo ($\ell_1 = \mathbf{B}E_b = e_b$) e a bissetriz interna (ℓ_2) deste mesmo ângulo ($\ell_2 = \mathbf{A}I_a$). Logo, nos encontramos com os dados do exercício 28, já resolvido.

Observação: o comprimento ℓ_2 é obtido (ver a figura 4.90) colocando-se o ponto I_a na reta $\mathfrak{d}_a$ (bissetriz interna do ângulo α) servindo-se do raio r_a.

Do triângulo do caso ii), conhecemos um ângulo (o ângulo $180° - \alpha$), o lado oposto (ℓ_1) a este ângulo ($\ell_1 = \mathbf{B}E_b = e_b$) e a bissetriz externa (ℓ_2) deste mesmo ângulo ($\ell_2 = \mathbf{A}I_a$). Logo, nos encontramos com os dados do exercício 33.

Observação: o comprimento ℓ_2 é obtido (ver a figura 4.91) como no caso i) acima.

Estes dois casos são mostrados conjuntamente na figura 4.92, onde os detalhes da sua construção são deixados para os exercícios 28 e 33.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{AB'C'}$) soluções.

Um estudo algébrico para este problema também é interessante.

Uma análise da figura 4.92 (ver a página 69) nos mostrará que podemos construir o $\triangle\,\mathbf{A}I_aY_a$ pois $\measuredangle \mathbf{A}Y_aI_a = 90°$, $\measuredangle I_a\mathbf{A}Y_a = \alpha/2$ e $I_aY_a = r_a$. Portanto, $\mathbf{A}Y_a = p$ é conhecido. Então, como $a + b + c = 2p$, escrevemos o seguinte sistema de equações não lineares:

$$b = 2p - (a + c) \tag{4.22}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{4.23}$$

$$e_b^2 = \frac{4}{(a-c)^2}ac(p-a)(p-c) \tag{4.24}$$

Substituindo o valor de b dado por (4.22) em (4.23), resulta:

$$a = \frac{(1+\cos\alpha)c^2 - 2p(1+\cos\alpha)c + 2p^2}{2p - (1+\cos\alpha)c} \tag{4.25}$$

Finalmente, substituindo o valor de a dado por (4.25) em (4.24), desenvolvendo e simplificando, resulta:

$$(1+\cos\alpha)^2c^6 - 4p(1+\cos\alpha)^2c^5 + p^2(7+12\cos\alpha+5\cos^2\alpha)c^4 - 2p^3(3+ \\ +4\cos\alpha+\cos^2\alpha)c^3 + 2p^4(1+\cos\alpha)c^2 = e_b^2\big[(1+\cos\alpha)^2c^4 - 2p(2+3\cos\alpha+ \\ +\cos^2\alpha)c^3 + p^2(6+6\cos\alpha+\cos^2\alpha)c^2 - 2p^3(2+\cos\alpha)c + p^4\big] \tag{†}$$

Ou $g(c) = 0$. Usando a relação

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan^2\tfrac{\alpha}{2} = \frac{r_a^2}{p^2} \quad \text{resulta que} \quad \cos\alpha = \frac{p^2 - r_a^2}{p^2 + r_a^2} \tag{‡}$$

O polinômio $g(c)$ dado por (†) é de grau 6. Então, por resultados mostrados no Apêndice C em [9], ele pode ser fatorado pois pelo menos duas de suas raízes são construtíveis. Usando um programa de computação algébrica (cálculos simbólicos), com $\cos\alpha$ substituído pela relação (‡), obtém-se:

$$g(c) = \frac{1}{(p^2+r_a^2)^2}\Big[(c-p)^2p^2(4c^4p^2 - 8c^3p^3 + 4c^2p^4 + 4c^2p^2r_a^2 - 4c^2p^2e_b^2 + $$
$$+ 4cp^3e_b^2 + 4cpr_a^2e_b^2 - p^4e_b^2 - 2p^2r_a^2e_b^2 - r_a^4e_b^2)\Big]$$

Logo, as raízes que nos interessam têm origem no polinômio $f(c)$ dado por

$$4p^2c^4 - 8p^3c^3 + 4p^2(p^2 + r_a^2 - e_b^2)c^2 + 4p(e_b^2p^2 + e_b^2r_a^2)c - e_b^2(p^4 + 2p^2r_a^2 + r_a^4)$$

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14}$, $e_b = \frac{40}{3}$ cm e $r_a = 2\sqrt{3}$ cm.

Com estes dados obtém-se $p = 10$ e $f(c)$ torna-se

$$9c^4 - 180c^3 - 592c^2 + 17920c - 50176$$

Resolvendo $f(c) = 0$ com algum programa, obtemos três raízes positivas e uma negativa, as quais são mostradas abaixo:

$$c_1 = 8\,\text{cm} \implies a_1 = 5\,\text{cm} \quad b_1 = 7\,\text{cm}$$
$$c_2 = \frac{56}{3} > p = 10 \qquad \text{(solução estranha)}$$
$$c_3 = \frac{2}{3}(-5+\sqrt{109}) \implies a_3 = \frac{40}{327}(109 - 5\sqrt{109})\,\text{cm}$$
$$b_3 = \frac{2}{109}(545 - 3\sqrt{109})\,\text{cm}$$
$$c_4 = \frac{2}{3}(-5-\sqrt{109}) \qquad \text{(solução estranha)}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $<a_1, b_1, c_1>$ e $<a_3, b_3, c_3>$ satisfazem todas as condições do problema.

Observação: vemos em `<http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/curso0506.htm>`, Problema 289, duas soluções. A primeira, de José María Pedret, é bastante diferente da solução acima, enquanto a segunda, de Francisco Javier García Capitán, segue a linha da que foi aqui apresentada.

Exercício 119) $<\alpha, e_b, r_b>$

Método algébrico

Vimos no exercício 92 que $\ell = \mathbf{A}Z_b = p - c = r_b \tan\frac{\alpha}{2}$ e $b = \frac{2\ell(c+\ell)}{2\ell+(1-\cos\alpha)c}$. Assim, escrevemos o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\ell = p - c \implies a = 2\ell - b + c \tag{4.26}$$

$$b = \frac{2\ell(c+\ell)}{2\ell + (1-\cos\alpha)c} \tag{4.27}$$

$$(c-a)^2 e_b^2 = 4ac(p-a)(p-c)$$

$$(c-a)^2 e_b^2 = 4\ell a(\ell + c - a)c \tag{4.28}$$

Como $<\cos\alpha, e_b, r_b>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.26)–(4.28), obtendo assim os três lados $<a, b, c>$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{11}{14} \implies \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $e_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$ e $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm} \implies \ell = 2\,\text{cm}$.

Substituindo estes valores em (4.27) e (4.26), vem:

$$b = \frac{56(c+2)}{3c+56} \tag{4.29}$$

$$a = \frac{3c^2 + 12c + 112}{3c+56} \tag{4.30}$$

Finalmente, substituindo os valores de b e a dados por (4.29) e (4.30) em (4.28), resulta:

$$27c^4 + 108c^3 - 6736c^2 + 39424c - 50176 = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtemos uma raiz negativa e três raízes positivas, as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$c_1 = 8\,\text{cm} \implies b_1 = 7\,\text{cm e } a_1 = 5\,\text{cm}$$

$$c_2 = 6{,}369860\,4\,\text{cm} \implies b_2 = \frac{56(c_2+2)}{3c_2+56} = 6{,}240378\,0\,\text{cm e}$$

$$a_2 = 4 - b_2 + c_2 = 4{,}129482\,3\,\text{cm}$$

$$c_3 = 1{,}807384\,3\,\text{cm} \implies b_3 = 3{,}471280\,5\,\text{cm e } a_3 = 2{,}336103\,8\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os três triângulos cujos lados são $<a_1, b_1, c_1>$, $<a_2, b_2, c_2>$ e $<a_3, b_3, c_3>$ satisfazem todas as condições do problema.

Exercício 120) $<\alpha, e_b, r_c>$

Método do problema já resolvido

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{AB}E_b$. Para tanto, devemos considerar (ver as figuras 4.93 e 4.94, nas páginas 70 e 71, respectivamente) duas possibilidades:

i) $\overline{\mathbf{A}I_c}$ é a bissetriz interna conduzida pelo vértice **A**;

ii) $\overline{\mathbf{A}I_c}$ é a bissetriz externa conduzida pelo vértice **A**.

Do triângulo do caso i), conhecemos um ângulo (o ângulo $180° - \alpha$), o lado oposto a este ângulo ($a = \mathbf{B}E_b = e_b$) e a bissetriz interna deste mesmo ângulo ($d_a = \mathbf{A}I_c$. Notar que obtém-se o comprimento d_a (ver a figura 4.93, na página 70) após desenhar-se o ângulo $180° - \alpha$ e, servindo-se do raio r_c, coloca-se o ponto I_c na reta $\mathfrak{e}_a$). Logo, nos encontramos com o exercício 28, já resolvido em [9].

Do triângulo do caso ii), conhecemos um ângulo (o ângulo α), o lado oposto a este ângulo ($a = \mathbf{B}E_b = e_b$) e a bissetriz externa deste mesmo ângulo ($e_a = \mathbf{A}I_c$. Notar que obtém-se o comprimento e_a (ver a figura 4.94, na página 71) após desenhar-se o ângulo α e, servindo-se do raio r_c, coloca-se o ponto I_c na reta $\mathfrak{e}_a$). Logo, nos encontramos com o exercício 33, já resolvido.

Estes dois casos são mostradas conjuntamente na figura 4.95 (ver a página 72), onde os detalhes da sua construção são deixados para os exercícios 28 e 33.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{AB'C'}$) soluções.

Um estudo algébrico para este problema também é interessante.

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha \tag{4.31}$$

$$\Big[\Big(\frac{b}{c-a}\Big)^2 - 1\Big]ac = e_b^2 \tag{4.32}$$

$$a-b+c = 2\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\,r_c \tag{4.33}$$

Com o sistema (4.31)–(4.33), e com a ajuda de algum programa de álgebra simbólica, podemos mostrar que devemos encontrar as raízes da equação

$$\begin{aligned}(1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)c^8&+(-2e_b^2+4\cos^2\alpha e_b^2-2\cos^4\alpha e_b^2+4\cos\alpha r_c^2-4\cos^2\alpha r_c^2+\\&-4\cos^3\alpha r_c^2+4\cos^4\alpha r_c^2)c^6+(e_b^4-2\cos^2\alpha e_b^4+\cos^4\alpha e_b^4+2e_b^2r_c^2+\\&-4\cos\alpha e_b^2r_c^2-2\cos^2\alpha e_b^2r_c^2+4\cos^3\alpha e_b^2r_c^2+4r_c^4-8\cos\alpha r_c^4+4\cos^2\alpha r_c^4)c^4+\\&+(-2e_b^4r_c^2+2\cos^2\alpha e_b^4r_c^2-4e_b^2r_c^4+4\cos\alpha e_b^2r_c^4)c^2+e_b^4r_c^4=0\end{aligned} \tag{†}$$

Como $<\cos\alpha, e_b, r_c>$ são conhecidos, podemos resolver (†) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (†) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$, $e_b = 6\,\text{cm}$ e $r_c = 1\,\text{cm}$.

A equação (†) torna-se

$$c^8 - 4(19-\sqrt{2})c^6 + 4(366-40\sqrt{2})c^4 - 288(20-\sqrt{2})c^2 + 5184 = 0 \qquad (\S)$$

Resolvendo (§) com algum programa, obtemos duas raízes positivas que interessam e que são mostradas abaixo (com nove algarismos decimais exatos):

$$c_1 = 2{,}100639983\,5\,\text{cm} \implies b_1 = 6{,}554023783\,3\,\text{cm e } a_1 = 5{,}281810924\,6\,\text{cm}$$
$$c_2 = 1{,}169837826\,3\,\text{cm} \implies b_2 = 1{,}288581908\,8\,\text{cm e } a_2 = 0{,}947171207\,3\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $<a_1, b_1, c_1>$ e $<a_2, b_2, c_2>$ satisfazem todas as condições do problema.

Exercício 121) $<\alpha, R, r>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, R, a>$ formam um datum (ver o exercício 2), conhecemos $<\alpha, a, r>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 40).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 122) $<\alpha, R, r_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, R, a>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, a, r_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 42).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 123) $<\alpha, R, r_b>$

Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, R, a>$ formam um datum, conhecemos $<\alpha, a, r_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 43).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 124) $<\alpha, r, r_a>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Ver os exercícios 66 e 103.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 125) $<\alpha, r, r_b>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Podemos resolver este problema de diversas maneiras diferentes. Uma análise da figura 4.96 (ver a página 73) justifica a seguinte construção:

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) construir as bissetrizes interna (reta $\mathfrak{d}_a$) e externa (reta $\mathfrak{e}_a$) do ângulo α;

iii) colocar os pontos I e I_b nas retas $\mathfrak{d}_a$ e $\mathfrak{e}_a$ servindo-se dos raios r e r_b, respectivamente;

iv) construir o arco capaz (círculo ϕ) do ângulo reto sobre o segmento $\overline{II_b}$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi$);

v) se $\mathfrak{d}_b = (I, I_b)$ é a reta definida pelos pontos I e I_b, então $\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{d}_b$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 126) $<\alpha, r_a, r_b>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Podemos resolver este problema de diversas maneiras diferentes. Uma análise da figura 4.97 (ver a página 74) justifica a seguinte construção:

i) construir o ângulo α de vértice $\mathbf{A}$, obtendo as retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$;

ii) construir as bissetrizes interna (reta $\mathfrak{d}_a$) e externa (reta $\mathfrak{e}_a$) do ângulo α;

iii) colocar os pontos I_a e I_b nas retas $\mathfrak{d}_a$ e $\mathfrak{e}_a$ servindo-se dos raios r_a e r_b, respectivamente;

iv) construir o arco capaz (círculo ϕ) do ângulo reto sobre o segmento $\overline{I_a I_b}$ e obter o ponto **B** ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \phi$);

v) se $\mathfrak{e}_c = (I_a, I_b)$ é a reta definida pelos pontos I_a e I_b, então $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{e}_c$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 127) $<\alpha, r_b, r_c>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Este problema fez parte da construção do exercício 69.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 128) $<a, b, c>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 4.98 (ver a página 75) nos mostrará que o ponto **A** possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **B** vale c;

ii) sua distância ao ponto **C** vale b.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.98, na página 75):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{B}, c)$;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{C}, b)$ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \phi_1 \cap \phi_2$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 129) $<a, b, h_a>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $\sin\gamma = \frac{h_a}{b}$, temos dois valores (ver o exercício 21) para o ângulo no vértice **C**: $\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_a}{b}$ e $\gamma_2 = 180° - \gamma_1$. Com isso, conhecemos $<\gamma, a, b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 17).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 4.99 (ver a página 76) nos mostrará que o ponto **A** possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **C** vale b;

ii) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale h_a.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.99, na página 76):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando h_a desta;

iii) traçar o arco $\phi = (\mathbf{C}, b)$ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \phi$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

Exercício 130) $<a, b, h_c>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$, temos dois valores (ver o exercício 21) para o ângulo no vértice **A**: $\alpha_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_c}{b}$ e $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$. Com isso, conhecemos $<\alpha, a, b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 16).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 4.100 (ver a página 77) nos mostrará que o ponto H_c possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{C}$ vale h_c;

ii) um observador colocado em H_c enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo reto (H_c pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.100, na página 77):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir ϕ_1;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{C}, h_c)$ e obter o ponto H_c ($H_c = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, H_c)$ definida pelos pontos $\mathbf{B}$ e H_c;

v) traçar o arco $\phi_3 = (\mathbf{C}, b)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{c} \cap \phi_3$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,H_c\mathbf{CB}$. Uma análise da figura 4.101 (ver a página 78) nos mostrará que o ponto $\mathbf{B}$ possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{C}$ vale a;

ii) pertence à reta $\mathfrak{c}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.101, na página 78):

i) numa reta $\mathfrak{h}_c$ qualquer colocar os pontos H_c e $\mathbf{C}$ tais que $H_c\mathbf{C} = h_c$;

ii) construir a reta $\mathfrak{c}$ ($H_c \in \mathfrak{c}$ e $\mathfrak{c} \perp \mathfrak{h}_c$);

iii) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{C}, a)$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \phi_1$);

iv) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{C}, b)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{c} \cap \phi_2$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

Exercício 131) $< a, b, m_a >$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 4.102 (ver a página 79) nos mostrará que o ponto **A** possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **C** vale b;

ii) sua distância ao ponto M_a vale m_a.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.102, na página 79):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B**, M_a e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$ e $M_a\mathbf{B} = M_a\mathbf{C}$;

ii) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{C}, b)$;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (M_a, m_a)$ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \phi_1 \cap \phi_2$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 132) $< a, b, m_c >$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

Uma análise da figura 4.103 (ver a página 80) nos mostrará que o ponto M_c possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **C** vale m_c;

ii) sua distância ao ponto M_a vale $\frac{b}{2}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.103, na página 80):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B**, M_a e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$ e $M_a\mathbf{B} = M_a\mathbf{C}$;

ii) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{C}, m_c)$;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (M_a, \frac{b}{2})$ e obter o ponto M_c ($M_c = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, M_c)$ definida pelos pontos $\mathbf{B}$ e M_c;

v) obter o ponto $\mathbf{A}$, simétrico de $\mathbf{B}$ em relação a M_c ($\mathbf{A} \in \mathfrak{c}$ e $M_c\mathbf{A} = M_c\mathbf{B}$).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Na reta $\mathfrak{m}_c = (\mathbf{C}, M_c)$ definida pelos pontos $\mathbf{C}$ e M_c da figura 4.103 (ver a página 80) construímos o ponto C' tal que $\mathbf{C}\mathrm{C}' = 2m_c$. Consequentemente, o quadrilátero $\diamondsuit\,\mathrm{C}'\mathbf{BCA}$ é um paralelogramo porque suas diagonais se intersectam nos seus pontos médios. Logo, $\mathbf{B}\mathrm{C}' = b$ e podemos construir o $\triangle\,\mathbf{BC}\mathrm{C}'$ (figura auxiliar) pois os comprimentos dos três lados são conhecidos (ver o exercício 128). Construído o $\triangle\,\mathbf{BC}\mathrm{C}'$, traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ passando pelo ponto C'; traçar também a reta $\mathfrak{b}$ paralela à reta $\mathfrak{b}' = (\mathbf{B}, \mathrm{C}')$ passando pelo ponto $\mathbf{C}$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Terceiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 4.104 (ver a página 81) nos mostrará que o ponto $\mathbf{B}$ possui duas propriedades:

i) pertence ao círculo $\phi_1 = (\mathbf{C}, a)$;

ii) é o simétrico do ponto $\mathbf{A}$ em relação ao ponto M_c. Logo, $\mathbf{B} \in \phi_2'$, onde ϕ_2' é o transformado do círculo $\phi_2 = (\mathbf{C}, b)$ pela simetria de centro M_c.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.104, na página 81):

i) numa reta $\mathfrak{m}_c$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{C}$ e M_c tais que $\mathbf{C}M_c = m_c$;

ii) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{C}, a)$;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{C}, b)$ e construir o arco ϕ_2';

iv) obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \phi_1 \cap \phi_2'$);

v) traçar a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, M_c)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{c}$ e $\mathbf{A} \in \phi_2$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (reparar que os triângulos $\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'B'C}$ são congruentes, isto é, $\triangle\,\mathbf{ABC} \cong \triangle\,\mathbf{A'B'C}$ e neste caso tem-se somente uma solução).

