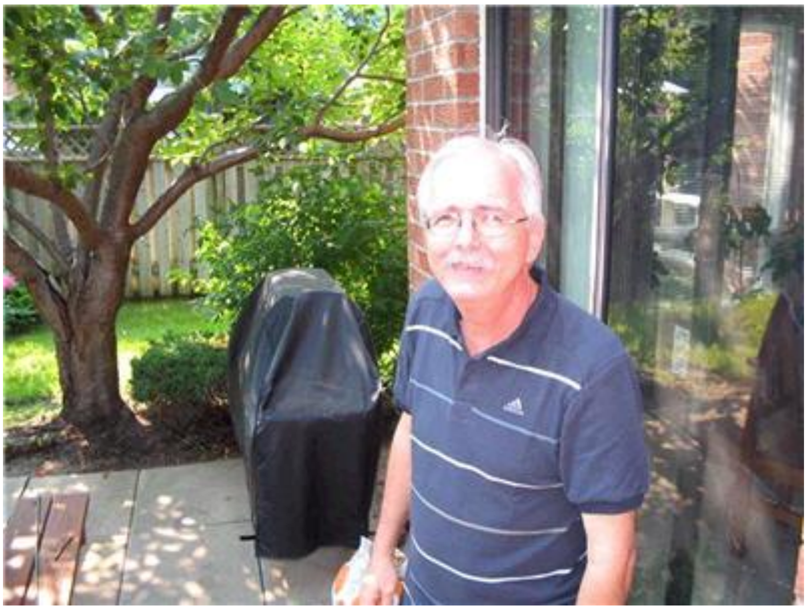


Manual de Construção de Triângulos

Todos os volumes disponibilizados ao público estão em

http://www.escolademestres.com/blogs/questoesresolvidas/

matematica/306-construcoes-geometricas-de-triangulosversao-

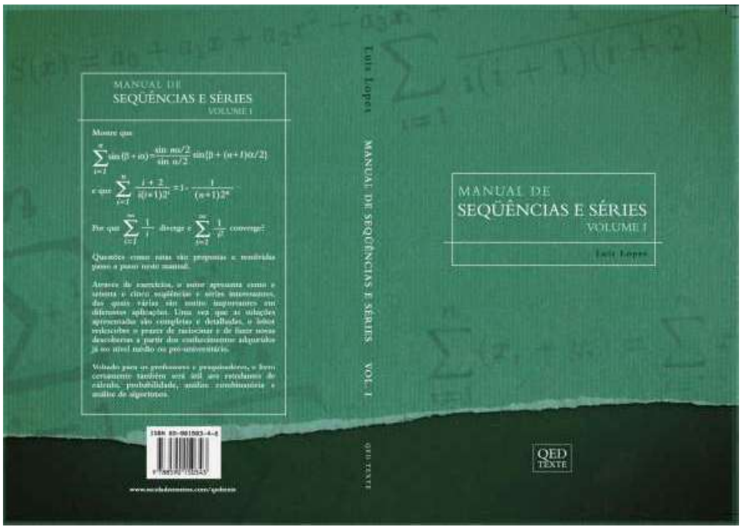
eletonica

Caso você goste do trabalho, há um link na mesma página para que você possa fazer uma contribuição para projeto através do Paypal.

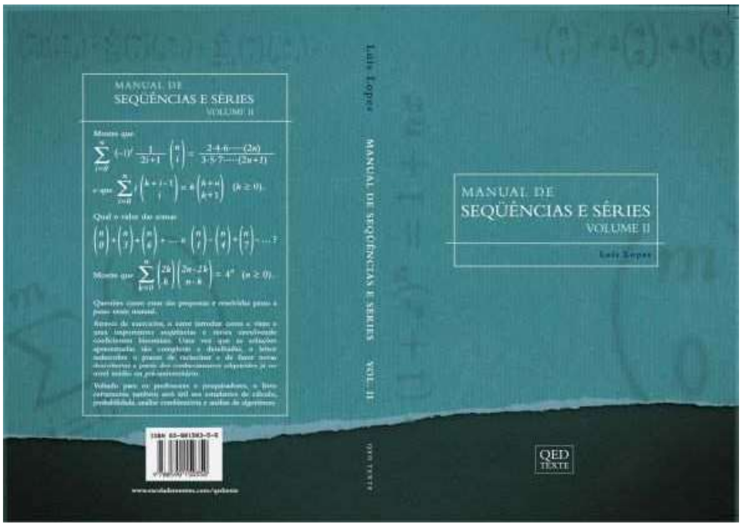
http://www.escolademestres.com/qedtexte

Tópicos abordados são os seguintes:

Seqüências e Séries -
Volume 1



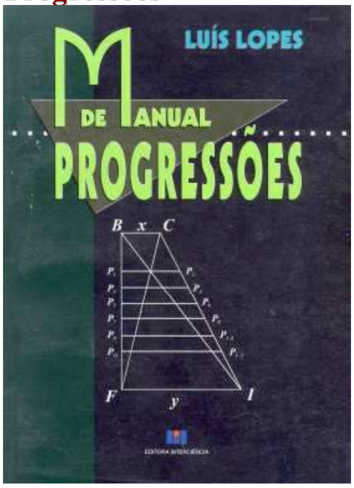
Volume 2



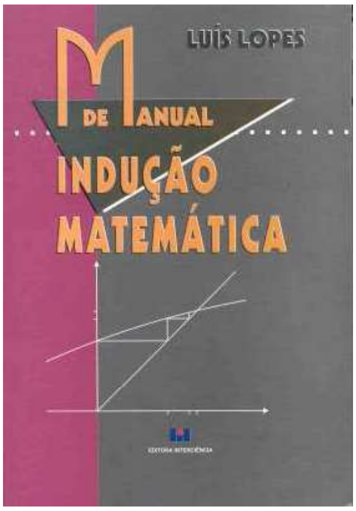
Coleção de Matemática do Prof Luís Lopes

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Progressões



Indução Matemática



This file was produced on February 6, 2015.
Montreal, CA and Rio de Janeiro, BR.
Work in progress.
Do not print. Spare the planet.
Contributions of all kinds are welcome.
Consider new constructions and insights,
algebraic developments and numerical solution,
discussion to existence and number of solutions,
references, etc.

Este arquivo foi criado em 6 de fevereiro de 2015.
Montreal, CA e Rio de Janeiro, BR.
Trabalho em desenvolvimento.
Não imprima. Evite desperdícios.
Colaborações de qualquer natureza são solicitadas.

Conteúdo

Lista de Figuras

CAPÍTULO 3

EXERCÍCIOS

O enunciado de todos os exercícios começa por: construir um triângulo △ **ABC** sendo dados …

Exercício 1) ▲ $<\alpha,\ \beta,\ \gamma>$ `(alpha,beta,gamma)`.

Exercício 2) △ $<\alpha,\ \beta,\ a>$ `(alpha,beta,a)`.

Exercício 3) △ $<\alpha,\ \beta,\ c>$ `(alpha,beta,c)`.

Exercício 4) △ $<\alpha,\ \beta,\ h_a>$ `(alpha,beta,h_a)`.

Exercício 5) △ $<\alpha,\ \beta,\ h_c>$ `(alpha,beta,h_c)`.

Exercício 6) △ $<\alpha,\ \beta,\ m_a>$ `(alpha,beta,m_a)`.

Exercício 7) △ $<\alpha,\ \beta,\ m_c>$ `(alpha,beta,m_c)`.

Exercício 8) △ $<\alpha,\ \beta,\ d_a>$ `(alpha,beta,d_a)`.

Exercício 9) △ $<\alpha,\ \beta,\ d_c>$ `(alpha,beta,d_c)`.

Exercício 10) △ $<\alpha,\ \beta,\ e_a>$ `(alpha,beta,e_a)`.

Exercício 11) △ $<\alpha,\ \beta,\ e_c>$ `(alpha,beta,e_c)`.

Exercício 12) △ $<\alpha,\ \beta,\ R>$ `(alpha,beta,R)`.

Exercício 13) △ $<\alpha,\ \beta,\ r>$ `(alpha,beta,r)`.