Exercício 133) $<a, b, d_a>$

Método algébrico

Sabemos que

$$bc = \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} + d_a^2$$

Desta equação, tiramos que

$$c^3 + \left(2b - \frac{d_a^2}{b}\right)c^2 + (b^2 - a^2 - 2d_a^2)c - bd_a^2 = 0 \qquad (4.34)$$

Como $<a, b, d_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.34) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.34) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ e $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.34) torna-se

$$c^3 + \frac{62}{9}c^2 - \frac{680}{9}c - \frac{3136}{9} = 0 \qquad (\ddagger)$$

Resolvendo (‡) com algum programa, obtém-se $c = 8\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Discussão: uma análise de (4.34) nos permitirá concluir que esta equação possui no máximo uma raiz positiva. Logo, o problema possui 0 ou 1 solução.

Observação: em [10] mostra-se que

$$0 \leq \frac{2b|b - d_a|}{2b - d_a} < a$$

é uma condição necessária e suficiente para a existência do triângulo.

Exercício 134) $<a, b, d_c>$

Primeiro procedimento – Método algébrico

Sabemos que

$$d_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b} \Longrightarrow \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)d_c}{2ab}$$

Como

$$\cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1,$$

então

$$\cos\gamma = 2\Big[\frac{(a+b)d_c}{2ab}\Big]^2 - 1$$

E com $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, resulta

$$c = \sqrt{(a+b)^2 - \Big(\frac{[(a+b)d_c]}{\sqrt{ab}}\Big)^2}$$

Como $<a, b, d_c>$ são conhecidos, podemos construir o lado c. Assim, conhecemos $<a, b, c>$ e já sabemos como construir o triângulo com estes dados (ver o exercício 128).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Seja $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ a reta definida pelos pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$. Supondo o problema já resolvido (ver a figura 4.105, na página 82), podemos conduzir pelo ponto $\mathbf{A}$ a reta $\mathfrak{d}'_c$ paralela à bissetriz interna $(\mathfrak{d}_c)$ do ângulo γ, obtendo o ponto $\mathcal{P}$ comum a estas duas retas $(\mathcal{P} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{d}'_c)$.

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{AC}\mathcal{P}$ (figura auxiliar). Uma análise da figura 4.105 nos mostrará que

$$\measuredangle\mathbf{AC}D_c = \measuredangle\mathbf{CA}\mathcal{P} \quad \text{como ângulos alternos internos}$$

$$\measuredangle\mathbf{BC}D_c = \measuredangle\mathbf{C}\mathcal{P}\mathbf{A} \quad \text{como ângulos correspondentes}$$

Mas $\measuredangle\mathbf{AC}D_c = \measuredangle\mathbf{BC}D_c = \frac{\gamma}{2}$ porque o segmento $\overline{\mathbf{C}D_c}$ é a bissetriz interna do ângulo γ. Logo, $\measuredangle\mathbf{CA}\mathcal{P} = \measuredangle\mathbf{C}\mathcal{P}\mathbf{A}$ e o $\triangle\,\mathbf{AC}\mathcal{P}$ é um triângulo isósceles. Consequentemente, $\mathbf{AC} = \mathbf{C}\mathcal{P} = b$.

Além disso, os triângulos $\triangle\,\mathbf{BC}D_c$ e $\triangle\,\mathbf{B}\mathcal{P}\mathbf{A}$ são semelhantes. Podemos então escrever

$$\frac{a}{a+b} = \frac{d_c}{\mathbf{A}\mathcal{P}}$$

e o segmento $\mathbf{A}\mathcal{P}$ pode ser construído como a quarta proporcional entre os segmentos a, $a+b$ e d_c.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.105, na página 82):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathcal{P}$ tais que $\mathbf{BC} = a$ e $\mathbf{C}\mathcal{P} = b$;

ii) construir a quarta proporcional (segmento ℓ) entre os segmentos a, $a+b$ e d_c;

iii) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{C}, b)$;

iv) traçar o arco $\phi_2 = (\mathcal{P}, \ell)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \phi_1 \cap \phi_2$).

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

Seja (ver a figura 4.106, na página 83) A′ a imagem da reflexão do ponto $\mathbf{A}$ em torno da bissetriz interna ($\mathfrak{d}_c$) do ângulo γ; e seja $\mathcal{P} \in \mathfrak{a}$ tal que a reta $(D_c, \mathcal{P})$ é paralela à reta $(\mathbf{A}, \mathrm{A}')$.

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\, \mathbf{C}\mathrm{A}'D_c$. Uma análise da figura 4.106 nos mostrará que o ponto D_c possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{C}$ vale d_c;

ii) um observador colocado em D_c enxerga o segmento $\overline{\mathbf{C}\mathcal{P}}$ segundo um ângulo reto (D_c pertence ao arco capaz—ϕ_3—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{C}\mathcal{P}}$).

Devemos portanto conhecer a posição do ponto $\mathcal{P}$. No triângulo $\triangle\, \mathrm{A}'\mathbf{B}D_c$, o segmento $\overline{D_c\mathcal{P}}$ é bissetriz interna e o segmento $\overline{D_c\mathbf{C}}$, bissetriz externa. Assim, pelo teorema das bissetrizes (ver o teorema 2.2 em [9]), concluímos que os pontos $<\mathrm{A}', \mathbf{B}>$ e $<\mathbf{C}, \mathcal{P}>$ formam um grupo harmônico. Como $\mathbf{C}\mathrm{A}' = b$ e $\mathbf{CB} = a$, podemos determinar $\mathcal{P}$.

Já vimos em outros exercícios como achar o quarto ponto de um grupo harmônico dados os outros três. Apresentamos agora mais uma maneira. Seja $\mathbf{C}\mathcal{P} = \ell$. Pelo teorema 2.2 em [9], podemos escrever:

$$\frac{\mathcal{P}\mathbf{B}}{\mathcal{P}\mathrm{A}'} = \frac{\mathbf{CB}}{\mathbf{C}\mathrm{A}'} \Longrightarrow \frac{a-\ell}{\ell-b} = \frac{a}{b} \Longrightarrow \ell = \frac{2ab}{a+b}$$

Vemos então que $\frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ e $\mathbf{C}\mathcal{P}$ é a *média harmônica* dos lados a e b e pode ser construído como mostrado em [8] (segmento paralelo às bases a e b de um trapézio conduzido pelo ponto de interseção das diagonais e delimitado pelas interseções com os lados do trapézio).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.106, na página 83):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e A′ tais que $\mathbf{BC} = a$ e $\mathbf{C}\mathrm{A}' = b$;

ii) construir o comprimento ℓ e traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{C}, \ell)$. Obter o ponto $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P} = \mathfrak{a} \cap \phi_1$);

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{C}, d_c)$;

iv) construir o arco ϕ_3 e obter o ponto D_c ($D_c = \phi_2 \cap \phi_3$);

v) traçar as retas $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, D_c)$, definida pelos pontos $\mathbf{B}$ e D_c, e $\mathfrak{d}_c$, definida pelos pontos $\mathbf{C}$ e D_c (bissetriz interna);

vi) construir a reta $\mathfrak{b}$, imagem da reta $\mathfrak{a}$ pela reflexão em torno da reta $\mathfrak{d}_c$, e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$).

Discussão: o problema possui 1 solução se e somente se

$$0 < d_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \tfrac{\gamma}{2} < \frac{2ab}{a+b}$$

Observação: este procedimento foi reproduzido de [4], o qual se encontra disponível em

`<http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETAMATEMATICA_1959_11_7-8_01.pdf>`

Quarto procedimento – Método da figura auxiliar

Seja (ver a figura 4.107, na página 84) A′ a imagem da reflexão do ponto $\mathbf{A}$ em torno da bissetriz interna ($\mathfrak{d}_c$) do ângulo γ; e seja $\mathcal{P} \in \mathfrak{a}$ tal que a reta $(D_c, \mathcal{P})$ é paralela à reta $(\mathbf{A}, \mathrm{A}')$.

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\, \mathbf{C}\mathcal{P}D_c$. Uma análise da figura 4.107 nos mostrará que o ponto D_c possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{C}$ vale d_c;

ii) um observador colocado em D_c enxerga o segmento $\overline{\mathbf{C}\mathcal{P}}$ segundo um ângulo reto (D_c pertence ao arco capaz—ϕ—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{C}\mathcal{P}}$).

Devemos portanto conhecer a posição do ponto $\mathcal{P}$. Pelo teorema das bissetrizes (ver o teorema 2.2 em [9]), podemos escrever:

$$\frac{\mathbf{B}D_c}{D_c\mathbf{A}} = \frac{a}{b}$$

Além desta, tem-se a seguinte relação (teorema sobre feixe de paralelas):

$$\frac{\mathbf{B}\mathcal{P}}{\mathcal{P}\mathrm{A}'} = \frac{\mathbf{B}D_c}{D_c\mathbf{A}}$$

Assim, pode-se obter o ponto $\mathcal{P}$ pois basta dividir o segmento $\overline{\mathbf{B}\mathrm{A}'}$ em segmentos proporcionais aos lados a e b. E $\mathbf{B}\mathrm{A}' = a - b$.

Tendo obtido o ponto $\mathcal{P}$, seguir os passos da construção do terceiro procedimento.

Quinto procedimento – Método da figura auxiliar

Seja $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ a reta definida pelos pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$. Supondo o problema já resolvido (ver a figura 4.108, na página 85), podemos conduzir pelo ponto D_c a reta $\mathfrak{b}'$ paralela à reta $\mathfrak{b}$, obtendo o ponto $\mathcal{P}$ comum a estas duas retas ($\mathcal{P} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}'$).

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{C}D_c\mathcal{P}$ (figura auxiliar). Uma análise da figura 4.108 nos mostrará que $\measuredangle \mathcal{P}D_c\mathbf{C} = \measuredangle D_c\mathbf{C}\mathbf{A} = \measuredangle D_c\mathbf{C}\mathcal{P} = \gamma/2$. Portanto, o $\triangle\,\mathbf{C}D_c\mathcal{P}$ é um triângulo isósceles e, consequentemente, $D_c\mathcal{P} = \mathbf{C}\mathcal{P}$. Além disso, como será mostrado na continuação,

$$\frac{a+b}{a} = \frac{b}{\mathbf{C}\mathcal{P}} \tag{4.35}$$

e o segmento $\mathbf{C}\mathcal{P}$ pode ser construído como a quarta proporcional entre os segmentos $a+b$, a e b.

Para provar o resultado dado pela equação (4.35), escrevemos:

$$\frac{\mathbf{B}D_c}{D_c\mathbf{A}} = \frac{a}{b} \implies D_c\mathbf{A} = \frac{b}{a}\mathbf{B}D_c$$

$$\frac{\mathbf{B}D_c + D_c\mathbf{A}}{D_c\mathbf{A}} = \frac{a+b}{b} \implies \frac{\mathbf{B}\mathbf{A}}{D_c\mathbf{A}} = \frac{a+b}{b}$$

$$\frac{\mathbf{B}\mathbf{A}}{\mathbf{B}D_c} = \frac{a+b}{a} \implies \frac{\mathbf{B}D_c}{\mathbf{B}\mathbf{A}} = \frac{a}{a+b}$$

Além desta, tem-se a seguinte relação (teorema sobre feixe de paralelas):

$$\frac{\mathbf{B}\mathcal{P}}{\mathbf{B}\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{B}D_c}{\mathbf{B}\mathbf{A}} = \frac{a}{a+b}$$

Portanto, $\frac{\mathbf{B}\mathcal{P}}{a} = \frac{a}{a+b} \Longrightarrow \mathbf{B}\mathcal{P} = \frac{a^2}{a+b}$ e $\mathbf{C}\mathcal{P} = a - \mathbf{B}\mathcal{P} = \frac{ab}{a+b}$ ∎

Daí a construção que segue (ver a figura 4.108, na página 85):

i) numa reta $\mathfrak{d}_c$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{C}$ e D_c tais que $\mathbf{C}D_c = d_c$; construir a quarta proporcional (segmento ℓ) entre os segmentos $a+b$, a e b; traçar os arcos $\phi_1 = (\mathbf{C}, \ell)$ e $\phi_2 = (D_c, \ell)$ e obter o ponto $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P} = \phi_1 \cap \phi_2$);

ii) traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, \mathcal{P})$; traçar o arco $\phi_3 = (\mathbf{C}, a)$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \phi_3$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, D_c)$; traçar a reta $\mathfrak{b}' = (D_c, \mathcal{P})$; traçar a reta $\mathfrak{b}$ ($\mathbf{C} \in \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b} \parallel \mathfrak{b}'$) e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$).

Sexto procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Sejam os círculos $\phi_1 = (\mathbf{C}, b)$ e $\phi_2 = (\mathbf{C}, a)$. Trace uma reta $\mathfrak{d}_c$ qualquer e marque $\mathbf{C}D_c = d_c$ nela. O problema estará resolvido se construirmos uma reta $\mathfrak{c}$ passando por D_c tal que se $\mathfrak{c}$ intersecta ϕ_1 e ϕ_2 em $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente, então $\frac{\mathbf{A}D_c}{D_c\mathbf{B}} = \frac{b}{a}$ (teorema das bissetrizes). Ou seja, $D_c\mathbf{B} = \frac{a}{b}\mathbf{A}D_c$.

Uma análise da figura 4.109 (ver a página 86) nos mostrará que o ponto $\mathbf{B}$ possui duas propriedades:

i) pertence a ϕ_2;

ii) é a imagem de $\mathbf{A}$ pela homotetia inversa de centro D_c e razão $\frac{a}{b}$ ($\mathcal{H}$). Como $\mathbf{A}$ pertence a ϕ_1, então $\mathbf{B}$ pertence ao círculo ϕ_1', transformado de ϕ_1 pela mesma homotetia $\mathcal{H}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.109, na página 86):

i) numa reta $\mathfrak{d}_c$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{C}$ e D_c tais que $\mathbf{C}D_c = d_c$; traçar os círculos $\phi_1 = (\mathbf{C}, b)$ e $\phi_2 = (\mathbf{C}, a)$;

ii) construir os pontos C$'$ e P_3', transformados de $\mathbf{C}$ e P_3 por $\mathcal{H}$; traçar o círculo $\phi_1' = (\mathrm{C}', \mathrm{C}'P_3')$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \phi_2 \cap \phi_1'$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, D_c)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{c} \cap \phi_1$).

Exercício 135) $< a, b, e_a >$

Método algébrico

Sabemos que

$$bc = \frac{a^2bc}{(b-c)^2} - e_a^2$$

Desta equação, tiramos que

$$c^3 + \Big(\frac{e_a^2}{b} - 2b\Big)c^2 + (b^2 - a^2 - 2e_a^2)c + be_a^2 = 0 \tag{4.36}$$

Como $< a, b, e_a >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.36) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.36) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ e $e_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.36) torna-se

$$c^3 + 178c^2 - 2664c + 9408 = 0 \tag{‡}$$

Resolvendo (‡) com algum programa, obtêm-se $c_1 \approx 6{,}121138\,0\,\text{cm}$ e $c_2 = 8\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $< a, b, c_1 >$ e $< a, b, c_2 >$ satisfazem todas as condições do problema.

Discussão: uma análise da equação (4.36) nos permitirá concluir que esta equação possui no máximo duas raízes positivas. Logo, o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 136) $< a, b, e_c >$

Primeiro procedimento – Método algébrico

Sabemos que

$$e_c = \frac{2ab\sin\frac{\gamma}{2}}{|b-a|} \Longrightarrow \sin\tfrac{\gamma}{2} = \frac{|b-a|e_c}{2ab}$$

Como

$$\cos\gamma = 1 - 2\sin^2\tfrac{\gamma}{2},$$

então

$$\cos\gamma = 1 - 2\Big[\frac{(b-a)e_c}{2ab}\Big]^2$$

E com $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, resulta

$$c = \sqrt{(b-a)^2 + \Big(\frac{[(b-a)e_c]}{\sqrt{ab}}\Big)^2}$$

Como $< a, b, e_c >$ são conhecidos, podemos construir o lado c. Assim, conhecemos $< a, b, c >$ e já sabemos como construir o triângulo com estes dados (ver o exercício 128).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Seguindo o mesmo raciocínio feito no segundo procedimento do exercício 134, as figuras 4.110 e 4.111 (ver as páginas 87 e 88, respectivamente) mostram que devemos considerar duas possibilidades: $b > a$ e $a > b$.

Se $b > a$, considere a figura 4.110 e seja $\mathfrak{b} = (\mathbf{A}, \mathbf{C})$ a reta definida pelos pontos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$. Supondo o problema já resolvido, podemos conduzir pelo ponto $\mathbf{B}$ a reta $\mathfrak{e}_c'$ paralela à bissetriz externa ($\mathfrak{e}_c$) do ângulo γ, obtendo o ponto $\mathcal{Q}$ comum a estas duas retas ($\mathcal{Q} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{e}_c'$).

O problema estará resolvido se pudermos construir o triângulo $\triangle\, \mathbf{BC}\mathcal{Q}$ (figura auxiliar). Uma análise da figura 4.110 nos mostrará que o $\triangle\, \mathbf{BC}\mathcal{Q}$ é um triângulo isósceles e que $\mathbf{CB} = \mathbf{C}\mathcal{Q} = a$.

Além disso, os triângulos $\triangle\, \mathbf{A}E_c\mathbf{C}$ e $\triangle\, \mathbf{AB}\mathcal{Q}$ são semelhantes. Podemos então escrever

$$\frac{b}{b-a} = \frac{e_c}{\mathbf{B}\mathcal{Q}}$$

e conhecemos os comprimentos dos três lados do $\triangle\, \mathbf{BC}\mathcal{Q}$.

Se $a > b$, considere a figura 4.111 e seja $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ a reta definida pelos pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$. Supondo o problema já resolvido, podemos conduzir pelo ponto $\mathbf{A}$ a reta $\mathfrak{e}_c'$ paralela à bissetriz externa ($\mathfrak{e}_c$) do ângulo γ, obtendo o ponto $\mathcal{Q}$ comum a estas duas retas ($\mathcal{Q} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{e}_c'$).

O problema estará resolvido se pudermos construir o triângulo $\triangle\, \mathbf{AC}\mathcal{Q}$ (figura auxiliar). Uma análise da figura 4.111 nos mostrará que o $\triangle\, \mathbf{AC}\mathcal{Q}$ é um triângulo isósceles e que $\mathbf{CA} = \mathbf{C}\mathcal{Q} = b$.

Além disso, os triângulos $\triangle\, \mathbf{BC}E_c$ e $\triangle\, \mathbf{B}\mathcal{Q}\mathbf{A}$ são semelhantes. Podemos então escrever

$$\frac{a}{a-b} = \frac{e_c}{\mathbf{A}\mathcal{Q}}$$

e conhecemos os comprimentos dos três lados do $\triangle\, \mathbf{AC}\mathcal{Q}$.

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

Seguimos o mesmo raciocínio feito no terceiro procedimento do exercício 134 e supomos, sem perda de generalidade, $b > a$. Sejam (ver a figura 4.110, na página 87) A' a imagem da reflexão do ponto $\mathbf{A}$ em torno da bissetriz externa ($\mathfrak{e}_c$) do ângulo γ e $\mathcal{P} \in \mathfrak{a}$ tal que a reta $(E_c, \mathcal{P})$ é paralela à reta $(\mathbf{A}, \mathrm{A}')$.

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{C}\mathrm{A}'E_c$. Uma análise da figura 4.110 nos mostrará que o ponto E_c possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{C}$ vale e_c;

ii) um observador colocado em E_c enxerga o segmento $\overline{\mathbf{C}\mathcal{P}}$ segundo um ângulo reto (E_c pertence ao arco capaz—ϕ_3—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{C}\mathcal{P}}$).

Devemos portanto conhecer a posição do ponto $\mathcal{P}$. No triângulo $\triangle\,\mathrm{A}'\mathbf{B}E_c$, o segmento $\overline{E_c\mathcal{P}}$ é bissetriz externa e o segmento $\overline{E_c\mathbf{C}}$, bissetriz interna. Assim, pelo teorema das bissetrizes (ver o teorema 2.2 em [9]), concluímos que os pontos $<\mathrm{A}', \mathbf{B}>$ e $<\mathbf{C}, \mathcal{P}>$ formam um grupo harmônico. Como $\mathbf{C}\mathrm{A}' = b$ e $\mathbf{CB} = a$, podemos determinar $\mathcal{P}$.

Já vimos em outros exercícios como achar o quarto ponto de um grupo harmônico dados os outros três. Apresentamos agora mais uma maneira. Seja $\mathbf{C}\mathcal{P} = \ell$. Pelo teorema das bissetrizes, podemos escrever:

$$\frac{\mathcal{P}\mathbf{B}}{\mathcal{P}\mathrm{A}'} = \frac{\mathbf{CB}}{\mathbf{C}\mathrm{A}'} \Longrightarrow \frac{\ell - a}{\ell + b} = \frac{a}{b} \Longrightarrow \ell = \frac{2ab}{b-a}$$

Vemos então que o segmento $\ell = \mathbf{C}\mathcal{P}$ pode ser construído como a quarta proporcional entre os segmentos $b - a$, $2a$ e b.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.110, na página 87):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e A' tais que $\mathbf{BC} = a$ e $\mathbf{C}\mathrm{A}' = b$;

ii) construir o comprimento ℓ e traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{C}, \ell)$. Obter o ponto $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P} = \mathfrak{a} \cap \phi_1$); traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{C}, e_c)$;

iii) construir o arco ϕ_3 e obter o ponto E_c ($E_c = \phi_2 \cap \phi_3$);

iv) traçar as retas $\mathfrak{c} = (E_c, \mathbf{B})$, definida pelos pontos E_c e $\mathbf{B}$, e $\mathfrak{e}_c = (E_c, \mathbf{C})$, definida pelos pontos E_c e $\mathbf{C}$ (bissetriz externa);

v) construir a reta $\mathfrak{b}$, imagem da reta $\mathfrak{a}$ pela reflexão em torno da reta $\mathfrak{e}_c$, e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$).

Discussão: o problema possui 1 solução se e somente se

$$0 < e_c = \frac{2ab}{b-a} \sin\tfrac{\gamma}{2} < \frac{2ab}{b-a}$$

Quarto procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Sejam os círculos $\phi_1 = (\mathbf{C}, b)$ e $\phi_2 = (\mathbf{C}, a)$. Trace uma reta $\mathfrak{c}_c$ qualquer e marque $\mathbf{C}E_c = e_c$ nela. O problema estará resolvido se construirmos uma reta $\mathfrak{c}$ passando por E_c tal que se $\mathfrak{c}$ intersecta ϕ_1 e ϕ_2 em $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente, então $\frac{\mathbf{A}E_c}{\mathbf{B}E_c} = \frac{b}{a}$ (teorema das bissetrizes). Ou seja, $\mathbf{B}E_c = \frac{a}{b}\mathbf{A}E_c$.

Uma análise da figura 4.112 (ver a página 89) nos mostrará que o ponto $\mathbf{B}$ possui duas propriedades:

i) pertence a ϕ_2;

ii) é a imagem de $\mathbf{A}$ pela homotetia direta de centro E_c e razão $\frac{a}{b}$ $(\mathcal{H})$. Como $\mathbf{A}$ pertence a ϕ_1, então $\mathbf{B}$ pertence ao círculo ϕ_1', transformado de ϕ_1 pela mesma homotetia $\mathcal{H}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.112, na página 89):

i) numa reta $\mathfrak{c}_c$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{C}$ e E_c tais que $\mathbf{C}E_c = e_c$; traçar os círculos $\phi_1 = (\mathbf{C}, b)$ e $\phi_2 = (\mathbf{C}, a)$;

ii) construir os pontos C$'$ e P_3', transformados de $\mathbf{C}$ e P_3 por $\mathcal{H}$; traçar o círculo $\phi_1' = (\mathrm{C}', \mathrm{C}'P_3')$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \phi_2 \cap \phi_1'$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, E_c)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{c} \cap \phi_1$).

Exercício 137) $< a, b, R >$

Método do problema já resolvido

Como $< a, R, \alpha >$ formam um datum, conhecemos $< \alpha, a, b >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 16).

Discussão: o problema possui 0, 1 ($a = 2R$ ou $\alpha = 90°$ e $b < 2R$) ou 2 soluções (o ângulo do vértice $\mathbf{A}$ vale $\alpha = \text{Arcsin}\,\frac{a}{2R}$ ou $180° - \alpha$).

Exercício 138) $< a, b, r >$

Método algébrico

Sabemos que

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde $c = 2p - (a+b)$. Desta equação, tiramos que

$$p^3 - 2(a+b)p^2 + (a^2 + 3ab + b^2 + r^2)p - ab(a+b) = 0 \tag{4.37}$$

Como $<a, b, r>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.37) com um programa qualquer para obter o semiperímetro p e, em seguida, c.

Se a equação (4.37) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ e $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.37) torna-se

$$p^3 - 24p^2 + 182p - 420 = 0 \tag{‡}$$

Resolvendo (‡) com algum programa, obtêm-se $p_1 = 10\,\text{cm}$ e $p_2 = (7 + \sqrt{7})\,\text{cm}$. Portanto, $c_1 = 8\,\text{cm}$ e $c_2 = 2(1+\sqrt{7}) \approx 7{,}291502\,6\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $<a, b, c_1>$ e $<a, b, c_2>$ satisfazem todas as condições do problema.

Exercício 139) $<a, b, r_a>$

Método algébrico

Sabemos que

$$S = (p-a)r_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde $c = 2p - (a+b)$. Desta equação, tiramos que

$$p^3 - (a+2b)p^2 + [(a+b)b + r_a^2]p - ar_a^2 = 0 \tag{4.38}$$

Como $<a, b, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.38) com um programa qualquer para obter o semiperímetro p e, em seguida, c.

Se a equação (4.38) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ e $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.38) torna-se

$$p^3 - 19p^2 + 96p - 60 = 0 \tag{‡}$$

Resolvendo (‡) com algum programa, obtêm-se $p_1 = 10\,\text{cm}$ e $p_2 = \frac{9+\sqrt{57}}{2}\,\text{cm}$. Portanto, $c_1 = 8\,\text{cm}$ e $c_2 = \sqrt{57} - 3 \approx 4{,}549834\,4\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $<a, b, c_1>$ e $<a, b, c_2>$ satisfazem todas as condições do problema.

Exercício 140) $<a, b, r_c>$

Método algébrico

Sabemos que

$$S = (p - c)r_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde $c = 2p - (a + b)$. Desta equação, tiramos que

$$p^3 - (a+b)p^2 + (ab + r_c^2)p - (a+b)r_c^2 = 0 \tag{4.39}$$

Como $<a, b, r_c>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.39) com um programa qualquer para obter o semiperímetro p e, em seguida, c.

Se a equação (4.39) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ e $r_c = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.39) torna-se

$$p^3 - 12p^2 + 110p - 900 = 0 \tag{‡}$$

Resolvendo (‡) com algum programa, obtém-se $p = 10\,\text{cm}$ e as outras duas raízes são complexas. Portanto, $c = 8\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 141) $<a, h_a, h_b>$

Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{BC}H_b$. Uma análise da figura 4.113 (ver a página 90) nos mostrará que o ponto H_b possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **B** vale h_b;

ii) um observador colocado em H_b enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo reto (H_b pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.113, na página 90):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o arco (círculo) ϕ_1;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{B}, h_b)$ e obter o ponto H_b ($H_b = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando h_a desta;

v) traçar a reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, H_b)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

Exercício 142) $\quad < a, h_b, h_c >$

Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir os triângulos $\triangle\,\mathbf{BC}H_b$ e $\triangle\,\mathbf{BC}H_c$. Uma análise da figura 4.114 (ver a página 91) nos mostrará que o ponto H_b (H_c) possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{C}$) vale h_b (h_c);

ii) um observador colocado em H_b (H_c) enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo reto (H_b (H_c) pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.114, na página 91):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o arco (círculo) ϕ_1;

iii) traçar os arcos $\phi_2 = (\mathbf{B}, h_b)$ e $\phi_3 = (\mathbf{C}, h_c)$; obter o pontos H_b ($H_b = \phi_1 \cap \phi_2$) e H_c ($H_c = \phi_1 \cap \phi_3$);

iv) traçar as retas $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, H_b)$ e $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, H_c)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

Exercício 143) $<a, h_a, m_a>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 4.115 (ver a página 92) nos mostrará que o ponto **A** possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto M_a vale m_a;

ii) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale h_a.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.115, na página 92):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B**, M_a e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$ e $M_a\mathbf{B} = M_a\mathbf{C}$;

ii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando h_a desta;

iii) traçar o arco $\phi = (M_a, m_a)$ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \phi$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (notar que o triângulo que seria gerado por $\mathbf{A'}$ é congruente ao triângulo $\triangle\,\mathbf{ABC}$).

Exercício 144) $<a, h_a, m_b>$

Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{BC}M_b$. Uma análise da figura 4.116 (ver a página 93) nos mostrará que o ponto M_b possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **B** vale m_b;

ii) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale $\frac{h_a}{2}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.116, na página 93):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) traçar o arco $\phi = (\mathbf{B}, m_b)$;

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}''$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando $\frac{h_a}{2}$ desta; obter o ponto M_b ($M_b = \mathfrak{a}'' \cap \phi$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando h_a desta;

v) traçar a reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, M_b)$ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

Exercício 145) $< a, h_b, m_a >$

Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{BC}H_b$. Uma análise da figura 4.117 (ver a página 94) nos mostrará que o ponto H_b possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **B** vale h_b;

ii) um observador colocado em H_b enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo reto (H_b pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.117, na página 94):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B**, M_a e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$ e $M_a\mathbf{B} = M_a\mathbf{C}$;

ii) construir o arco (círculo) ϕ_1;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{B}, h_b)$ e obter o ponto H_b ($H_b = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar o arco $\phi_3 = (M_a, m_a)$;

v) traçar a reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, H_b)$ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \phi_3$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

Exercício 146) $< a, h_b, m_b >$

Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{BC}H_b$. Uma análise da figura 4.118 (ver a página 95) nos mostrará que o ponto H_b possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **B** vale h_b;

ii) um observador colocado em H_b enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo reto (H_b pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.118, na página 95):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o círculo (arco) ϕ_1;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{B}, h_b)$ e obter o ponto H_b ($H_b = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, H_b)$; traçar o arco $\phi_3 = (\mathbf{B}, m_b)$ e obter o ponto M_b ($M_b = \mathfrak{b} \cap \phi_3$);

v) traçar o simétrico do ponto $\mathbf{C}$ em relação ao ponto M_b e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{b}$ e $M_b\mathbf{A} = M_b\mathbf{C}$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

Exercício 147) $<a, h_b, m_c>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $<a, h_b, \gamma>$ formam um datum ($\sin\gamma = h_b/a$), podemos construir o(s) ângulo(s) do vértice $\mathbf{C}$ (γ e $180° - \gamma$). Conhecemos então $<\gamma, a, m_c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 25 em [9]).

Na figura 4.119 (ver a página 96), C' é o simétrico do ponto $\mathbf{C}$ em relação a M_c, ou seja, $\mathrm{C}' \in \mathfrak{b}''$ e $\mathbf{C}\mathrm{C}' = 2m_c$. Portanto, o $\triangle\,\mathbf{BC}\mathrm{C}'$ pode ser construído e o quadrilátero $\diamondsuit\,\mathrm{C}'\mathbf{BCA}$ é um paralelogramo.

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{BC}H_b$ e o ponto M_c. Uma análise da figura 4.119 (ver a página 96) nos mostrará que o ponto M_c possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{C}$ vale m_c;

ii) sua distância à reta $\mathfrak{b}$ vale $\frac{h_b}{2}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.119, na página 96):

i) numa reta $\mathfrak{b}$ qualquer colocar o ponto H_b e construir a reta $\mathfrak{h}_b$ ($H_b \in \mathfrak{h}_b$ e $\mathfrak{h}_b \perp \mathfrak{b}$);

ii) traçar o arco $\phi_1 = (H_b, h_b)$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{h}_b \cap \phi_1$);

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{B}, a)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi_2$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{b}'$ paralela à reta $\mathfrak{b}$ e distando $\frac{h_b}{2}$ desta;

v) traçar o arco $\phi_3 = (\mathbf{C}, m_c)$ e obter o ponto M_c ($M_c = \mathfrak{b}' \cap \phi_3$);

vi) traçar a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, M_c)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC'}$) soluções.

Exercício 148) $<a, h_a, d_a>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

Sejam (ver a figura 4.120, na página 97) M e M_a os pontos médios dos segmentos $\overline{D_aE_a}$ e $\overline{\mathbf{BC}}$, respectivamente.

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{A}H_aD_a$ e os pontos E_a e M_a. Como o $\triangle\,\mathbf{A}H_aD_a$ é de fácil construção e os comprimentos $<h_a, d_a, e_a>$ formam um datum, podemos obter o ponto E_a também. Resta somente conhecer a posição do ponto M_a.

Sabemos, pelo teorema 2.2 (ver [9]), que os pontos $<\mathbf{B}, \mathbf{C}>$ e $<D_a, E_a>$ formam um grupo harmônico. Como, pelo teorema 2.3 (ver [9]), $(\mathbf{BC}/2)^2 + (D_aE_a/2)^2 = MM_a^2 = \ell^2$, podemos determinar M_a.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.120, na página 97):

i) colocar o ponto H_a numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer; traçar a reta $\mathfrak{h}_a$ ($H_a \in \mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{h}_a \perp \mathfrak{a}$); construir os pontos $\mathbf{A}$ e D_a, obtendo-se o $\triangle\,\mathbf{A}H_aD_a$;

ii) construir a reta $\mathfrak{e}_a$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{e}_a$ e $\mathfrak{e}_a \perp \mathfrak{d}_a = (\mathbf{A}, D_a)$); obter os pontos E_a ($E_a = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{e}_a$) e M ($MD_a = ME_a$);

iii) construir o comprimento ℓ tal que $\ell^2 = (\frac{a}{2})^2 + MD_a^2$ (hipotenusa $\overline{MP}$ do $\triangle\,MD_aP$); traçar o arco $\phi_1 = (M, \ell)$ e obter o ponto M_a ($M_a = \mathfrak{a} \cap \phi_1$);

iv) traçar o círculo $\phi_2 = (M_a, \frac{a}{2})$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \phi_2$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \phi_2$).

Observação: sejam $\ell_1 = D_a D$ e $\ell_2 = E_a E$. A construção acima permite que se obtenham os seguintes resultados:

$$\ell_1\left(\ell_1 + \frac{d_a^3}{d_a^2 - h_a^2}\right) = \left(\frac{a d_a}{2\sqrt{d_a^2 - h_a^2}}\right)^2 \tag{4.40}$$

$$\ell_2\left(\ell_2 - \frac{d_a^3}{2h_a\sqrt{d_a^2 - h_a^2}}\right) = \left(\frac{a d_a}{2h_a}\right)^2 \tag{4.41}$$

E o raio do círculo circunscrito é

$$R = \frac{d_a^4 - 2d_a^2 h_a^2 + d_a^2\sqrt{a^2(d_a^2 - h_a^2) + d_a^4}}{4h_a(d_a^2 - h_a^2)} \tag{4.42}$$

Vamos provar o resultado dado por (4.40), deixando os dados por (4.41) e (4.42) para o leitor.