Exercício 14) △ $<\alpha,\ \beta,\ r_a>$ `(alpha,beta,r_a)`.

Exercício 15) △ $<\alpha,\ \beta,\ r_c>$ `(alpha,beta,r_c)`.

Exercício 16) △ $<\alpha,\ a,\ b>$ `(alpha,a,b).`

Exercício 17) △ $<\alpha,\ b,\ c>$ `(alpha,b,c).`

Exercício 18) △ $<\alpha,\ a,\ h_a>$ `(alpha,a,h_a).`

Exercício 19) △ $<\alpha,\ a,\ h_b>$ `(alpha,a,h_b).`

Exercício 20) △ $<\alpha,\ b,\ h_a>$ `(alpha,b,h_a).`

Exercício 21) △ $<\alpha,\ b,\ h_b>$ `(alpha,b,h_b).`

Exercício 22) ▲ $<\alpha,\ b,\ h_c>$ `(alpha,b,h_c).`

Exercício 23) △ $<\alpha,\ a,\ m_a>$ `(alpha,a,m_a).`

Exercício 24) △ $<\alpha,\ a,\ m_b>$ `(alpha,a,m_b).`

Exercício 25) △ $<\alpha,\ b,\ m_a>$ `(alpha,b,m_a).`

Exercício 26) △ $<\alpha,\ b,\ m_b>$ `(alpha,b,m_b).`

Exercício 27) △ $<\alpha,\ b,\ m_c>$ `(alpha,b,m_c).`

Exercício 28) △ $<\alpha,\ a,\ d_a>$ `(alpha,a,d_a).`

Exercício 29) $<\alpha,\ a,\ d_b>$ `(alpha,a,d_b).`

Exercício 30) △ $<\alpha,\ b,\ d_a>$ `(alpha,b,d_a).`

Exercício 31) $<\alpha,\ b,\ d_b>$ `(alpha,b,d_b).`

Exercício 32) △ $<\alpha,\ b,\ d_c>$ `(alpha,b,d_c).`

Exercício 33) △ $<\alpha,\ a,\ e_a>$ `(alpha,a,e_a).`

Exercício 34) $<\alpha,\ a,\ e_b>$ `(alpha,a,e_b).`

Exercício 35) △ $<\alpha,\ b,\ e_a>$ `(alpha,b,e_a).`

Exercício 36) $<\alpha,\ b,\ e_b>$ `(alpha,b,e_b).`

Exercício 37) △ $<\alpha,\ b,\ e_c>$ `(alpha,b,e_c).`

Exercício 38) ▲ $<\alpha,\ a,\ R>$ `(alpha,a,R).`

Exercício 39) △ $<\alpha,\ b,\ R>$ `(alpha,b,R).`

Exercício 40) △ $<\alpha,\ a,\ r>$ `(alpha,a,r).`

Exercício 41) △ $<\alpha,\ b,\ r>$ `(alpha,b,r).`

Exercício 42) △ $<\alpha,\ a,\ r_a>$ `(alpha,a,r_a).`

Exercício 43) △ $<\alpha,\ a,\ r_b>$ `(alpha,a,r_b).`

Exercício 44) △ $<\alpha,\ b,\ r_a>$ `(alpha,b,r_a).`

Exercício 45) △ $<\alpha, b, r_b>$ `(alpha,b,r_b).`

Exercício 46) △ $<\alpha, b, r_c>$ `(alpha,b,r_c).`

Exercício 47) △ $<\alpha, h_a, h_b>$ `(alpha,h_a,h_b).`

Exercício 48) △ $<\alpha, h_b, h_c>$ `(alpha,h_b,h_c).`

Exercício 49) △ $<\alpha, h_a, m_a>$ `(alpha,h_a,m_a).`

Exercício 50) △ $<\alpha, h_a, m_b>$ `(alpha,h_a,m_b).`

Exercício 51) △ $<\alpha, h_b, m_a>$ `(alpha,h_b,m_a).`

Exercício 52) △ $<\alpha, h_b, m_b>$ `(alpha,h_b,m_b).`

Exercício 53) △ $<\alpha, h_b, m_c>$ `(alpha,h_b,m_c).`

Exercício 54) △ $<\alpha, h_a, d_a>$ `(alpha,h_a,d_a).`

Exercício 55) $<\alpha, h_a, d_b>$ `(alpha,h_a,d_b).`

Exercício 56) △ $<\alpha, h_b, d_a>$ `(alpha,h_b,d_a).`

Exercício 57) △ $<\alpha, h_b, d_b>$ `(alpha,h_b,d_b).`

Exercício 58) $<\alpha, h_b, d_c>$ `(alpha,h_b,d_c).`

Exercício 59) △ $<\alpha, h_a, e_a>$ `(alpha,h_a,e_a).`

Exercício 60) $<\alpha, h_a, e_b>$ `(alpha,h_a,e_b).`

Exercício 61) △ $<\alpha, h_b, e_a>$ `(alpha,h_b,e_a).`

Exercício 62) △ $<\alpha, h_b, e_b>$ `(alpha,h_b,e_b).`

Exercício 63) $<\alpha, h_b, e_c>$ `(alpha,h_b,e_c).`

Exercício 64) △ $<\alpha, h_a, R>$ `(alpha,h_a,R).`

Exercício 65) △ $<\alpha, h_b, R>$ `(alpha,h_b,R).`

Exercício 66) △ $<\alpha, h_a, r>$ `(alpha,h_a,r).`

Exercício 67) △ $<\alpha, h_b, r>$ `(alpha,h_b,r).`

Exercício 68) △ $<\alpha, h_a, r_a>$ `(alpha,h_a,r_a).`

Exercício 69) △ $<\alpha, h_a, r_b>$ `(alpha,h_a,r_b).`

Exercício 70) △ $<\alpha, h_b, r_a>$ `(alpha,h_b,r_a).`

Exercício 71) △ $<\alpha, h_b, r_b>$ `(alpha,h_b,r_b).`

Exercício 72) △ $<\alpha, h_b, r_c>$ `(alpha,h_b,r_c).`

Exercício 73) △ $<\alpha, m_a, m_b>$ `(alpha,m_a,m_b).`

Exercício 74) $\triangle$ $<\alpha, m_b, m_c>$ `(alpha,m_b,m_c)`.

Exercício 75) $\triangle$ $<\alpha, m_a, d_a>$ `(alpha,m_a,d_a)`.

Exercício 76) $<\alpha, m_a, d_b>$ `(alpha,m_a,d_b)`.

Exercício 77) $<\alpha, m_b, d_a>$ `(alpha,m_b,d_a)`.

Exercício 78) $<\alpha, m_b, d_b>$ `(alpha,m_b,d_b)`.

Exercício 79) $<\alpha, m_b, d_c>$ `(alpha,m_b,d_c)`.

Exercício 80) $\triangle$ $<\alpha, m_a, e_a>$ `(alpha,m_a,e_a)`.

Exercício 81) $<\alpha, m_a, e_b>$ `(alpha,m_a,e_b)`.

Exercício 82) $<\alpha, m_b, e_a>$ `(alpha,m_b,e_a)`.

Exercício 83) $<\alpha, m_b, e_b>$ `(alpha,m_b,e_b)`.

Exercício 84) $<\alpha, m_b, e_c>$ `(alpha,m_b,e_c)`.

Exercício 85) $\triangle$ $<\alpha, m_a, R>$ `(alpha,m_a,R)`.

Exercício 86) $\triangle$ $<\alpha, m_b, R>$ `(alpha,m_b,R)`.

Exercício 87) $\triangle$ $<\alpha, m_a, r>$ `(alpha,m_a,r)`.

Exercício 88) $<\alpha, m_b, r>$ `(alpha,m_b,r)`.

Exercício 89) $\triangle$ $<\alpha, m_a, r_a>$ `(alpha,m_a,r_a)`.

Exercício 90) $\triangle$ $<\alpha, m_a, r_b>$ `(alpha,m_a,r_b)`.

Exercício 91) $<\alpha, m_b, r_a>$ `(alpha,m_b,r_a)`.