Colocando-se o ponto H_a na origem de um sistema de coordenadas retangulares e repetindo-se a construção acima, obtêm-se os seguintes pontos com suas respectivas coordenadas:

$$H_a = (0,0) \quad \mathbf{A} = (0, h_a) \quad D_a = \left(\sqrt{d_a^2 - h_a^2}, 0\right) \quad E_a = \left(\frac{-h_a^2}{\sqrt{d_a^2 - h_a^2}}, 0\right)$$

$$M = \left(\frac{d_a^2 - 2h_a^2}{2\sqrt{d_a^2 - h_a^2}}, 0\right) \quad M_a = \left(\frac{d_a^2 - 2h_a^2 + \sqrt{a^2(d_a^2 - h_a^2) + d_a^4}}{2\sqrt{d_a^2 - h_a^2}}, 0\right)$$

$$D = \left(\frac{d_a^2 - 2h_a^2 + \sqrt{a^2(d_a^2 - h_a^2) + d_a^4}}{2\sqrt{d_a^2 - h_a^2}}, \frac{h_a d_a^2 - h_a\sqrt{a^2(d_a^2 - h_a^2) + d_a^4}}{2(d_a^2 - h_a^2)}\right)$$

$$E = \left(\frac{d_a^2 - 2h_a^2 + \sqrt{a^2(d_a^2 - h_a^2) + d_a^4}}{2\sqrt{d_a^2 - h_a^2}}, \frac{d_a^2 + \sqrt{a^2(d_a^2 - h_a^2) + d_a^4}}{2h_a}\right)$$

$$O = \left(\frac{d_a^2 - 2h_a^2 + a\ell_3}{2\sqrt{d_a^2 - h_a^2}}, \frac{d_a^4 + (d_a^2 - 2h_a^2)a\ell_3}{4h_a(d_a^2 - h_a^2)}\right)$$

onde $\ell_3 = \sqrt{d_a^2 - h_a^2 + (d_a^2/a)^2}$. Como $\ell_1^2 = D_a M_a^2 + M_a D^2$, vem:

$$\ell_1 = \frac{d_a\left(\sqrt{a^2(d_a^2 - h_a^2) + d_a^4} - d_a^2\right)}{2(d_a^2 - h_a^2)}$$

$$2(d_a^2 - h_a^2)\ell_1 + d_a^3 = d_a\sqrt{a^2(d_a^2 - h_a^2) + d_a^4}$$

$$4(d_a^2 - h_a^2)^2\ell_1^2 + 4(d_a^2 - h_a^2)d_a^3\ell_1 + d_a^6 = d_a^2\left[a^2(d_a^2 - h_a^2) + d_a^4\right]$$

$$\ell_1^2 + \frac{d_a^3}{d_a^2 - h_a^2}\ell_1 = \left(\frac{a d_a}{2\sqrt{d_a^2 - h_a^2}}\right)^2 \qquad \blacksquare$$

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Com o teorema 2.14 (ver [9]) e a figura 4.121 (ver a página 98) constatamos que o problema estará resolvido se construirmos o $\triangle \mathbf{BC}B_2$ (figura auxiliar) e o ângulo $\delta = \beta - \gamma = 2\measuredangle H_a\mathbf{A}D_a$. Uma análise da figura 4.121 nos mostrará que o ponto $\mathbf{A}$ possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ vale h_a;

ii) um observador colocado em $\mathbf{A}$ enxerga o segmento $\overline{\mathbf{C}B_2}$ segundo o ângulo $180°-\delta$ ($\mathbf{A}$ pertence ao arco capaz—ϕ_2—do ângulo $180° - \delta$ sobre o segmento $\overline{\mathbf{C}B_2}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.121, na página 98):

i) construir o $\triangle H_a\mathbf{A}D_a$ (construção auxiliar), obtendo o ângulo $\angle H_a\mathbf{A}D_a$;

ii) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando h_a desta;

iv) conduzir por $\mathbf{B}$ a reta $\mathfrak{r}$ perpendicular à reta $\mathfrak{a}$;

iv) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{B}, 2h_a)$ e obter o ponto B_2 ($B_2 = \mathfrak{r} \cap \phi_1$);

v) construir o arco ϕ_2 e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \phi_2$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Observação: o primeiro procedimento pode ser encontrado em [11], enquanto o segundo aparece em [1] e em [6].

Exercício 149) $< a, h_a, d_b >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\cos\tfrac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} \tag{4.43}$$

$$h_a = c\sin\beta \Longrightarrow \sin\beta = \frac{h_a}{c} \tag{4.44}$$

$$d_b = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c} \tag{4.45}$$

Com as equações (4.43) e (4.44) obtêm-se

$$\cos\tfrac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{c \pm \sqrt{c^2 - h_a^2}}{2c}} \tag{4.46}$$

Substituindo o (os) valor de $\cos\frac{\beta}{2}$ dado por (4.46) em (4.45), resulta

$$c^4 + \frac{4a(d_b^2 - 2a^2)}{d_b^2 - 4a^2}c^3 + \frac{6d_b^4a^2 - 4d_b^2a^4 + 4h_a^2a^4}{(d_b^2 - 4a^2)d_b^2}c^2 + \frac{4d_b^2a^3}{d_b^2 - 4a^2}c + \frac{d_b^2a^4}{d_b^2 - 4a^2} = 0 \tag{4.47}$$

Como $<a, h_a, d_b>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.47) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.47) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $h_a = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$ e $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.47) torna-se

$$c^4 + \frac{730}{121}c^3 - \frac{10115{,}25}{121}c^2 - \frac{24000}{121}c - \frac{30000}{121} = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtém-se $c = 8\,\text{cm}$ (única raiz positiva). Como $\cos\beta = \pm\frac{1}{2}$ e $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, obtêm-se (com seis algarismos decimais exatos):

$$b_1 = 7\,\text{cm}$$
$$b_2 = \sqrt{129} \approx 11{,}357816\,7\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b_1, c>$ satisfaz todas as condições do problema e que $<a, b_2, c>$ é uma solução estranha.

Observação: o problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\mathbf{BC}D_b$. Uma análise da figura 4.122 (ver a página 99) nos mostrará que o ponto D_b possui duas propriedades:

i) pertence à circunferência $\phi_1 = (\mathbf{B}, d_b)$;

ii) pertence à curva (cônica) ϕ_2 dada por

$$h_ax^2 + 2axy + h_ay^2 - 2ah_ax = 0 \tag{4.48}$$

A equação (4.48) representa o lugar geométrico descrito por D_b quando o ponto livre A' percorre a reta $\mathfrak{a}'$, lugar geométrico dos pontos cuja distância à reta que contém os pontos **B** e **C** (reta $\mathfrak{a}$) vale h_a.

Para provar o resultado dado por (4.48), coloquemos o ponto **B** na origem de um sistema de coordenadas retangulares e seja A' um ponto percorrendo a reta $\mathfrak{a}'$ (ver a figura 4.122). Assim, as coordenadas dos pontos **B** e A' são $\mathbf{B} = (0, 0)$ e $\mathrm{A}' = (x_{\mathrm{A}'}, h_a)$. E como $\mathbf{BC} = a$, o ponto **C** tem como coordenadas $\mathbf{C} = (a, 0)$. Então a equação da reta $\mathfrak{u} = (\mathbf{B}, \mathrm{A}')$ é $y = \frac{h_a}{x_{\mathrm{A}'}} x = m_{\mathfrak{u}} x$ ou $-m_{\mathfrak{u}} x + y = 0$. E a da reta $\mathfrak{v} = (\mathbf{C}, \mathrm{A}')$ é

$$y = -\frac{h_a}{a - x_{\mathrm{A}'}}(x - a)$$
$$x_{\mathrm{A}'} = \frac{h_a(x - a) + ay}{y} \tag{4.49}$$

A equação das bissetrizes (ver [2] ou [7], por exemplo) das retas $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{u}$ (bissetrizes interna e externa que partem do vértice **B**) é

$$\pm y = \frac{-m_{\mathfrak{u}} x + y}{\sqrt{m_{\mathfrak{u}}^2 + 1}}$$
$$(y^2 - x^2) m_{\mathfrak{u}} = -2xy$$
$$(y^2 - x^2)\frac{h_a}{x_{\mathrm{A}'}} = -2xy \tag{4.50}$$

Substituindo o valor de $x_{\mathrm{A}'}$ dado por (4.49) em (4.50), vem:

$$h_a x^2 + 2axy + h_a y^2 - 2ah_a x = 0 \qquad \blacksquare$$

A cônica dada por (4.48) será uma hipérbole se $a > h_a$, uma parábola se $a = h_a$ e uma elipse se $a < h_a$.

A figura 4.122 (ver a página 99) é a solução geométrica dada pela equação (†).

Exercício 150) $< a, h_b, d_a >$

Método do problema já resolvido

Como $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \mathrm{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 180° - \gamma_1$$

Conhecemos então $< \gamma, a, d_a >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 31).

Vimos quando da resolução do exercício 31 que devemos resolver a equação

$$\begin{aligned} c^6 - 2b\cos\alpha c^5 + \frac{b^2 - b^2\cos^2\alpha - d_b^2}{1-\cos^2\alpha}c^4 + \frac{2bd_b^2\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c^3 + \\ + \frac{d_b^2(d_b^2\cos^2\alpha - b^2)}{1-\cos^2\alpha}c^2 - \frac{bd_b^4\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c + \frac{b^2d_b^4}{4(1-\cos^2\alpha)} = 0 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Com $\gamma = \gamma_1$, a equação (4.51) aplicada com os dados acima torna-se

$$\begin{aligned} b^6 - 2a\cos\gamma_1 b^5 + \frac{a^2 - a^2\cos^2\gamma_1 - d_a^2}{1-\cos^2\gamma_1}b^4 + \frac{2ad_a^2\cos\gamma_1}{1-\cos^2\gamma_1}b^3 + \\ + \frac{d_a^2(d_a^2\cos^2\gamma_1 - a^2)}{1-\cos^2\gamma_1}b^2 - \frac{ad_a^4\cos\gamma_1}{1-\cos^2\gamma_1}b + \frac{a^2d_a^4}{4(1-\cos^2\gamma_1)} = 0 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Como $<\cos\gamma_1\ (\cos\gamma_1 = \frac{\sqrt{a^2-h_b^2}}{a}), a, d_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.52) com um programa qualquer para obter b.

Com $\gamma = \gamma_2$, a equação (4.51) aplicada com os dados acima torna-se

$$\begin{aligned} b^6 - 2a\cos\gamma_2 b^5 + \frac{a^2 - a^2\cos^2\gamma_2 - d_a^2}{1-\cos^2\gamma_2}b^4 + \frac{2ad_a^2\cos\gamma_2}{1-\cos^2\gamma_2}b^3 + \\ + \frac{d_a^2(d_a^2\cos^2\gamma_2 - a^2)}{1-\cos^2\gamma_2}b^2 - \frac{ad_a^4\cos\gamma_2}{1-\cos^2\gamma_2}b + \frac{a^2d_a^4}{4(1-\cos^2\gamma_2)} = 0 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Como $<\cos\gamma_2\ (\cos\gamma_2 = -\frac{\sqrt{a^2-h_b^2}}{a}), a, d_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.53) com um programa qualquer para obter b. Entretanto, como os coeficientes de b^5, b^3 e b em (4.52) e (4.53) são simétricos (pois $\cos\gamma_1 = -\cos\gamma_2$) e os de b^6, b^4, b^2 e b^0 (o termo independente) são iguais, as raízes de (4.52) e (4.53) são simétricas. Logo, não precisamos calcular as raízes de (4.53).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $h_b = \frac{20\sqrt{3}}{7}$ cm e $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}$ cm.

Com estes valores, tem-se $\cos\gamma_1 = \frac{1}{7}$ e a equação (4.52) torna-se

$$b^6 - \frac{10}{7}b^5 - \frac{6273}{243}b^4 + \frac{17640}{243}b^3 - \frac{296156}{243}b^2 - \frac{439040}{243}b + \frac{3841600}{243} = 0 \tag{$\dagger$}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se duas raízes positivas e duas raízes negativas (raízes positivas de (4.53)). Seus valores, com seis algarismos decimais exatos, são:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \quad 7\,\text{cm} \implies c_1 = \sqrt{5 + b_1^2 - \frac{10}{7}b_1} = 8\,\text{cm}\\
b_2 &= \quad 2{,}963542\,8\,\text{cm} \implies c_2 = 5{,}435894\,9\,\text{cm}\\
b_3' &= -3{,}785304\,6\,\text{cm} \implies b_3 = -b_3' \text{ e } c_3 = \sqrt{25 + b_3^2 + \frac{10}{7}b_3} \approx 6{,}689\,\text{cm}\\
b_4' &= -6{,}430429\,9\,\text{cm} \implies b_4 = -b_4' \text{ e } c_4 = 8{,}691188\,5\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $< a, b_1, c_1 >$ e $< a, b_4, c_4 >$ satisfazem todas as condições do problema e que $< a, b_2, c_2 >$ e $< a, b_3, c_3 >$ são soluções estranhas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] N. Altshiller-Court. *College Geometry.* Barnes & Noble, New York, 1952.

[2] R. W. Brink. *Analytic Geometry.* D. Appleton-Century Company, 1935.

[3] H. G. Calfa; L. A. de Almeida e R. C. Barbosa. *Desenho Geométrico Plano*, volume 2, Tomo I of *Coleção Marechal Trompowski.* Biblioteca do Exército Editora, 1995.

[4] E. G.-Rodeja Fernández. Sobre las bisectrices de un triángulo. *Gaceta Matemática*, 11(7-8):185–187, 1959.

[5] J. Hadamard. *Leçons de Géométrie*, volume I of *Géométrie plane.* Éditions Jacques Gabay, Paris, 1988.

[6] K. Herterich. *Die Konstruktion von Dreiecken.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1986.

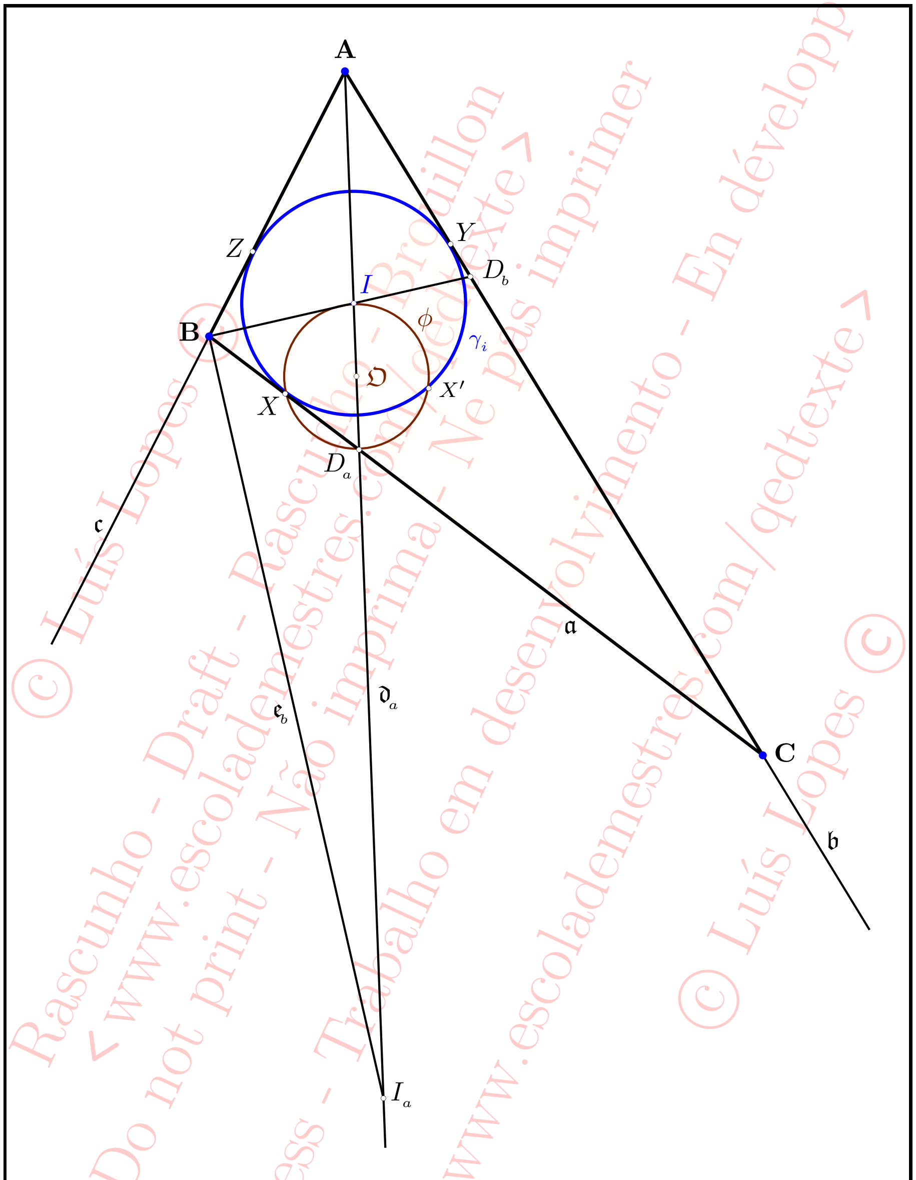
[7] E. L. Lima. *Coordenadas no Plano.* IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1993.

[8] L. Lopes. *Manual de Progressões.* Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1998.

[9] L. Lopes. *Manual de Construção de Triângulos*, volume 1. A ser publicado, Rio de Janeiro, 2015.

[10] V. Oxman and M. Bataille. Problem 3299. *Crux Mathematicorum*, 34(8):501–503, 2008.

[11] W. H. Rasche and B. Hoffmann. Problem 3558. *The American Mathematical Monthly*, 40(4):249, 1933.



Triângulo dados $<\alpha, d_a, r>$

Figura 4.84: Exercício 103 — Primeiro procedimento.