Exercício 92) $<\alpha, m_b, r_b>$ `(alpha,m_b,r_b)`.

Exercício 93) $<\alpha, m_b, r_c>$ `(alpha,m_b,r_c)`.

Exercício 94) $<\alpha, d_a, d_b>$ `(alpha,d_a,d_b)`.

Exercício 95) $<\alpha, d_b, d_c>$ `(alpha,d_b,d_c)`.

Exercício 96) $\triangle$ $<\alpha, d_a, e_a>$ `(alpha,d_a,e_a)`.

Exercício 97) $<\alpha, d_a, e_b>$ `(alpha,d_a,e_b)`.

Exercício 98) $<\alpha, d_b, e_a>$ `(alpha,d_b,e_a)`.

Exercício 99) $\triangle$ $<\alpha, d_b, e_b>$ `(alpha,d_b,e_b)`.

Exercício 100) $<\alpha, d_b, e_c>$ `(alpha,d_b,e_c)`.

Exercício 101) $\triangle$ $<\alpha, d_a, R>$ `(alpha,d_a,R)`.

Exercício 102) $<\alpha, d_b, R>$ `(alpha,d_b,R)`.

Exercício 103) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, r>$ (alpha,d_a,r).

Exercício 104) $\triangle$ $<\alpha,\, d_b,\, r>$ (alpha,d_b,r).

Exercício 105) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, r_a>$ (alpha,d_a,r_a).

Exercício 106) $\triangle$ $<\alpha,\, d_a,\, r_b>$ (alpha,d_a,r_b).

Exercício 107) $<\alpha,\, d_b,\, r_a>$ (alpha,d_b,r_a).

Exercício 108) $\triangle$ $<\alpha,\, d_b,\, r_b>$ (alpha,d_b,r_b).

Exercício 109) $<\alpha,\, d_b,\, r_c>$ (alpha,d_b,r_c).

Exercício 110) $<\alpha,\, e_a,\, e_b>$ (alpha,e_a,e_b).

Exercício 111) $<\alpha,\, e_b,\, e_c>$ (alpha,e_b,e_c).

Exercício 112) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, R>$ (alpha,e_a,R).

Exercício 113) $<\alpha,\, e_b,\, R>$ (alpha,e_b,R).

Exercício 114) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, r>$ (alpha,e_a,r).

Exercício 115) $<\alpha,\, e_b,\, r>$ (alpha,e_b,r).

Exercício 116) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, r_a>$ (alpha,e_a,r_a).

Exercício 117) $\triangle$ $<\alpha,\, e_a,\, r_b>$ (alpha,e_a,r_b).

Exercício 118) $\triangle$ $<\alpha,\, e_b,\, r_a>$ (alpha,e_b,r_a).

Exercício 119) $<\alpha,\, e_b,\, r_b>$ (alpha,e_b,r_b).

Exercício 120) $\triangle$ $<\alpha,\, e_b,\, r_c>$ (alpha,e_b,r_c).

Exercício 121) $\triangle$ $<\alpha,\, R,\, r>$ (alpha,R,r).

Exercício 122) $\triangle$ $<\alpha,\, R,\, r_a>$ (alpha,R,r_a).

Exercício 123) $\triangle$ $<\alpha,\, R,\, r_b>$ (alpha,R,r_b).

Exercício 124) $\triangle$ $<\alpha,\, r,\, r_a>$ (alpha,r,r_a).

Exercício 125) $\triangle$ $<\alpha,\, r,\, r_b>$ (alpha,r,r_b).

Exercício 126) $\triangle$ $<\alpha,\, r_a,\, r_b>$ (alpha,r_a,r_b).

Exercício 127) $\triangle$ $<\alpha,\, r_b,\, r_c>$ (alpha,r_b,r_c).

Exercício 128) $\triangle$ $<a,\, b,\, c>$ (a,b,c).

Exercício 129) $\triangle$ $<a,\, b,\, h_a>$ (a,b,h_a).

Exercício 130) $\triangle$ $<a,\, b,\, h_c>$ (a,b,h_c).

Exercício 131) $\triangle$ $<a,\, b,\, m_a>$ (a,b,m_a).

Exercício 132) $\triangle$ $<a, b, m_c>$ `(a,b,m_c).`

Exercício 133) $<a, b, d_a>$ `(a,b,d_a).`

Exercício 134) $\triangle$ $<a, b, d_c>$ `(a,b,d_c).`

Exercício 135) $<a, b, e_a>$ `(a,b,e_a).`

Exercício 136) $\triangle$ $<a, b, e_c>$ `(a,b,e_c).`

Exercício 137) $\triangle$ $<a, b, R>$ `(a,b,R).`

Exercício 138) $<a, b, r>$ `(a,b,r).`

Exercício 139) $<a, b, r_a>$ `(a,b,r_a).`

Exercício 140) $<a, b, r_c>$ `(a,b,r_c).`

Exercício 141) $\triangle$ $<a, h_a, h_b>$ `(a,h_a,h_b).`

Exercício 142) $\triangle$ $<a, h_b, h_c>$ `(a,h_b,h_c).`

Exercício 143) $\triangle$ $<a, h_a, m_a>$ `(a,h_a,m_a).`

Exercício 144) $\triangle$ $<a, h_a, m_b>$ `(a,h_a,m_b).`

Exercício 145) $\triangle$ $<a, h_b, m_a>$ `(a,h_b,m_a).`

Exercício 146) $\triangle$ $<a, h_b, m_b>$ `(a,h_b,m_b).`

Exercício 147) $\triangle$ $<a, h_b, m_c>$ `(a,h_b,m_c).`

Exercício 148) $\triangle$ $<a, h_a, d_a>$ `(a,h_a,d_a).`

Exercício 149) $<a, h_a, d_b>$ `(a,h_a,d_b).`

Exercício 150) $<a, h_b, d_a>$ `(a,h_b,d_a).`

Exercício 151) $\triangle$ $<a, h_b, d_b>$ `(a,h_b,d_b).`

Exercício 152) $\triangle$ $<a, h_b, d_c>$ `(a,h_b,d_c).`

Exercício 153) $\triangle$ $<a, h_a, e_a>$ `(a,h_a,e_a).`

Exercício 154) $<a, h_a, e_b>$ `(a,h_a,e_b).`

Exercício 155) $<a, h_b, e_a>$ `(a,h_b,e_a).`

Exercício 156) $\triangle$ $<a, h_b, e_b>$ `(a,h_b,e_b).`

Exercício 157) $\triangle$ $<a, h_b, e_c>$ `(a,h_b,e_c).`

Exercício 158) $\triangle$ $<a, h_a, R>$ `(a,h_a,R).`

Exercício 159) $\triangle$ $<a, h_b, R>$ `(a,h_b,R).`

Exercício 160) $\triangle$ $<a, h_a, r>$ `(a,h_a,r).`

Exercício 161) $\triangle$ $<a, h_b, r>$ `(a,h_b,r).`

Exercício 162) $\triangle$ $<a, h_a, r_a>$ `(a,h_a,r_a).`

Exercício 163) $\triangle$ $<a, h_a, r_b>$ `(a,h_a,r_b).`

Exercício 164) $\triangle$ $<a, h_b, r_a>$ `(a,h_b,r_a).`

Exercício 165) $\triangle$ $<a, h_b, r_b>$ `(a,h_b,r_b).`

Exercício 166) $\triangle$ $<a, h_b, r_c>$ `(a,h_b,r_c).`

Exercício 167) $\triangle$ $<a, m_a, m_b>$ `(a,m_a,m_b).`

Exercício 168) $\triangle$ $<a, m_b, m_c>$ `(a,m_b,m_c).`

Exercício 169) $\triangle$ $<a, m_a, d_a>$ `(a,m_a,d_a).`

Exercício 170) $<a, m_a, d_b>$ `(a,m_a,d_b).`

Exercício 171) $<a, m_b, d_a>$ `(a,m_b,d_a).`

Exercício 172) $<a, m_b, d_b>$ `(a,m_b,d_b).`

Exercício 173) $<a, m_b, d_c>$ `(a,m_b,d_c).`

Exercício 174) $\triangle$ $<a, m_a, e_a>$ `(a,m_a,e_a).`

Exercício 175) $<a, m_a, e_b>$ `(a,m_a,e_b).`

Exercício 176) $<a, m_b, e_a>$ `(a,m_b,e_a).`

Exercício 177) $<a, m_b, e_b>$ `(a,m_b,e_b).`

Exercício 178) $<a, m_b, e_c>$ `(a,m_b,e_c).`

Exercício 179) $\triangle$ $<a, m_a, R>$ `(a,m_a,R).`

Exercício 180) $\triangle$ $<a, m_b, R>$ `(a,m_b,R).`

Exercício 181) $<a, m_a, r>$ `(a,m_a,r).`

Exercício 182) $<a, m_b, r>$ `(a,m_b,r).`

Exercício 183) $<a, m_a, r_a>$ `(a,m_a,r_a).`

Exercício 184) $<a, m_a, r_b>$ `(a,m_a,r_b).`

Exercício 185) $<a, m_b, r_a>$ `(a,m_b,r_a).`

Exercício 186) $<a, m_b, r_b>$ `(a,m_b,r_b).`

Exercício 187) $<a, m_b, r_c>$ `(a,m_b,r_c).`

Exercício 188) $<a, d_a, d_b>$ `(a,d_a,d_b).`

Exercício 189) $<a, d_b, d_c>$ `(a,d_b,d_c).`

Exercício 190) △ $< a,\, d_a,\, e_a >$ `(a,d_a,e_a).`

Exercício 191) $< a,\, d_a,\, e_b >$ `(a,d_a,e_b).`

Exercício 192) $< a,\, d_b,\, e_a >$ `(a,d_b,e_a).`

Exercício 193) △ $< a,\, d_b,\, e_b >$ `(a,d_b,e_b).`

Exercício 194) $< a,\, d_b,\, e_c >$ `(a,d_b,e_c).`

Exercício 195) △ $< a,\, d_a,\, R >$ `(a,d_a,R).`

Exercício 196) $< a,\, d_b,\, R >$ `(a,d_b,R).`

Exercício 197) $< a,\, d_a,\, r >$ `(a,d_a,r).`

Exercício 198) $< a,\, d_b,\, r >$ `(a,d_b,r).`

Exercício 199) $< a,\, d_a,\, r_a >$ `(a,d_a,r_a).`

Exercício 200) $< a,\, d_a,\, r_b >$ `(a,d_a,r_b).`

Exercício 201) $< a,\, d_b,\, r_a >$ `(a,d_b,r_a).`

Exercício 202) $< a,\, d_b,\, r_b >$ `(a,d_b,r_b).`

Exercício 203) $< a,\, d_b,\, r_c >$ `(a,d_b,r_c).`

Exercício 204) $< a,\, e_a,\, e_b >$ `(a,e_a,e_b).`

Exercício 205) $< a,\, e_b,\, e_c >$ `(a,e_b,e_c).`

Exercício 206) △ $< a,\, e_a,\, R >$ `(a,e_a,R).`

Exercício 207) $< a,\, e_b,\, R >$ `(a,e_b,R).`

Exercício 208) $< a,\, e_a,\, r >$ `(a,e_a,r).`

Exercício 209) $< a,\, e_b,\, r >$ `(a,e_b,r).`

Exercício 210) $< a,\, e_a,\, r_a >$ `(a,e_a,r_a).`

Exercício 211) $< a,\, e_a,\, r_b >$ `(a,e_a,r_b).`

Exercício 212) $< a,\, e_b,\, r_a >$ `(a,e_b,r_a).`

Exercício 213) $< a,\, e_b,\, r_b >$ `(a,e_b,r_b).`

Exercício 214) $< a,\, e_b,\, r_c >$ `(a,e_b,r_c).`

Exercício 215) △ $< a,\, R,\, r >$ `(a,R,r).`

Exercício 216) △ $< a,\, R,\, r_a >$ `(a,R,r_a).`

Exercício 217) △ $< a,\, R,\, r_b >$ `(a,R,r_b).`

Exercício 218) △ $< a,\, r,\, r_a >$ `(a,r,r_a).`

Exercício 219) $\triangle$ $<a, r, r_b>$ `(a,r,r_b).`

Exercício 220) $\triangle$ $<a, r_a, r_b>$ `(a,r_a,r_b).`

Exercício 221) $\triangle$ $<a, r_b, r_c>$ `(a,r_b,r_c).`

Exercício 222) $\triangle$ $<h_a, h_b, h_c>$ `(h_a,h_b,h_c).`

Exercício 223) $\triangle$ $<h_a, h_b, m_a>$ `(h_a,h_b,m_a).`

Exercício 224) $\triangle$ $<h_a, h_b, m_c>$ `(h_a,h_b,m_c).`

Exercício 225) $<h_a, h_b, d_a>$ `(h_a,h_b,d_a).`

Exercício 226) $\triangle$ $<h_a, h_b, d_c>$ `(h_a,h_b,d_c).`

Exercício 227) $<h_a, h_b, e_a>$ `(h_a,h_b,e_a).`

Exercício 228) $\triangle$ $<h_a, h_b, e_c>$ `(h_a,h_b,e_c).`

Exercício 229) $<h_a, h_b, R>$ `(h_a,h_b,R).`

Exercício 230) $\triangle$ $<h_a, h_b, r>$ `(h_a,h_b,r).`

Exercício 231) $\triangle$ $<h_a, h_b, r_a>$ `(h_a,h_b,r_a).`

Exercício 232) $\triangle$ $<h_a, h_b, r_c>$ `(h_a,h_b,r_c).`

Exercício 233) $\triangle$ $<h_a, m_a, m_b>$ `(h_a,m_a,m_b).`

Exercício 234) $\triangle$ $<h_a, m_b, m_c>$ `(h_a,m_b,m_c).`

Exercício 235) $\triangle$ $<h_a, m_a, d_a>$ `(h_a,m_a,d_a).`

Exercício 236) $<h_a, m_a, d_b>$ `(h_a,m_a,d_b).`

Exercício 237) $\triangle$ $<h_a, m_b, d_a>$ `(h_a,m_b,d_a).`

Exercício 238) $<h_a, m_b, d_b>$ `(h_a,m_b,d_b).`

Exercício 239) $<h_a, m_b, d_c>$ `(h_a,m_b,d_c).`

Exercício 240) $\triangle$ $<h_a, m_a, e_a>$ `(h_a,m_a,e_a).`

Exercício 241) $<h_a, m_a, e_b>$ `(h_a,m_a,e_b).`

Exercício 242) $\triangle$ $<h_a, m_b, e_a>$ `(h_a,m_b,e_a).`

Exercício 243) $<h_a, m_b, e_b>$ `(h_a,m_b,e_b).`

Exercício 244) $<h_a, m_b, e_c>$ `(h_a,m_b,e_c).`

Exercício 245) $\triangle$ $<h_a, m_a, R>$ `(h_a,m_a,R).`

Exercício 246) $<h_a, m_b, R>$ `(h_a,m_b,R).`

Exercício 247) $\triangle$ $<h_a, m_a, r>$ `(h_a,m_a,r).`

Exercício 248) △ $<h_a, m_b, r>$ `(h_a,m_b,r)`.

Exercício 249) △ $<h_a, m_a, r_a>$ `(h_a,m_a,r_a)`.

Exercício 250) △ $<h_a, m_a, r_b>$ `(h_a,m_a,r_b)`.

Exercício 251) △ $<h_a, m_b, r_a>$ `(h_a,m_b,r_a)`.

Exercício 252) △ $<h_a, m_b, r_b>$ `(h_a,m_b,r_b)`.

Exercício 253) △ $<h_a, m_b, r_c>$ `(h_a,m_b,r_c)`.

Exercício 254) $<h_a, d_a, d_b>$ `(h_a,d_a,d_b)`.

Exercício 255) $<h_a, d_b, d_c>$ `(h_a,d_b,d_c)`.

Exercício 256) ▲ $<h_a, d_a, e_a>$ `(h_a,d_a,e_a)`.