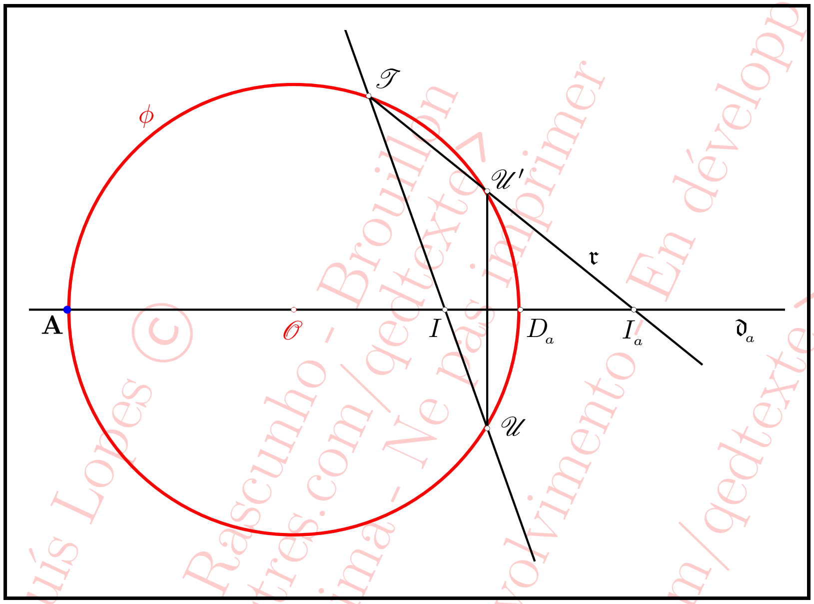
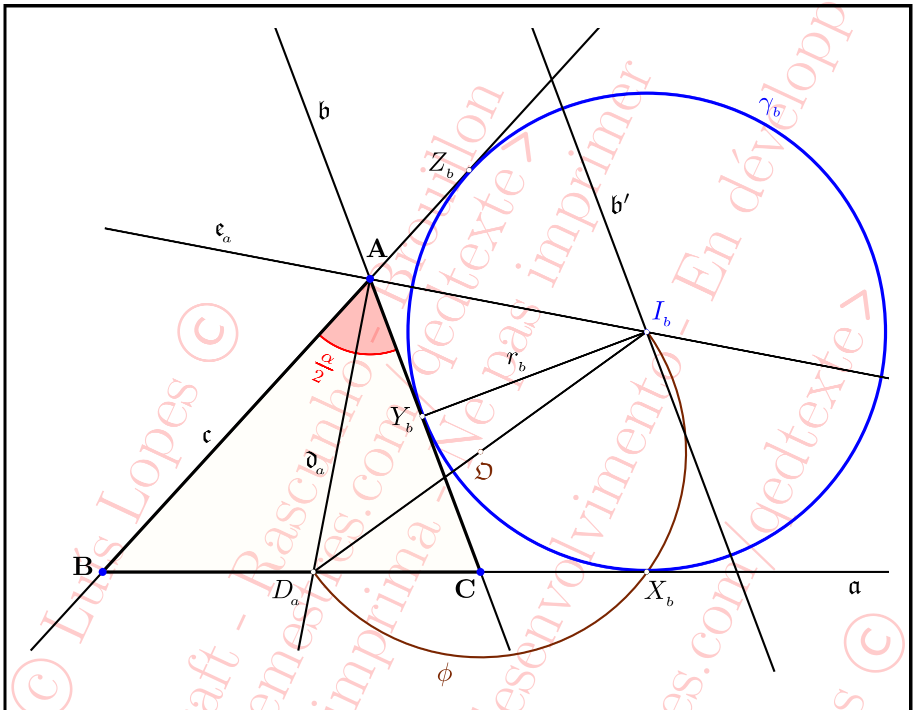


Figura 4.85: Quatro pontos formando uma divisão harmônica.



Triângulo dados <α, d_a, r_b>

Figura 4.86: Exercício 106.

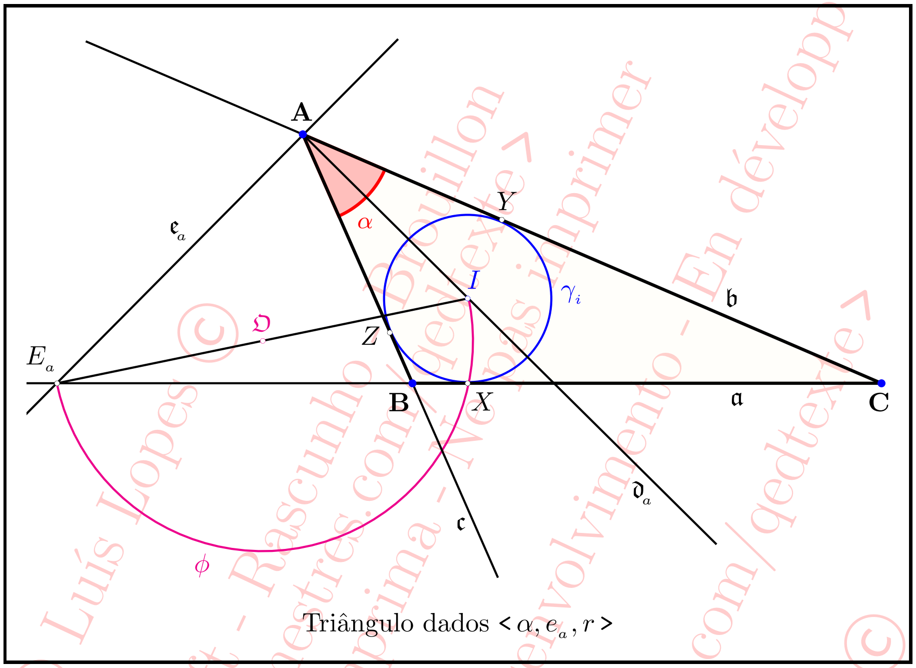


Figura 4.87: Exercício 114.

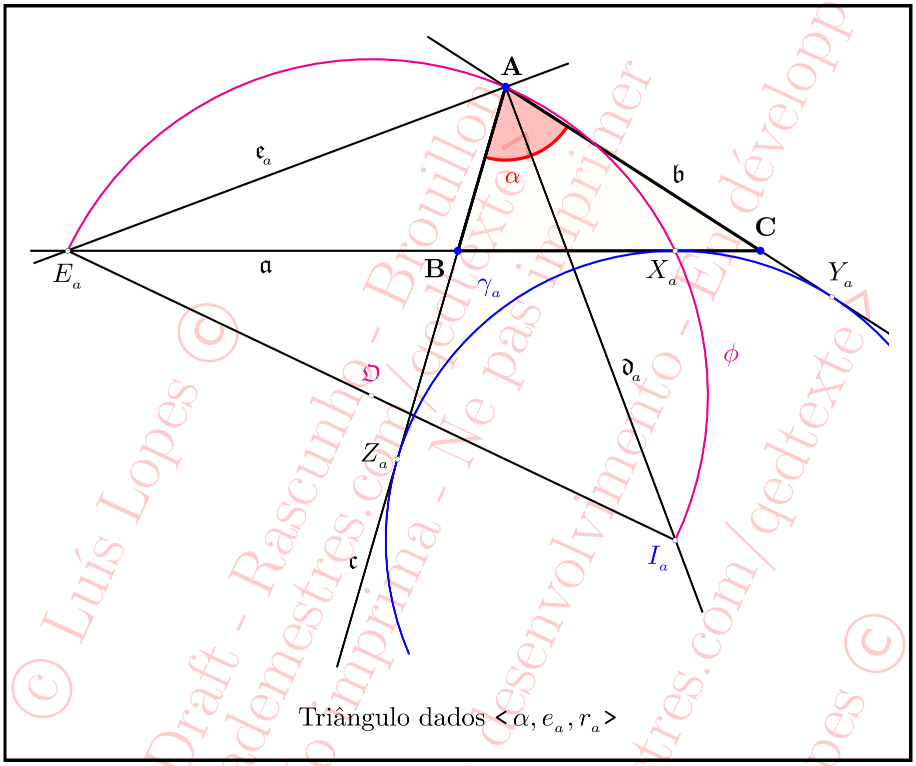
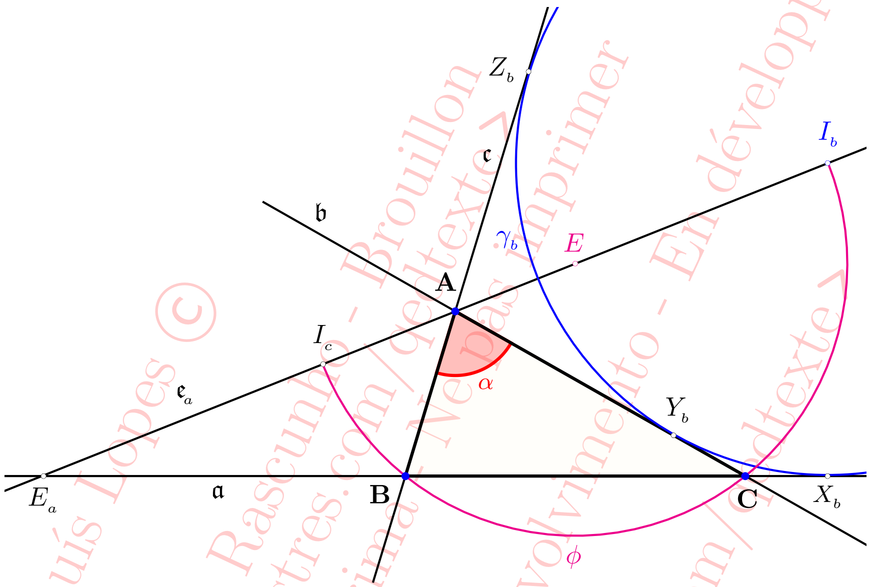
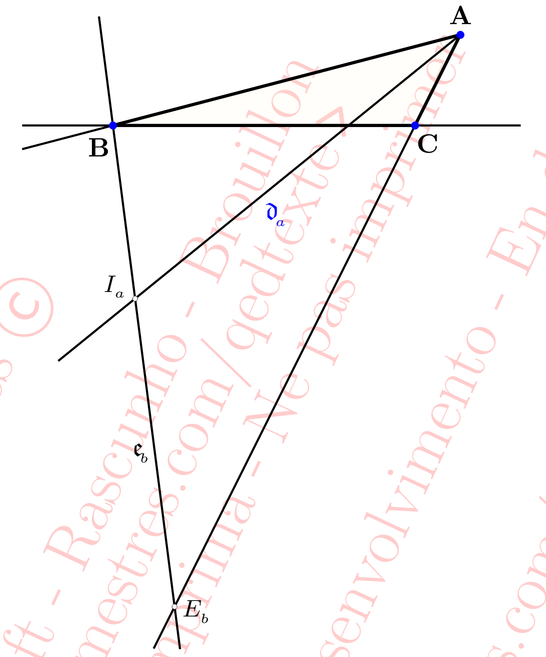


Figura 4.88: Exercício 116.



Triângulo dados $<\alpha, e_a, r_b>$

Figura 4.89: Exercício 117.



Triângulo dados <α, e_b, r_a>
Caso i)

Figura 4.90: $\overline{\mathbf{A}I_a}$ é bissetriz interna.

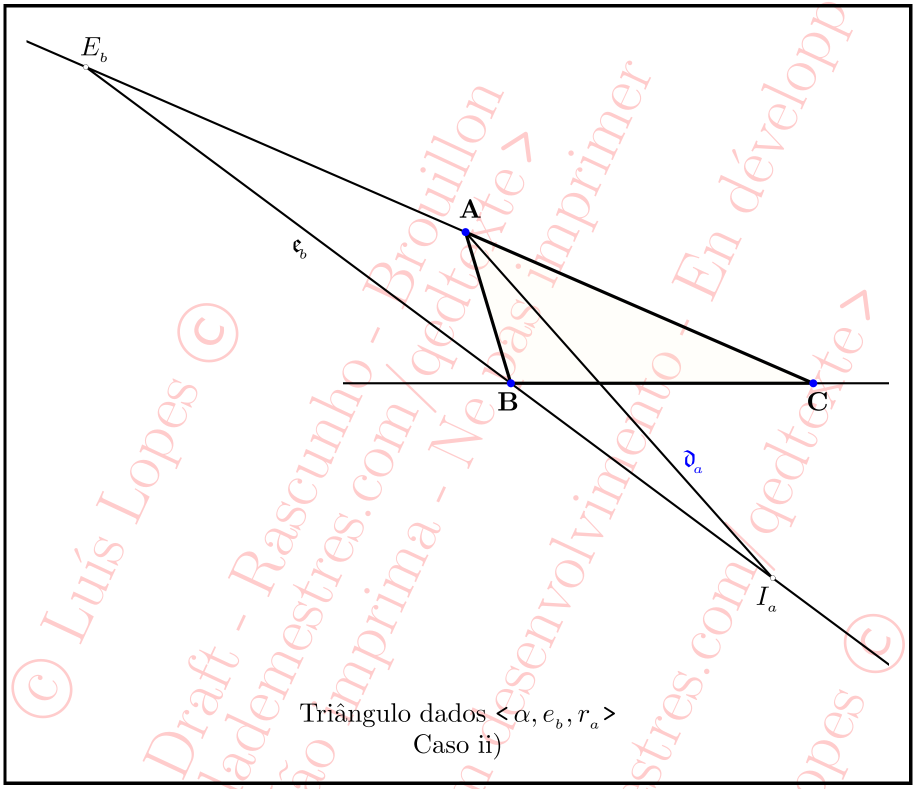
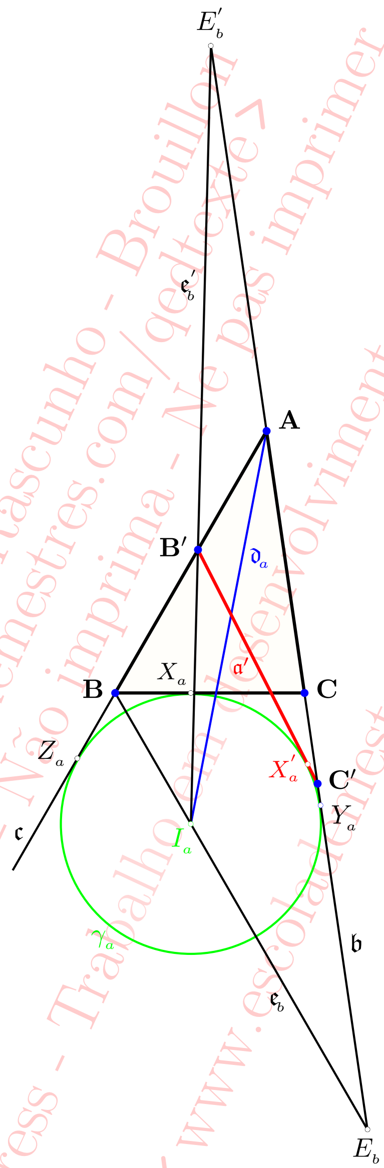


Figura 4.91: $\overline{\mathbf{A}I_a}$ é bissetriz externa.



Triângulo dados $<\alpha, e_b, r_a>$

Figura 4.92: Exercício 118.

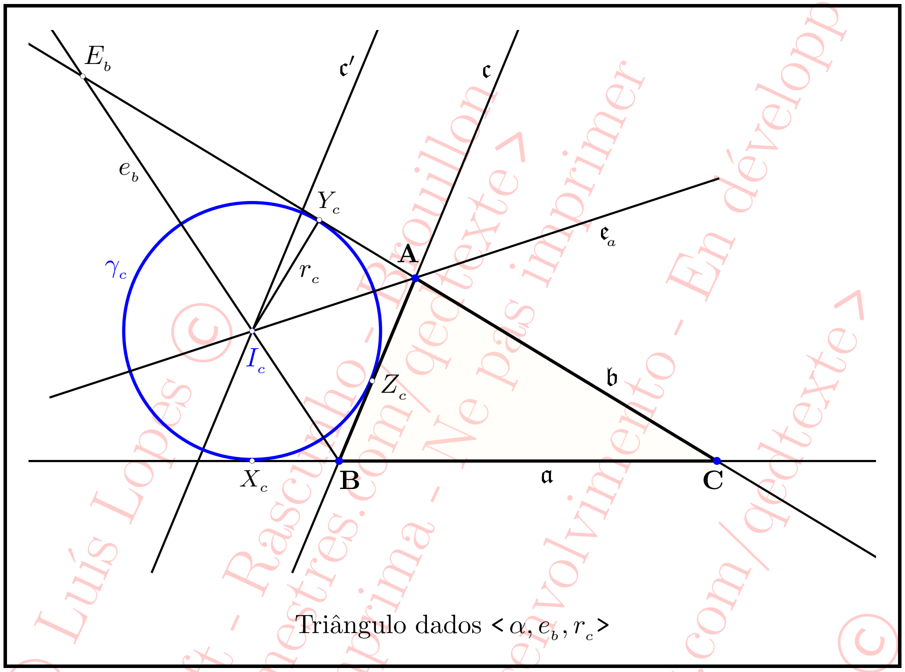


Figura 4.93: $\overline{\mathbf{A}I_c}$ é bissetriz interna.

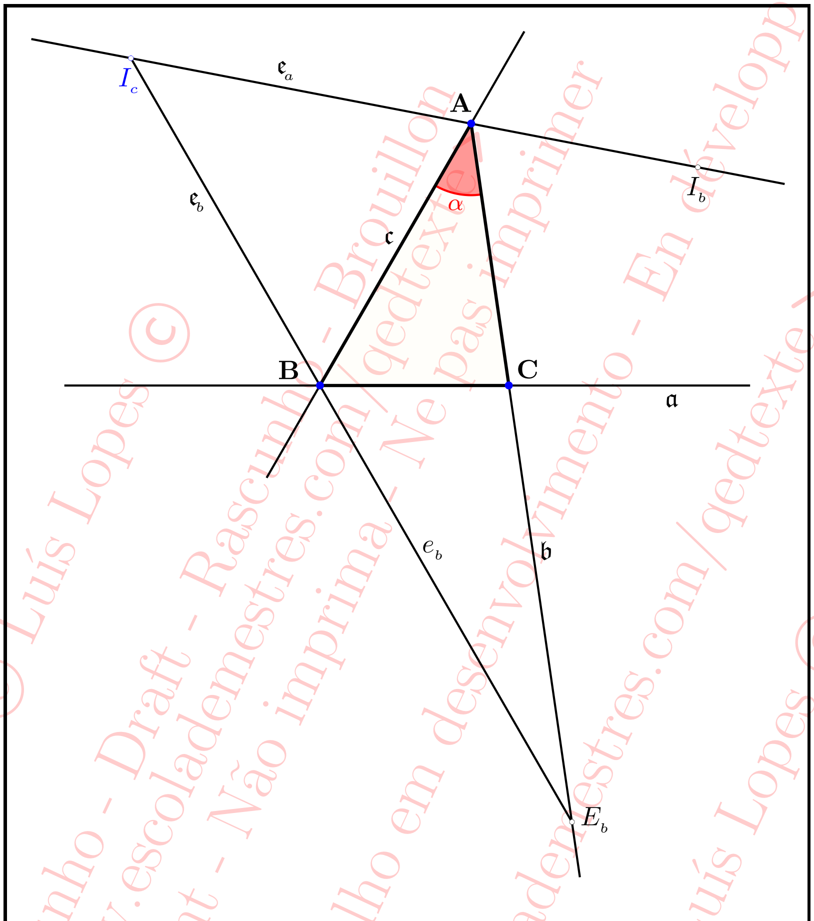


Figura 4.94: $\overline{\mathbf{A}I_c}$ é bissetriz externa.