Exercício 257) $<h_a, d_a, e_b>$ `(h_a,d_a,e_b)`.

Exercício 258) $<h_a, d_b, e_a>$ `(h_a,d_b,e_a)`.

Exercício 259) $<h_a, d_b, e_b>$ `(h_a,d_b,e_b)`.

Exercício 260) $<h_a, d_b, e_c>$ `(h_a,d_b,e_c)`.

Exercício 261) △ $<h_a, d_a, R>$ `(h_a,d_a,R)`.

Exercício 262) $<h_a, d_b, R>$ `(h_a,d_b,R)`.

Exercício 263) △ $<h_a, d_a, r>$ `(h_a,d_a,r)`.

Exercício 264) $<h_a, d_b, r>$ `(h_a,d_b,r)`.

Exercício 265) △ $<h_a, d_a, r_a>$ `(h_a,d_a,r_a)`.

Exercício 266) △ $<h_a, d_a, r_b>$ `(h_a,d_a,r_b)`.

Exercício 267) $<h_a, d_b, r_a>$ `(h_a,d_b,r_a)`.

Exercício 268) $<h_a, d_b, r_b>$ `(h_a,d_b,r_b)`.

Exercício 269) $<h_a, d_b, r_c>$ `(h_a,d_b,r_c)`.

Exercício 270) $<h_a, e_a, e_b>$ `(h_a,e_a,e_b)`.

Exercício 271) $<h_a, e_b, e_c>$ `(h_a,e_b,e_c)`.

Exercício 272) △ $<h_a, e_a, R>$ `(h_a,e_a,R)`.

Exercício 273) $<h_a, e_b, R>$ `(h_a,e_b,R)`.

Exercício 274) △ $<h_a, e_a, r>$ `(h_a,e_a,r)`.

Exercício 275) $<h_a, e_b, r>$ `(h_a,e_b,r)`.

Exercício 276) △ $<h_a, e_a, r_a>$ `(h_a,e_a,r_a)`.

Exercício 277) △ $<h_a, e_a, r_b>$ (h_a,e_a,r_b).

Exercício 278) $<h_a, e_b, r_a>$ (h_a,e_b,r_a).

Exercício 279) $<h_a, e_b, r_b>$ (h_a,e_b,r_b).

Exercício 280) $<h_a, e_b, r_c>$ (h_a,e_b,r_c).

Exercício 281) △ $<h_a, R, r>$ (h_a,R,r).

Exercício 282) △ $<h_a, R, r_a>$ (h_a,R,r_a).

Exercício 283) △ $<h_a, R, r_b>$ (h_a,R,r_b).

Exercício 284) ▲ $<h_a, r, r_a>$ (h_a,r,r_a).

Exercício 285) △ $<h_a, r, r_b>$ (h_a,r,r_b).

Exercício 286) △ $<h_a, r_a, r_b>$ (h_a,r_a,r_b).

Exercício 287) ▲ $<h_a, r_b, r_c>$ (h_a,r_b,r_c).

Exercício 288) △ $<m_a, m_b, m_c>$ (m_a,m_b,m_c).

Exercício 289) $<m_a, m_b, d_a>$ (m_a,m_b,d_a).

Exercício 290) $<m_a, m_b, d_c>$ (m_a,m_b,d_c).

Exercício 291) $<m_a, m_b, e_a>$ (m_a,m_b,e_a).

Exercício 292) $<m_a, m_b, e_c>$ (m_a,m_b,e_c).

Exercício 293) $<m_a, m_b, R>$ (m_a,m_b,R).

Exercício 294) $<m_a, m_b, r>$ (m_a,m_b,r).

Exercício 295) $<m_a, m_b, r_a>$ (m_a,m_b,r_a).

Exercício 296) $<m_a, m_b, r_c>$ (m_a,m_b,r_c).

Exercício 297) $<m_a, d_a, d_b>$ (m_a,d_a,d_b).

Exercício 298) $<m_a, d_b, d_c>$ (m_a,d_b,d_c).

Exercício 299) △ $<m_a, d_a, e_a>$ (m_a,d_a,e_a).

Exercício 300) $<m_a, d_a, e_b>$ (m_a,d_a,e_b).

Exercício 301) $<m_a, d_b, e_a>$ (m_a,d_b,e_a).

Exercício 302) △ $<m_a, d_b, e_b>$ (m_a,d_b,e_b).

Exercício 303) $<m_a, d_b, e_c>$ (m_a,d_b,e_c).

Exercício 304) △ $<m_a, d_a, R>$ (m_a,d_a,R).

Exercício 305) $<m_a, d_b, R>$ (m_a,d_b,R).

Exercício 306) $\langle m_a, d_a, r \rangle$ `(m_a,d_a,r).`

Exercício 307) $\langle m_a, d_b, r \rangle$ `(m_a,d_b,r).`

Exercício 308) $\langle m_a, d_a, r_a \rangle$ `(m_a,d_a,r_a).`

Exercício 309) $\langle m_a, d_a, r_b \rangle$ `(m_a,d_a,r_b).`

Exercício 310) $\langle m_a, d_b, r_a \rangle$ `(m_a,d_b,r_a).`

Exercício 311) $\langle m_a, d_b, r_b \rangle$ `(m_a,d_b,r_b).`

Exercício 312) $\langle m_a, d_b, r_c \rangle$ `(m_a,d_b,r_c).`

Exercício 313) $\langle m_a, e_a, e_b \rangle$ `(m_a,e_a,e_b).`

Exercício 314) $\langle m_a, e_b, e_c \rangle$ `(m_a,e_b,e_c).`

Exercício 315) △ $\langle m_a, e_a, R \rangle$ `(m_a,e_a,R).`

Exercício 316) $\langle m_a, e_b, R \rangle$ `(m_a,e_b,R).`

Exercício 317) $\langle m_a, e_a, r \rangle$ `(m_a,e_a,r).`

Exercício 318) $\langle m_a, e_b, r \rangle$ `(m_a,e_b,r).`

Exercício 319) $\langle m_a, e_a, r_a \rangle$ `(m_a,e_a,r_a).`

Exercício 320) $\langle m_a, e_a, r_b \rangle$ `(m_a,e_a,r_b).`

Exercício 321) $\langle m_a, e_b, r_a \rangle$ `(m_a,e_b,r_a).`

Exercício 322) $\langle m_a, e_b, r_b \rangle$ `(m_a,e_b,r_b).`

Exercício 323) $\langle m_a, e_b, r_c \rangle$ `(m_a,e_b,r_c).`

Exercício 324) $\langle m_a, R, r \rangle$ `(m_a,R,r).`

Exercício 325) $\langle m_a, R, r_a \rangle$ `(m_a,R,r_a).`

Exercício 326) $\langle m_a, R, r_b \rangle$ `(m_a,R,r_b).`

Exercício 327) △ $\langle m_a, r, r_a \rangle$ `(m_a,r,r_a).`

Exercício 328) △ $\langle m_a, r, r_b \rangle$ `(m_a,r,r_b).`

Exercício 329) △ $\langle m_a, r_a, r_b \rangle$ `(m_a,r_a,r_b).`

Exercício 330) △ $\langle m_a, r_b, r_c \rangle$ `(m_a,r_b,r_c).`

Exercício 331) $\langle d_a, d_b, d_c \rangle$ `(d_a,d_b,d_c).`

Exercício 332) $\langle d_a, d_b, e_a \rangle$ `(d_a,d_b,e_a).`

Exercício 333) $\langle d_a, d_b, e_c \rangle$ `(d_a,d_b,e_c).`

Exercício 334) $\langle d_a, d_b, R \rangle$ `(d_a,d_b,R).`

Exercício 335) $<d_a, d_b, r>$ `(d_a,d_b,r).`

Exercício 336) $<d_a, d_b, r_a>$ `(d_a,d_b,r_a).`

Exercício 337) $<d_a, d_b, r_c>$ `(d_a,d_b,r_c).`

Exercício 338) $<d_a, e_a, e_b>$ `(d_a,e_a,e_b).`

Exercício 339) $<d_a, e_b, e_c>$ `(d_a,e_b,e_c).`

Exercício 340) $\triangle$ $<d_a, e_a, R>$ `(d_a,e_a,R).`

Exercício 341) $<d_a, e_b, R>$ `(d_a,e_b,R).`

Exercício 342) $\triangle$ $<d_a, e_a, r>$ `(d_a,e_a,r).`

Exercício 343) $<d_a, e_b, r>$ `(d_a,e_b,r).`

Exercício 344) $\triangle$ $<d_a, e_a, r_a>$ `(d_a,e_a,r_a).`

Exercício 345) $\triangle$ $<d_a, e_a, r_b>$ `(d_a,e_a,r_b).`

Exercício 346) $<d_a, e_b, r_a>$ `(d_a,e_b,r_a).`

Exercício 347) $<d_a, e_b, r_b>$ `(d_a,e_b,r_b).`

Exercício 348) $<d_a, e_b, r_c>$ `(d_a,e_b,r_c).`

Exercício 349) $<d_a, R, r>$ `(d_a,R,r).`

Exercício 350) $<d_a, R, r_a>$ `(d_a,R,r_a).`

Exercício 351) $<d_a, R, r_b>$ `(d_a,R,r_b).`

Exercício 352) $\triangle$ $<d_a, r, r_a>$ `(d_a,r,r_a).`

Exercício 353) $<d_a, r, r_b>$ `(d_a,r,r_b).`

Exercício 354) $<d_a, r_a, r_b>$ `(d_a,r_a,r_b).`

Exercício 355) $\triangle$ $<d_a, r_b, r_c>$ `(d_a,r_b,r_c).`

Exercício 356) $<e_a, e_b, e_c>$ `(e_a,e_b,e_c).`

Exercício 357) $<e_a, e_b, R>$ `(e_a,e_b,R).`

Exercício 358) $<e_a, e_b, r>$ `(e_a,e_b,r).`

Exercício 359) $<e_a, e_b, r_a>$ `(e_a,e_b,r_a).`

Exercício 360) $<e_a, e_b, r_c>$ `(e_a,e_b,r_c).`

Exercício 361) $<e_a, R, r>$ `(e_a,R,r).`

Exercício 362) $<e_a, R, r_a>$ `(e_a,R,r_a).`

Exercício 363) $<e_a, R, r_b>$ `(e_a,R,r_b).`

Exercício 364) △ $<e_a, r, r_a>$ `(e_a,r,r_a).`

Exercício 365) $<e_a, r, r_b>$ `(e_a,r,r_b).`

Exercício 366) $<e_a, r_a, r_b>$ `(e_a,r_a,r_b).`

Exercício 367) △ $<e_a, r_b, r_c>$ `(e_a,r_b,r_c).`

Exercício 368) △ $<R, r, r_a>$ `(R,r,r_a).`

Exercício 369) △ $<R, r_a, r_b>$ `(R,r_a,r_b).`

Exercício 370) △ $<r, r_a, r_b>$ `(r,r_a,r_b).`

Exercício 371) △ $<r_a, r_b, r_c>$ `(r_a,r_b,r_c).`

CAPÍTULO 4

CONSTRUÇÕES E SOLUÇÕES ALGÉBRICAS

Exercício 151) $<a, h_b, d_b>$

Método do problema já resolvido

Como $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 180° - \gamma_1$$

Conhecemos então $<\gamma, a, d_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 32).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 152) $<a, h_b, d_c>$

Método do problema já resolvido

Como $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 180° - \gamma_1$$

Conhecemos então $<\gamma, a, d_c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 30).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 153) $<a, h_a, e_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<h_a, e_a, d_a>$ formam um datum, conhecemos $<a, h_a, d_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 148).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 154) $<a, h_a, e_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\sin\beta = 2\sin\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} \tag{4.1}$$

$$h_a = c\sin\beta \Longrightarrow \sin\beta = \frac{h_a}{c} \tag{4.2}$$

$$e_b = \frac{2ac\sin\frac{\beta}{2}}{|c-a|} \tag{4.3}$$

Com as equações (4.1) e (4.2) obtém-se

$$\sin\tfrac{\beta}{2} = \frac{h_a\sqrt{2c}}{2c\sqrt{c \pm \sqrt{c^2 - h_a^2}}} \tag{4.4}$$

Substituindo o (os) valor de $\sin\frac{\beta}{2}$ dado por (4.4) em (4.3), resulta

$$c^4 + \frac{4a(2a^2 - e_b^2)}{e_b^2 - 4a^2}c^3 + \frac{6e_b^4 a^2 - 4e_b^2 a^4 + 4h_a^2 a^4}{(e_b^2 - 4a^2)e_b^2}c^2 - \frac{4e_b^2 a^3}{e_b^2 - 4a^2}c + \frac{e_b^2 a^4}{e_b^2 - 4a^2} = 0 \tag{4.5}$$

Como $<a, h_a, e_b>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.5) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.5) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $h_a = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$ e $e_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.5) torna-se

$$c^4 - \frac{230}{7}c^3 + \frac{2235{,}75}{7}c^2 - \frac{8000}{7}c + \frac{10000}{7} = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se duas raízes positivas, as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$c_1 = \ 8\,\mathrm{cm} \implies b_1 = 7\,\mathrm{cm} \quad (\cos\beta_1 = \frac{\sqrt{c_1^2 - h_a^2}}{c_1})$$

$$c_2 = 19{,}010880\,4\,\mathrm{cm} \implies b_2 = 23{,}737069\,6\,\mathrm{cm} \quad (\cos\beta_2 = -\frac{\sqrt{c_2^2 - h_a^2}}{c_2})$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $\langle a, b_1, c_1\rangle$ e $\langle a, b_2, c_2\rangle$ satisfazem todas as condições do problema.

Observação: o problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\mathbf{BC}E_b$. Uma análise da figura 4.122 (ver o exercício 149) nos mostrará que o ponto E_b possui duas propriedades:

i) pertence à circunferência $\phi_3 = (\mathbf{B}, e_b)$;

ii) pertence à curva (cônica) ϕ_2 dada por

$$h_a x^2 + 2axy + h_a y^2 - 2ah_a x = 0 \qquad (4.6)$$

A equação (4.6) representa o lugar geométrico descrito por E_b quando o ponto livre A′ percorre a reta $\mathfrak{a}'$, lugar geométrico dos pontos cuja distância à reta que contém os pontos **B** e **C** (reta $\mathfrak{a}$) vale h_a (para a prova de (4.6), ver o exercício 149).

A figura 4.122 é a solução geométrica dada pela equação (†).

Exercício 155) $\langle a, h_b, e_a\rangle$

Método do problema já resolvido

Como $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \mathrm{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1$$

Conhecemos então $\langle\gamma, a, e_a\rangle$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 36). Vimos quando da resolução do exercício 36 que devemos resolver a equação

$$c^6 - 2b\cos\alpha c^5 + \frac{b^2 - b^2\cos^2\alpha - e_b^2}{1-\cos^2\alpha}c^4 + \frac{2be_b^2\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c^3 + \\ + \frac{e_b^2(e_b^2\cos^2\alpha - b^2)}{1-\cos^2\alpha}c^2 - \frac{be_b^4\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}c + \frac{b^2e_b^4}{4(1-\cos^2\alpha)} = 0 \qquad (4.7)$$

Com $\gamma = \gamma_1$, a equação (4.7) aplicada com os dados acima torna-se

$$b^6 - 2a\cos\gamma_1 b^5 + \frac{a^2 - a^2\cos^2\gamma_1 - e_a^2}{1-\cos^2\gamma_1}b^4 + \frac{2ae_a^2\cos\gamma_1}{1-\cos^2\gamma_1}b^3 + \\ + \frac{e_a^2(e_a^2\cos^2\gamma_1 - a^2)}{1-\cos^2\gamma_1}b^2 - \frac{ae_a^4\cos\gamma_1}{1-\cos^2\gamma_1}b + \frac{a^2e_a^4}{4(1-\cos^2\gamma_1)} = 0 \qquad (4.8)$$

Como $< \cos\gamma_1 \ (\cos\gamma_1 = \frac{\sqrt{a^2-h_b^2}}{a}), a, e_a >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.8) com um programa qualquer para obter b.