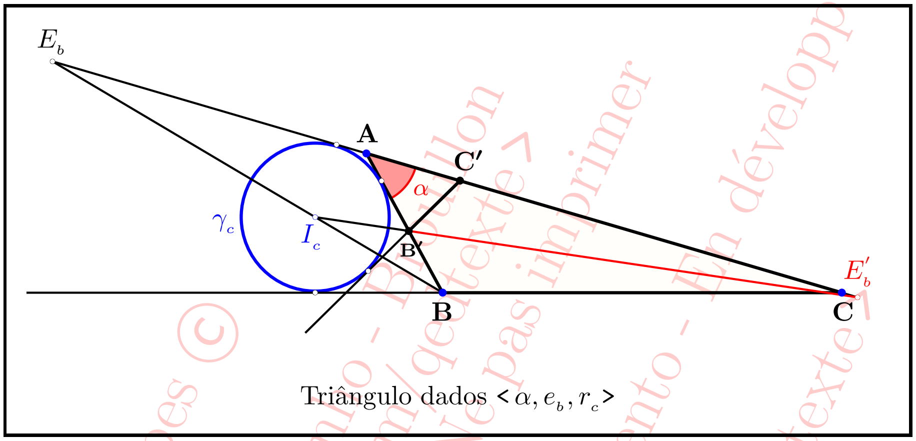


Figura 4.95: Exercício 120.

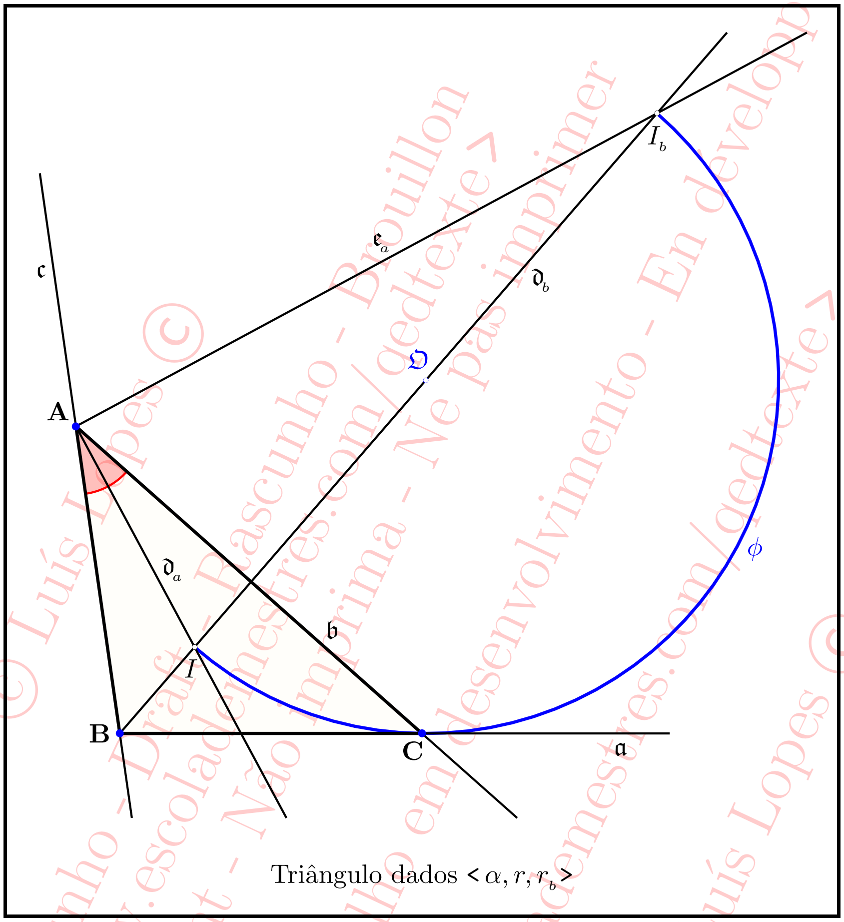


Figura 4.96: Exercício 125.

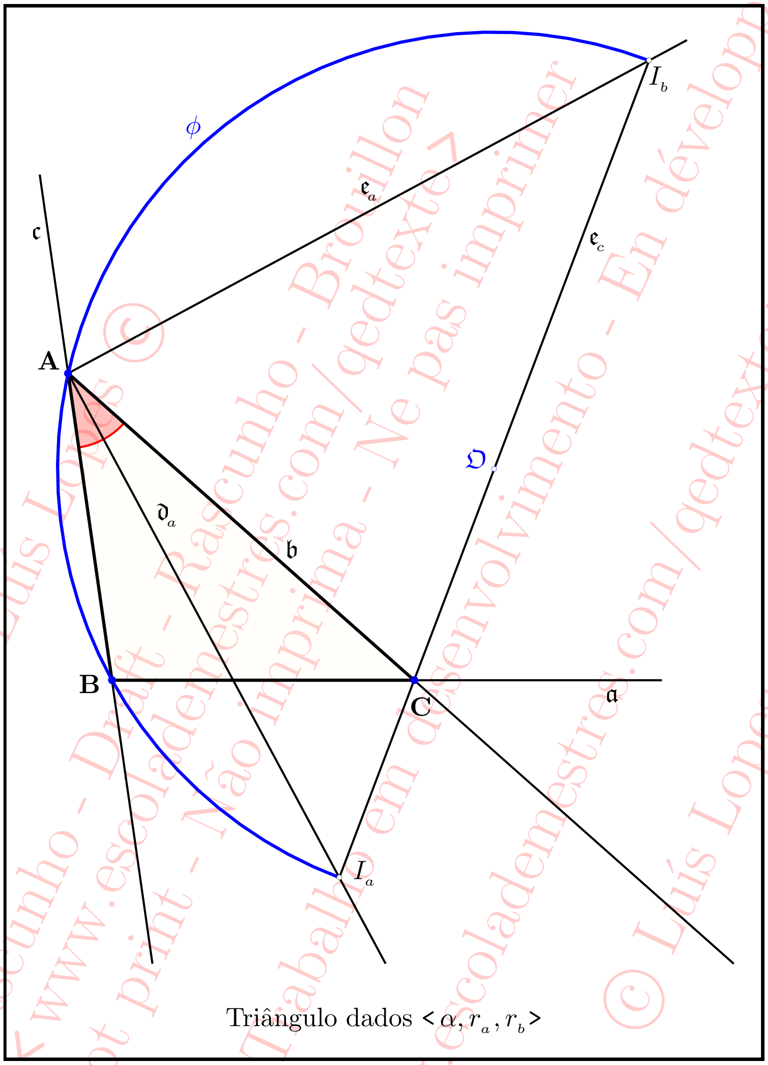


Figura 4.97: Exercício 126.

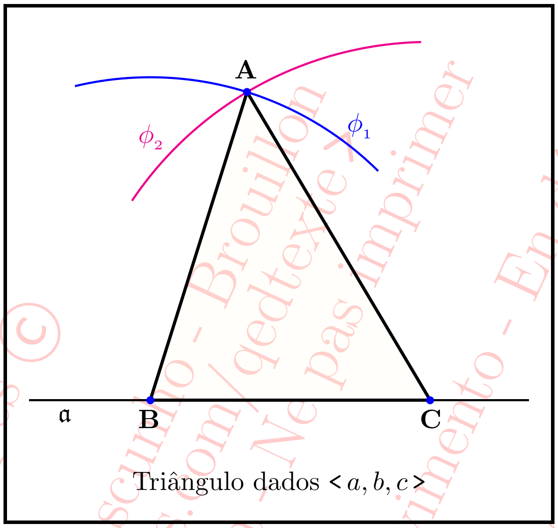


Figura 4.98: Exercício 128.

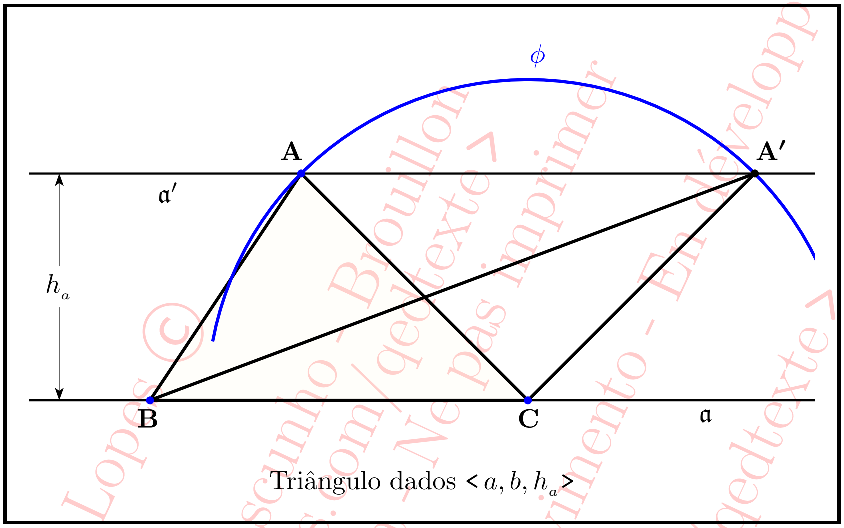


Figura 4.99: Exercício 129.

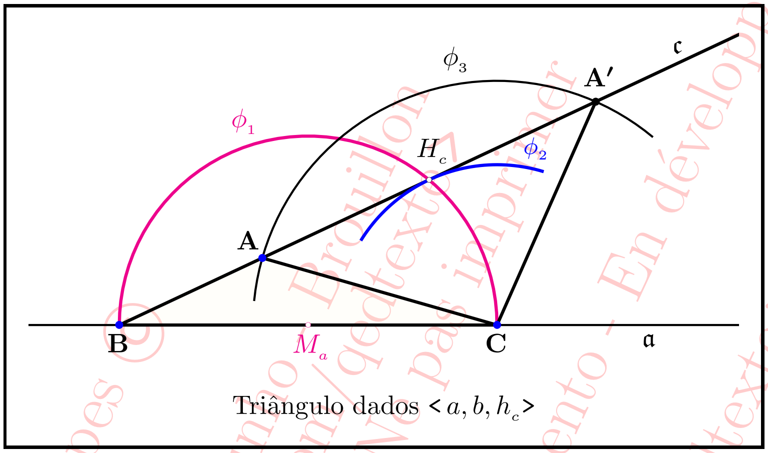
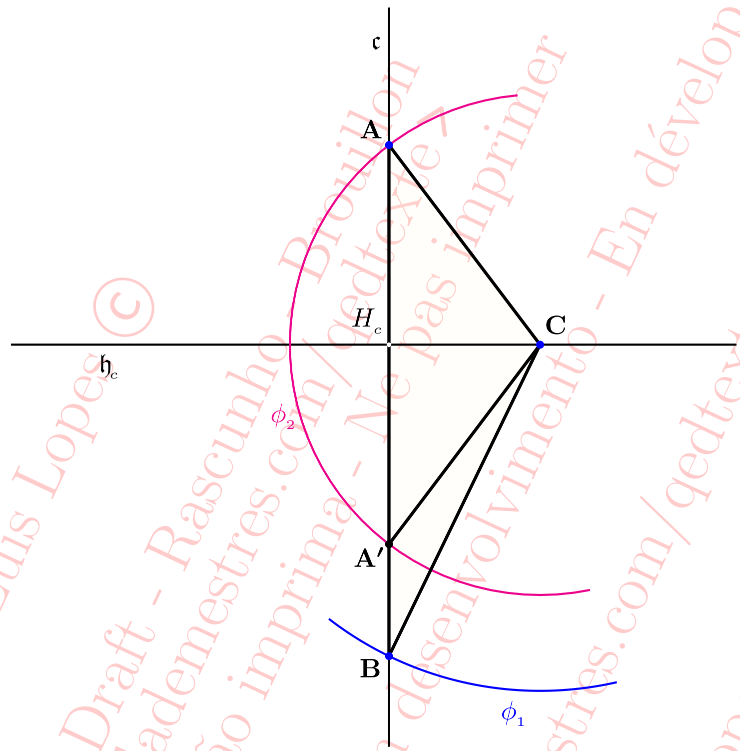


Figura 4.100: Exercício 130.



Triângulo dados < a, b, h_c >

Figura 4.101: Exercício 130.

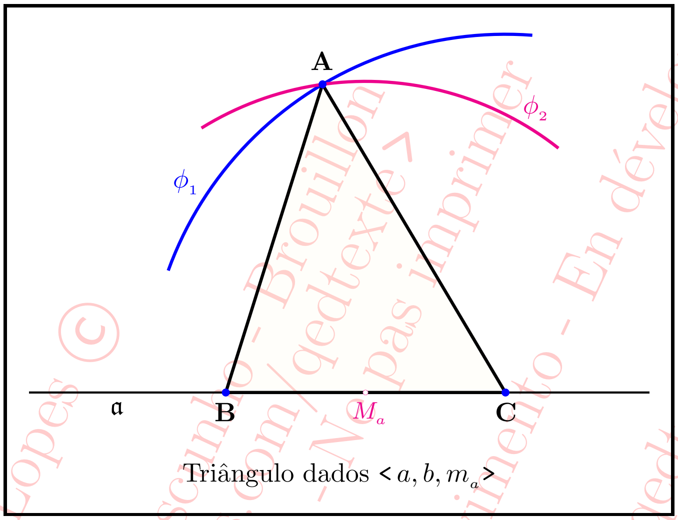
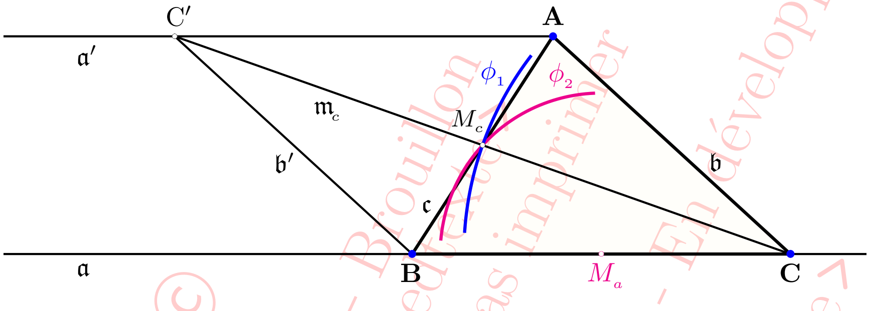


Figura 4.102: Exercício 131.



Triângulo dados < a, b, m_c >

Figura 4.103: Exercício 132 — Primeiro e segundo procedimentos.

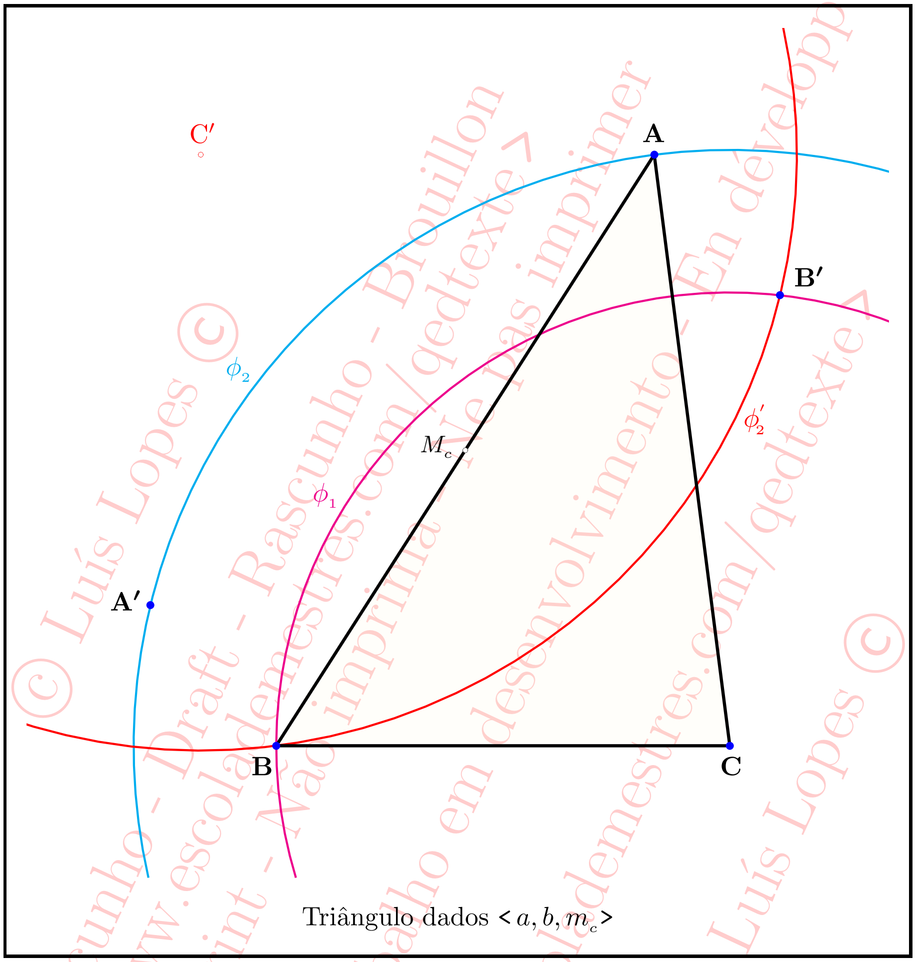


Figura 4.104: Exercício 132 — Terceiro procedimento.