Com $\gamma = \gamma_2$, a equação (4.7) aplicada com os dados acima torna-se

$$b^6 - 2a\cos\gamma_2 b^5 + \frac{a^2 - a^2\cos^2\gamma_2 - e_a^2}{1-\cos^2\gamma_2}b^4 + \frac{2ae_a^2\cos\gamma_2}{1-\cos^2\gamma_2}b^3 + \\ + \frac{e_a^2(e_a^2\cos^2\gamma_2 - a^2)}{1-\cos^2\gamma_2}b^2 - \frac{ae_a^4\cos\gamma_2}{1-\cos^2\gamma_2}b + \frac{a^2e_a^4}{4(1-\cos^2\gamma_2)} = 0 \qquad (4.9)$$

Como $< \cos\gamma_2 \ (\cos\gamma_2 = -\frac{\sqrt{a^2-h_b^2}}{a}), a, e_a >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.9) com um programa qualquer para obter b. Entretanto, como os coeficientes de b^5, b^3 e b em (4.8) e (4.9) são simétricos (pois $\cos\gamma_1 = -\cos\gamma_2$) e os de b^6, b^4, b^2 e b^0 (o termo independente) são iguais, as raízes de (4.8) e (4.9) são simétricas. Logo, não precisamos calcular as raízes de (4.9).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $h_b = \frac{20\sqrt{3}}{7}\,\text{cm}$ e $e_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$.

Com estes valores, tem-se $\cos\gamma_1 = \frac{1}{7}$ e a equação (4.8) torna-se

$$b^6 - \frac{10}{7}b^5 - 1347b^4 + 1960b^3 + 3332b^2 - 1317120b + 11524800 = 0 \qquad (\dagger)$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se duas raízes positivas e duas raízes negativas (raízes positivas de (4.9)), as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$b_1 = \ 36{,}935124\,6\,\text{cm} \implies c_1 = \sqrt{25 + b_1^2 - \frac{10}{7}b_1} = 36{,}557338\,0\,\text{cm}$$

$$b_2 = \ 7\,\text{cm} \implies c_2 = 8\,\text{cm}$$

$$b_3' = -11{,}976505\,2\,\text{cm} \implies b_3 = -b_3' \text{ e } c_3 = \sqrt{25 + b_3^2 + \frac{10}{7}b_3} = 13{,}621525\,9\,\text{cm}$$

$$b_4' = -36{,}227301\,2\,\text{cm} \implies b_4 = -b_4' \text{ e } c_4 = 37{,}271579\,5\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $< a, b_2, c_2 >$ e $< a, b_3, c_3 >$ satisfazem todas as condições do problema e que $< a, b_1, c_1 >$ e $< a, b_4, c_4 >$ são soluções estranhas.

Exercício 156) $<a, h_b, e_b>$

Método do problema já resolvido

Como $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 180° - \gamma_1$$

Conhecemos então $<\gamma, a, e_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 37).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 157) $<a, h_b, e_c>$

Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle \mathbf{BC}H_b$ e o ponto E_c. Uma análise da figura 4.123 nos mostrará que o ponto H_b possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **B** vale h_b;

ii) um observador colocado em H_b enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo reto (H_b pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Quanto ao ponto E_c, ele possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto **C** vale e_c;

ii) pertence à bissetriz externa (reta $\mathfrak{e}_c$) do ângulo γ.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.123 e o exercício 35):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o arco (círculo) ϕ_1;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{B}, h_b)$ e obter o ponto H_b ($H_b = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar as retas $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, H_b)$ e $\mathfrak{e}_c$; traçar o arco $\phi_3 = (\mathbf{C}, e_c)$ e obter o ponto E_c ($E_c = \mathfrak{e}_c \cap \phi_3$);

v) traçar a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, E_c)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$).

Discussão: o problema possui 0, 1, 2, 3 ou 4 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$, $\triangle\,\mathbf{A'BC}$, $\triangle\,\mathbf{A''BC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'''BC}$) soluções.

Observação: para uma discussão mais aprofundada deste problema, ver o exemplo C.8 no Apêndice C.

this is BrickRed ok

Exercício 158) $< a, h_a, R >$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $< a, R, \alpha >$ formam um datum ($\sin\alpha = a/2R$), podemos construir o(s) ângulo(s) do vértice $\mathbf{A}$ (α e $180° - \alpha$). Conhecemos então $< \alpha, a, h_a >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 18).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 4.124 nos mostrará que o ponto $\mathbf{A}$ possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale h_a;

ii) pertence ao círculo circunscrito Γ.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.124):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando h_a desta;

iii) construir o círculo Γ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

Exercício 159) $<a, h_b, R>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $<\alpha, a, R>$ formam um datum ($a = 2R \sin \alpha$), podemos construir o(s) ângulo(s) do vértice **A** (α e $180° - \alpha$). Conhecemos então $<\alpha, a, h_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 19).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 4.125 nos mostrará que o ponto **A** possui duas propriedades:

i) pertence à reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, H_b)$;

ii) pertence ao círculo circunscrito Γ.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.125):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o arco (círculo) capaz—ϕ_1—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$);

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{B}, h_b)$ e obter o ponto H_b ($H_b = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, H_b)$;

v) construir o círculo Γ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

Exercício 160) $<a, h_a, r>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Vimos ao final do teorema 2.8 em [8] que $r_a = r + a \tan \frac{\alpha}{2}$. Ou $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r_a - r}{a}$. Vimos também no teorema 2.10 em [8] que $r_a = \frac{h_a r}{h_a - 2r}$. Logo,

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2r^2}{a(h_a - 2r)}$$

Assim, conhecemos $<\alpha, a, h_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 18).

Observação: este procedimento pode ser visto em [5] e em [6].

Segundo procedimento – Método do problema já resolvido

Vimos no teorema 2.10 em [8] que $<h_a, r, r_a>$ formam um datum. Podemos então construir o raio r_a do círculo γ_a. No teorema 2.12 em [8], vimos que $<a, (r_a - r), R>$ formam um datum. Logo, podemos construir o raio R do círculo Γ. Assim, conhecemos $<a, h_a, R>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 158).

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{A}IY$ (figura auxiliar). Uma análise da figura 4.126 (ver a página 72) nos mostrará que $\measuredangle\mathbf{A}YI = 90°$, $YI = r$ e, como visto em [8]), $\mathbf{A}Y = p - a$, onde $\frac{2r}{h_a} = \frac{a}{p}$. Temos então os dados do exercício 17 e podemos assim construir o $\triangle\,\mathbf{A}IY$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.126, na página 72):

i) construir os comprimentos p e r_a tais que $\frac{2r}{h_a} = \frac{a}{p}$ e $\frac{h_a - 2r}{r} = \frac{h_a}{r_a}$, respectivamente;

ii) numa reta $\mathfrak{b}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{A}$ e Y tais que $\mathbf{A}Y = p - a$. Conduzir pelo ponto Y a reta $\mathfrak{r}$ perpendicular à reta $\mathfrak{b}$ e obter o ponto I ($I \in \mathfrak{r}$ e $YI = r$). Tem-se assim o $\triangle\,\mathbf{A}IY$;

iii) traçar a reta $\mathfrak{d}_a = (\mathbf{A}, I)$ e obter o ponto I_a usando r_a;

iv) traçar o círculo inscrito $\gamma_i = (I, r)$ e obter o ponto Z ($Z \in \gamma_i$ e $\mathbf{A}Z = \mathbf{A}Y$). Traçar a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{A}, Z)$;

v) traçar o círculo ϕ_1 de diâmetro $\overline{II_a}$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \phi_1$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi_1$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Observação: a reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ é uma das duas tangentes comuns exteriores aos círculos $\phi_2 = (\mathbf{A}, h_a)$ e γ_i. Sabendo disso, não haveria necessidade de construir o comprimento r_a, o ponto I_a e o círculo ϕ_1. A figura 4.127 (ver a página 73) mostra como seria a construção neste caso.