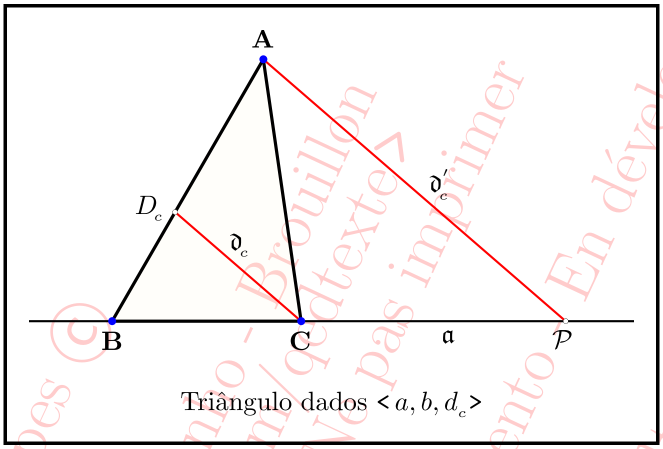


Figura 4.105: Exercício 134 — Segundo procedimento.

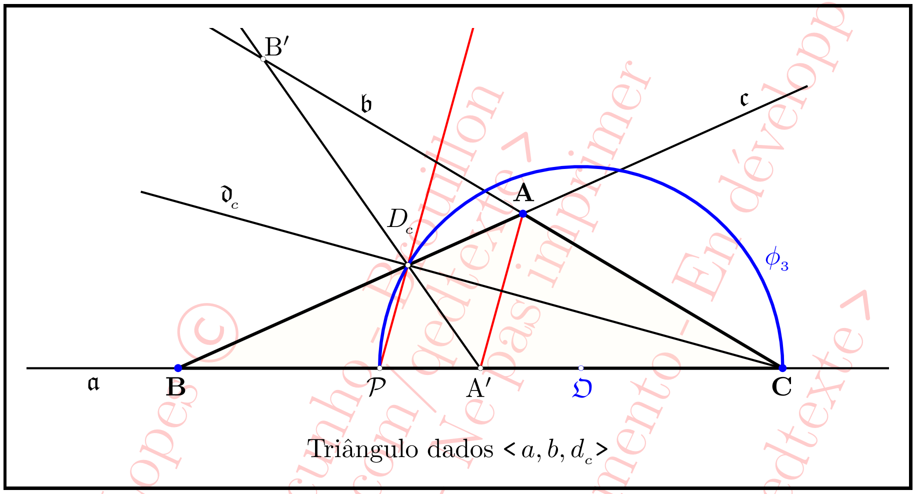


Figura 4.106: Exercício 134 — Terceiro procedimento.

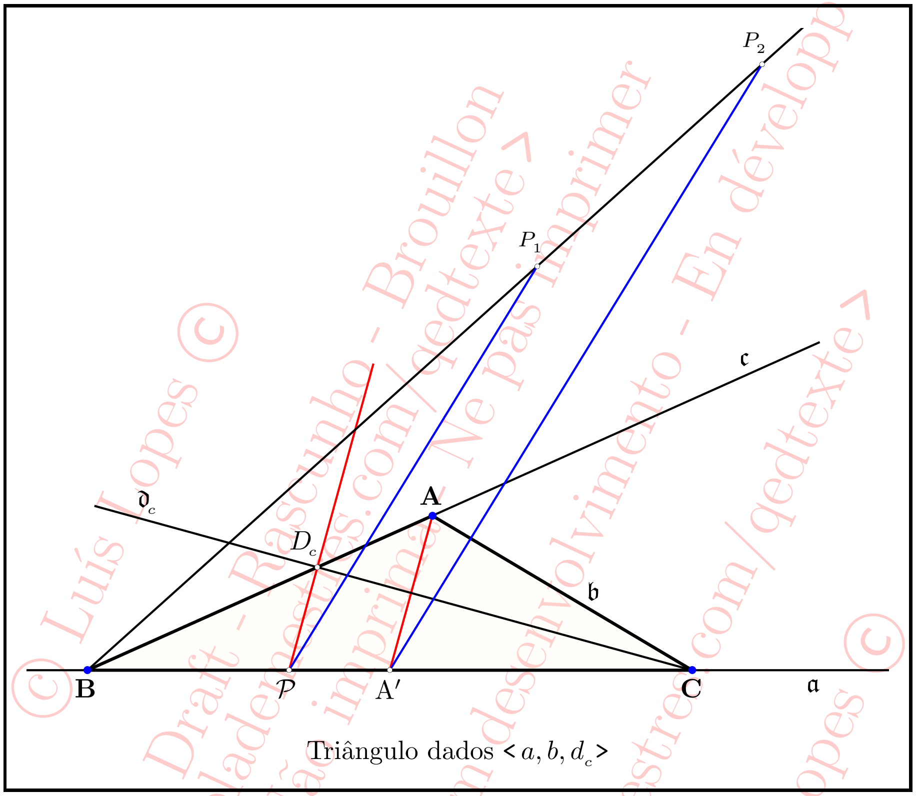


Figura 4.107: Exercício 134 — Quarto procedimento.

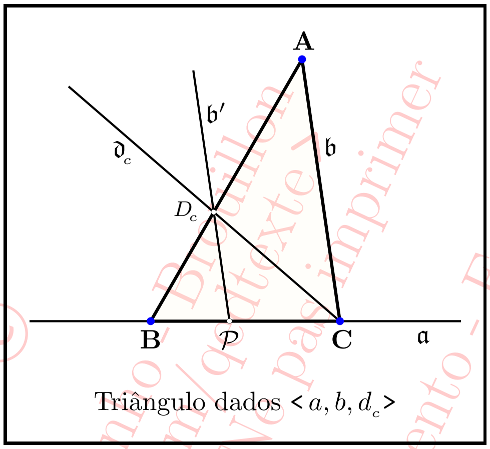
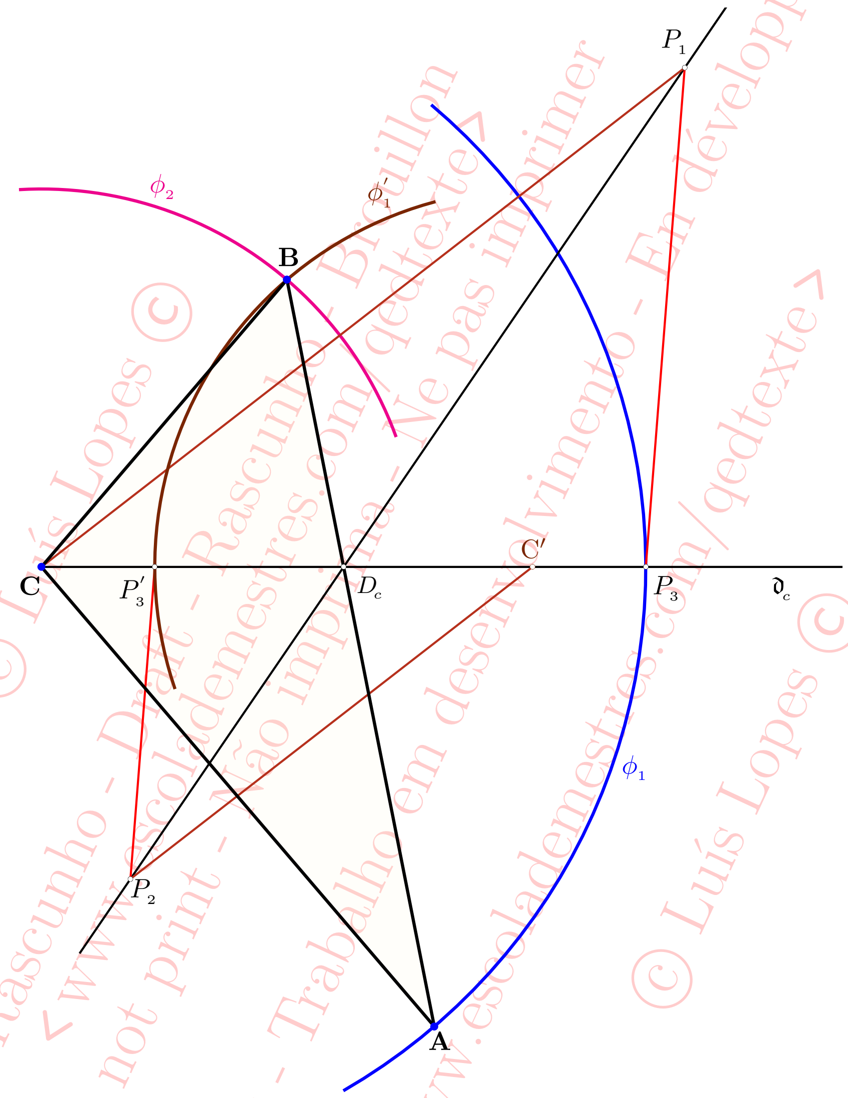


Figura 4.108: Exercício 134 — Quinto procedimento.



Triângulo dados < a, b, d_c >

Figura 4.109: Exercício 134 — Sexto procedimento.

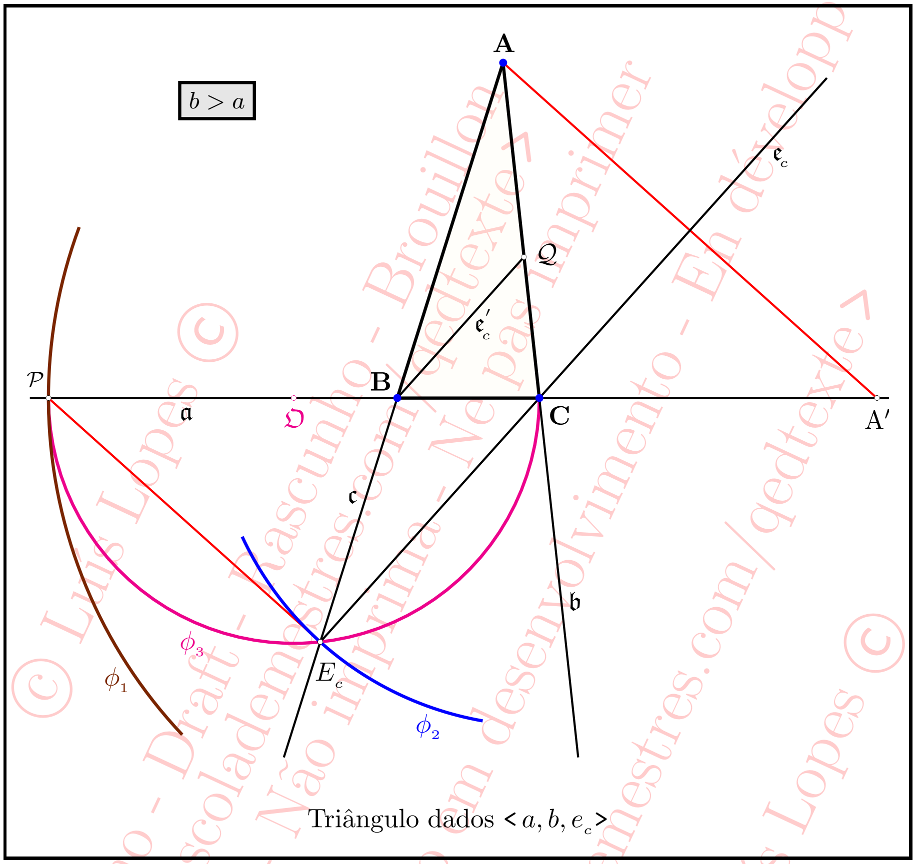


Figura 4.110: Exercício 136 — Segundo e terceiro procedimentos $b > a$.

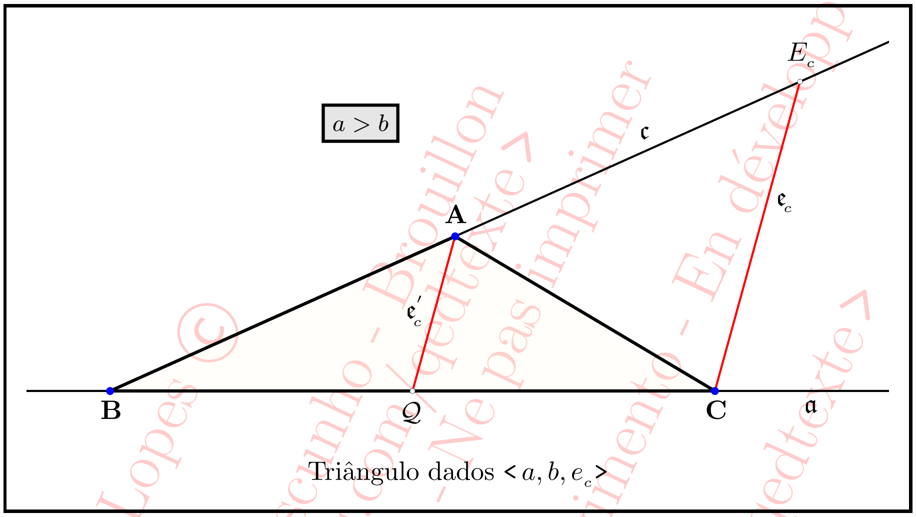


Figura 4.111: Exercício 136 — Segundo procedimento $a > b$.

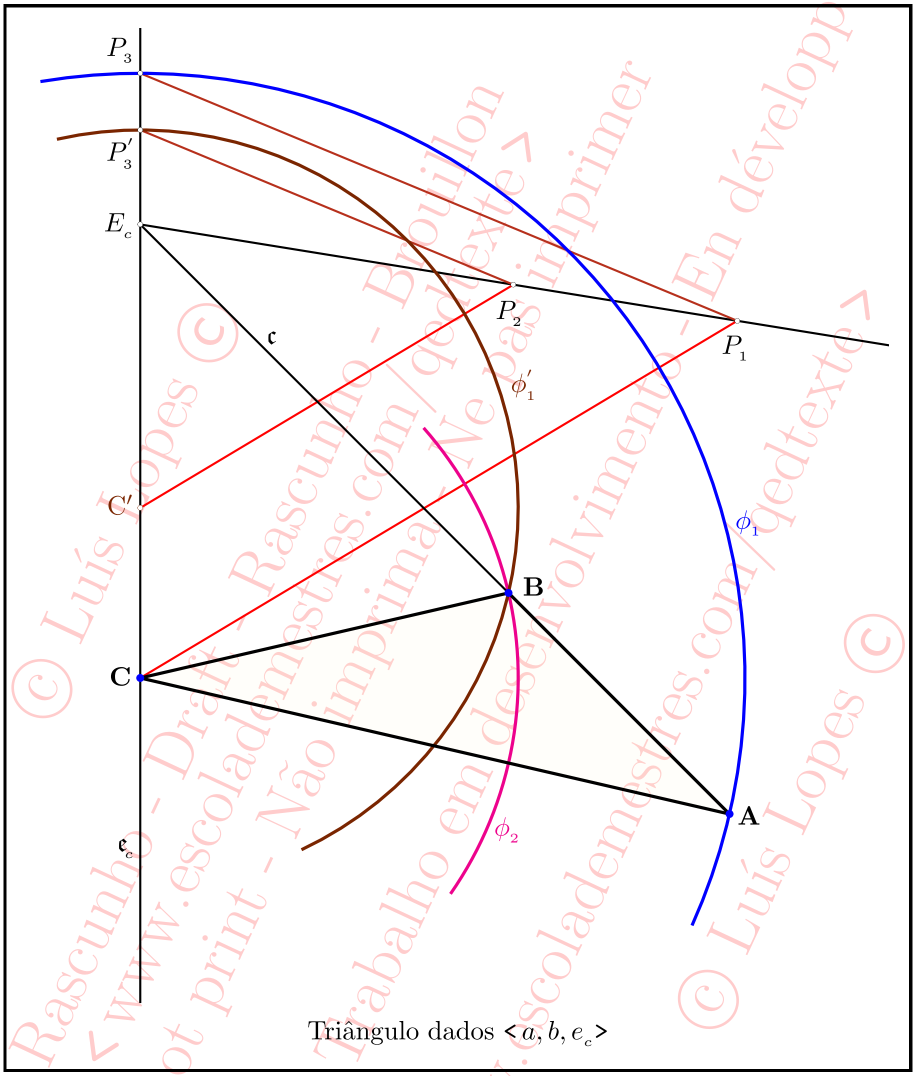


Figura 4.112: Exercício 136 — Quarto procedimento.

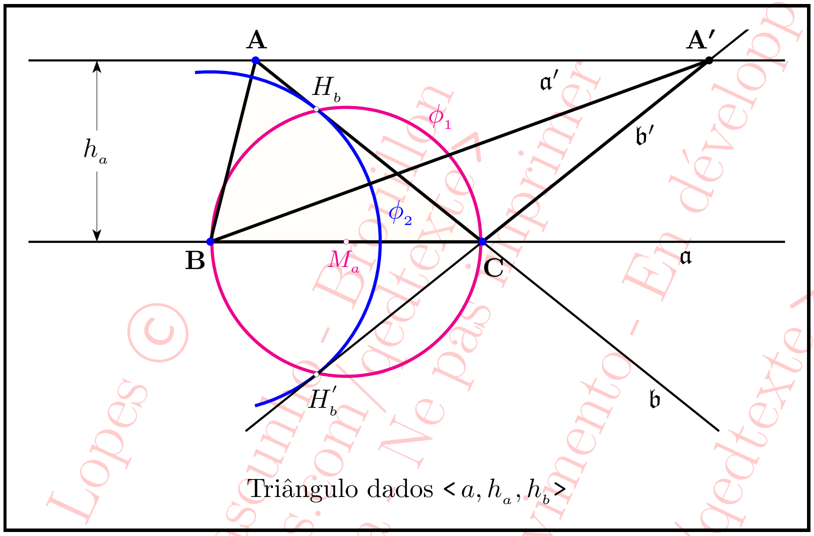


Figura 4.113: Exercício 141.

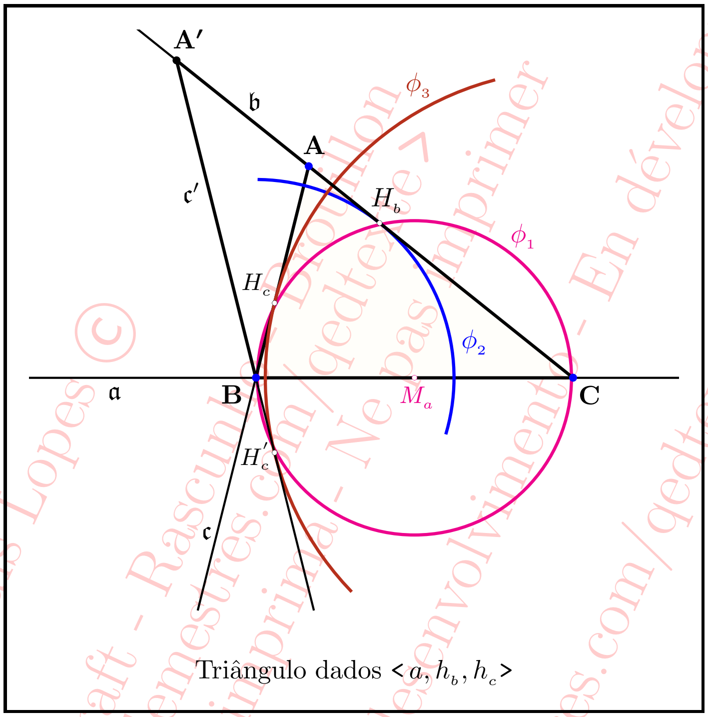


Figura 4.114: Exercício 142.

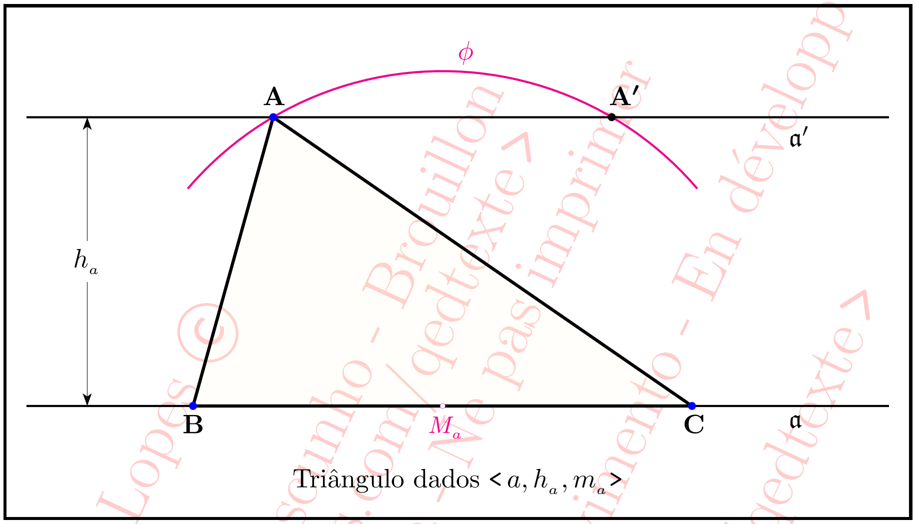
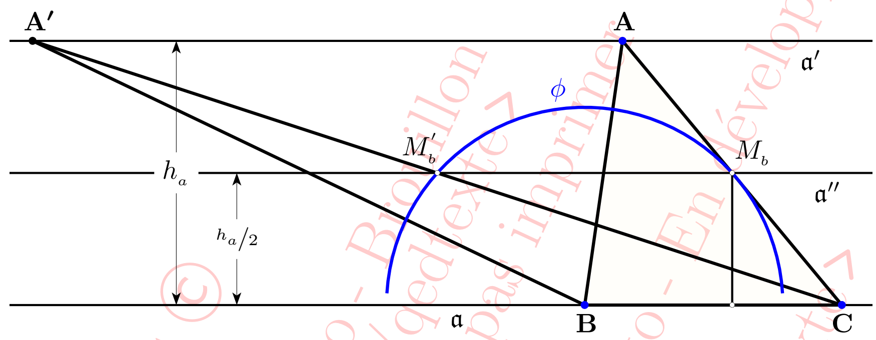


Figura 4.115: Exercício 143.



Triângulo dados $< a, h_a, m_b >$

Figura 4.116: Exercício 144.

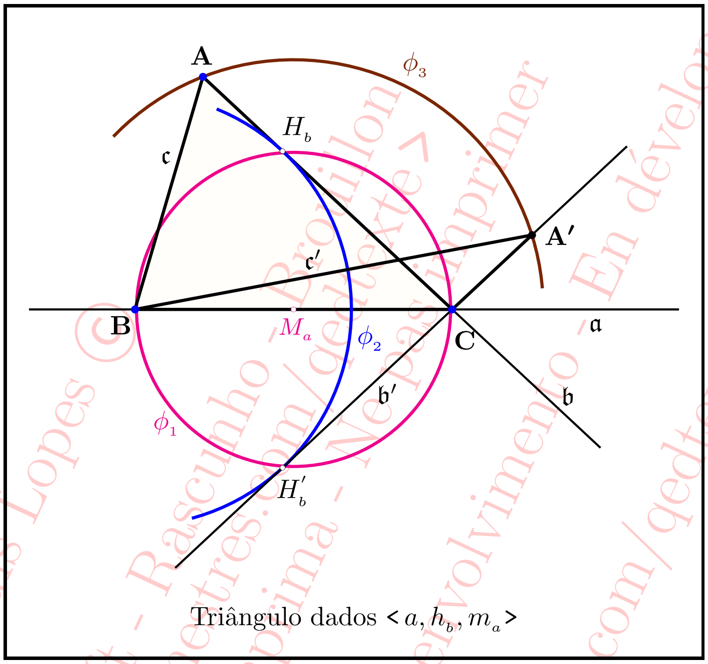


Figura 4.117: Exercício 145.

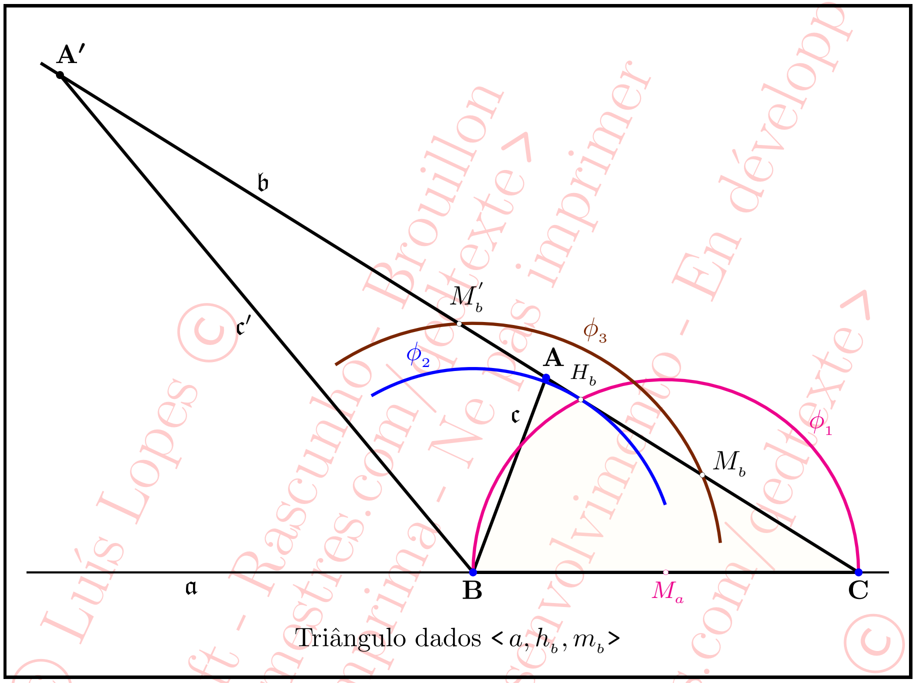
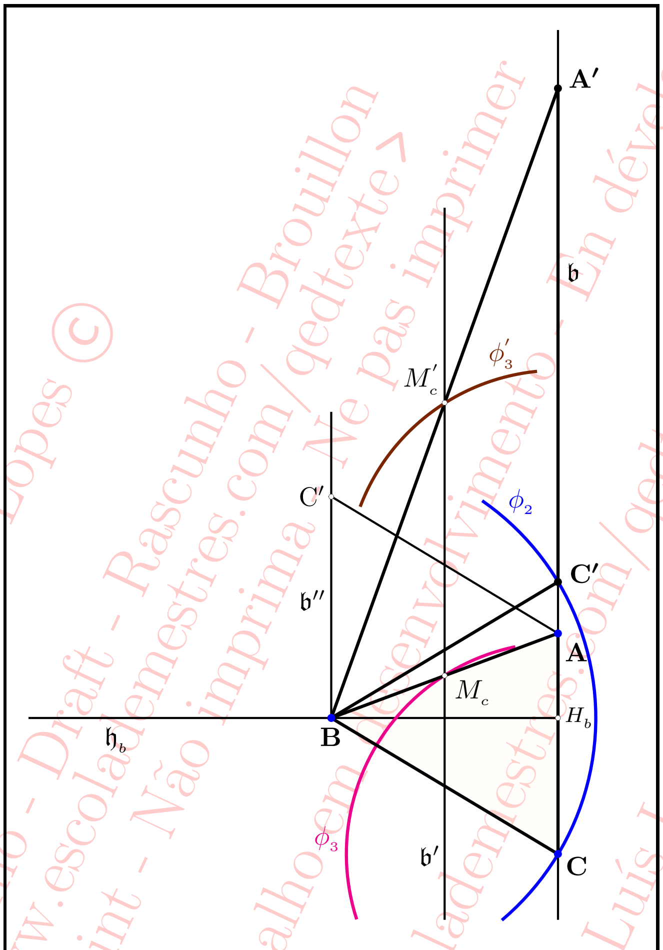


Figura 4.118: Exercício 146.



Triângulo dados $< a, h_b, m_c >$

Figura 4.119: Exercício 147.

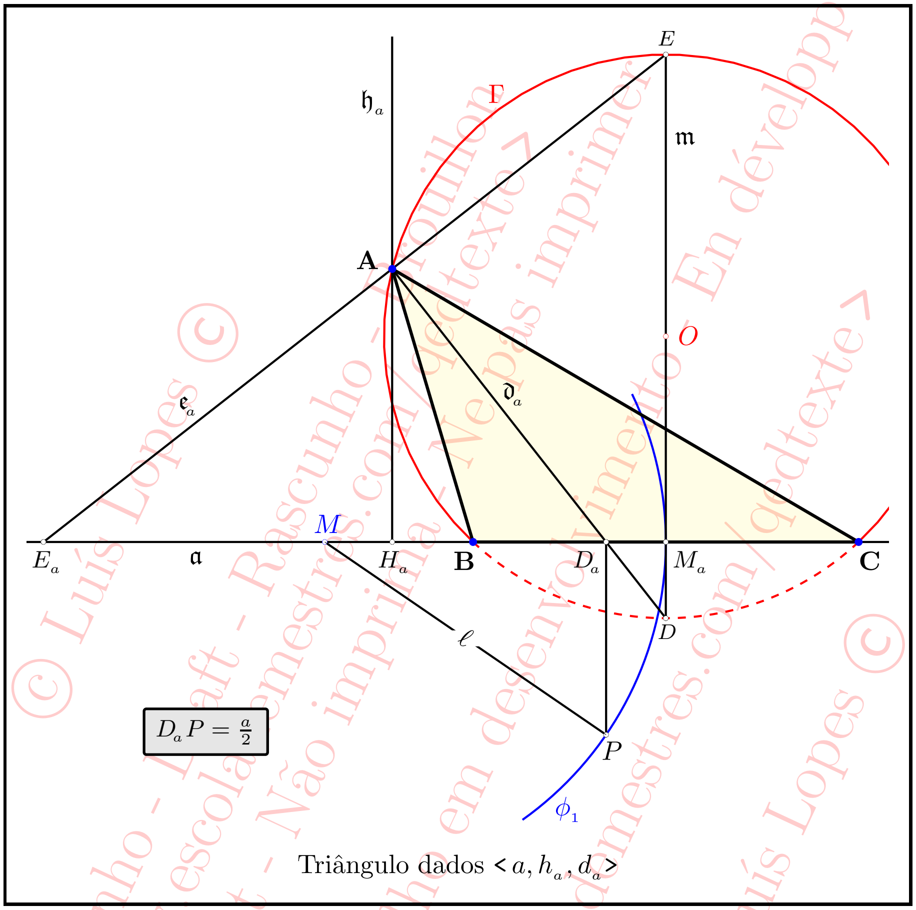


Figura 4.120: Exercício 148 — Primeiro procedimento.

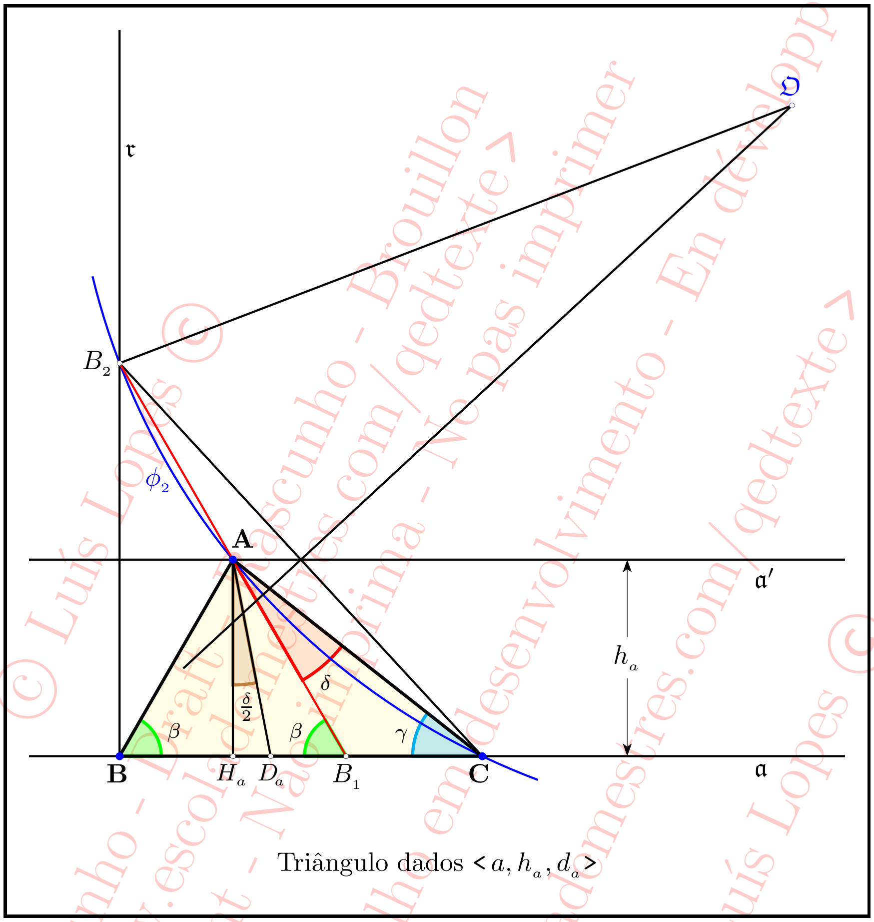


Figura 4.121: Exercício 148 — Segundo procedimento.

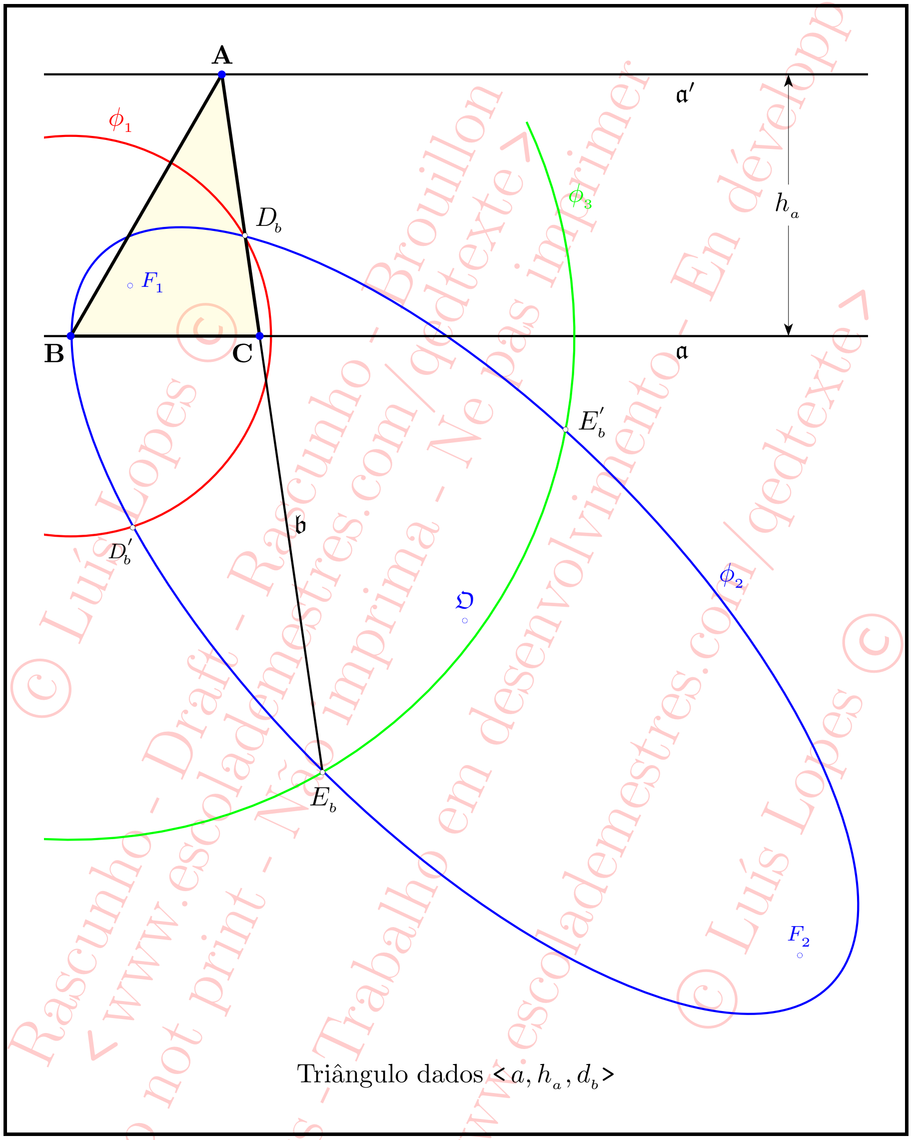


Figura 4.122: Exercício 149.