Quarto procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Estabelecendo um sistema de coordenadas cartesianas com o incentro I na origem e o eixo das ordenadas a reta perpendicular à reta horizontal $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$, então $I = (0, 0)$, $X = (0, -r)$ e $\mathfrak{a}$ é dada por $y = -r$. Assim, $\mathbf{B} = (x_{\mathbf{B}}, -r)$ e $\mathbf{C} = (x_{\mathbf{C}}, -r)$.

Quanto ao ponto **A**, vemos em `<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2172.pdf>` (com uma pequena alteração na notação) que ele possui duas propriedades:

i) pertence à reta horizontal $\mathfrak{a}'$ dada por $y = h_a - r$;

ii) pertence à hipérbole $\mathcal{H}$ dada por

$$4r^2x^2 - (a^2 - 4r^2)y^2 + 2a^2ry - r^2(a^2 + 4r^2) = 0 \quad (4.10)$$

A construção com régua e compasso da interseção de uma reta com uma cônica pode ser vista em [3], por exemplo. No caso de a cônica ser uma hipérbole, precisa-se conhecer os focos, diretrizes e excentricidade e para tal colocaremos (4.10) na forma

$$\frac{(y - y_0)^2}{u^2} - \frac{x^2}{v^2} = 1$$

Fazendo-se os cálculos necessários, obtemos:

$$y_0 = \frac{a^2 r}{a^2 - 4r^2}$$
$$u = \frac{4r^3}{a^2 - 4r^2}$$
$$v = \frac{2r^2}{\sqrt{a^2 - 4r^2}}$$

Seguindo [2], a descrição dos valores constantes de (4.10) é agora imediata:

Eixo transverso : $2u$

Eixo conjugado : $2v$

Centro : $(x_0, y_0) = (0, \frac{a^2 r}{a^2 - 4r^2})$

Vértices : $(0, y_0 \pm u)$

Focos : $\big(0, y_0 \pm \frac{2ar^2}{a^2 - 4r^2}\big) = \big(0, \frac{ar}{a \pm 2r}\big)$

Excentricidade : $e = \sqrt{1 + (\frac{v}{u})^2} = \frac{a}{2r}$

Diretrizes : $y = y_0 \pm \frac{u}{e} = y_0 \pm \frac{2ru}{a}$

Assíntotas : $y = y_0 \pm \frac{u}{v} x$

Latus rectum : $\frac{2v^2}{u}$

Daí a construção que segue (ver a figura 4.128, na página 74):

i) construir os comprimentos $\ell_1 = \frac{r(a^2+4r^2)}{a^2-4r^2}$, $\ell_2 = \frac{ar}{a-2r}$ e $\ell_3 = y_0 + \frac{2ru}{a}$;

ii) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto X e construir a reta $\mathfrak{h}$ ($X \in \mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h} \perp \mathfrak{a}$); traçar o arco $\phi_1 = (X, r)$ e obter o ponto I ($I = \mathfrak{h} \cap \phi_1$); traçar o círculo inscrito $\gamma_i = (I, r)$; traçar a reta $\mathfrak{a}''$ ($I \in \mathfrak{a}''$ e $\mathfrak{a}'' \parallel \mathfrak{a}$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}''$ e distante $h_a - r$ desta; traçar a reta $\mathfrak{d}$ (diretriz) paralela à reta $\mathfrak{a}''$ e distante ℓ_3 desta;

iv) traçar os arcos $\phi_2 = (I, \ell_1)$ e $\phi_3 = (I, \ell_2)$ e obter o vértice $\mathscr{V}_1$ ($\mathscr{V}_1 = \mathfrak{h} \cap \phi_2$) e o foco $\mathscr{F}_1$ ($\mathscr{F}_1 = \mathfrak{h} \cap \phi_3$) do ramo superior da hipérbole $\mathcal{H}$;

v) seja ℓ_4 a distância entre as retas $\mathfrak{d}$ e $\mathfrak{a}'$; construir o comprimento $\ell_5 = e\ell_4 = \frac{a\ell_4}{2r}$; traçar o círculo $\phi_4 = (\mathscr{F}_1, \ell_5)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \phi_4$);

vi) construir pelo ponto $\mathbf{A}$ as tangentes (retas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$) ao círculo γ_i e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

Exercício 161) $< a, h_b, r >$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $\sin \gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1$$

Conhecemos então $< \gamma, a, r >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 41).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{BC}H_b$ e o círculo γ_i. Uma análise da figura 4.129 nos mostrará que o ponto H_b possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{B}$ vale h_b;

ii) um observador colocado em H_b enxerga o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ segundo um ângulo reto (H_b pertence ao arco capaz—ϕ_1— do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{BC}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.129):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o arco (círculo) ϕ_1;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{B}, h_b)$ e obter o ponto H_b ($H_b = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, H_b)$ e obter o ângulo γ. Obter o ponto I e traçar o círculo γ_i. Obter o ponto X;

v) obter o ponto Z e traçar a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{B}, Z)$. Obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

Exercício 162) $\quad <a, h_a, r_a>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Vimos no teorema 2.10 em [8] que $<h_a, r_a, r>$ formam um datum. Podemos então construir o raio r do círculo γ_i. No teorema 2.12 em [8], vimos que $<a, (r_a - r), R>$ formam um datum. Logo, podemos construir o raio R do círculo Γ. Assim, conhecemos $<a, h_a, R>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 158).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{A}I_aY_a$. Uma análise da figura 4.130 nos mostrará que $\measuredangle \mathbf{A}Y_aI_a = 90°$, $Y_aI_a = r_a$ e, como visto na página 21 e no teorema 2.8, ambos no Capítulo 2 de [8], $\mathbf{A}Y_a = p$, onde $\frac{2r_a}{h_a} = \frac{a}{p-a}$. Podemos então construir o $\triangle\,\mathbf{A}I_aY_a$ (ver o exercício 17).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.130):

i) construir os segmentos ℓ e r tais que $\frac{2r_a}{h_a} = \frac{a}{\ell}$ e $\frac{2r_a+h_a}{r_a} = \frac{h_a}{r}$, respectivamente; em seguida, obter $p = \ell + a$;

ii) numa reta $\mathfrak{b}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{A}$ e Y_a tais que $\mathbf{A}Y_a = p$. Conduzir pelo ponto Y_a a reta $\mathfrak{r}$ perpendicular à reta $\mathfrak{b}$ e obter o ponto I_a ($I_a \in \mathfrak{r}$ e $Y_a I_a = r_a$). Tem-se assim o $\triangle\, \mathbf{A}I_a Y_a$;

iii) traçar a reta $\mathfrak{d}_a = (\mathbf{A}, I_a)$ e obter o ponto I usando r;

iv) traçar o círculo exinscrito $\gamma_a = (I_a, r_a)$ e obter o ponto Z_a ($Z_a \in \gamma_a$ e $\mathbf{A}Z_a = \mathbf{A}Y_a$). Traçar a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{A}, Z_a)$;

v) traçar o círculo ϕ_1 de diâmetro $\overline{II_a}$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \phi_1$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi_1$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Observação: a reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ é uma das duas tangentes comuns interiores aos círculos $\phi_2 = (\mathbf{A}, h_a)$ e γ_a. Sabendo disso, não haveria necessidade de construir o comprimento r, o ponto I e o círculo ϕ_1. A figura 4.131 mostra como seria a construção neste caso.

Exercício 163) $<a, h_a, r_b>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Vimos no teorema 2.11 em [8] que $<h_a, r_b, r_c>$ formam um datum. Podemos então construir o raio r_c do círculo γ_c. No teorema 2.13 em [8], vimos que $<a, (r_b + r_c), R>$ formam um datum. Logo, podemos construir o raio R do círculo Γ. Assim, conhecemos $<a, h_a, R>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 158).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\, \mathbf{A}I_b Z_b$. Uma análise da figura 4.132 nos mostrará que $\measuredangle \mathbf{A}Z_b I_b = 90°$, $Z_b I_b = r_b$ e, como visto na página 21 no Capítulo 2 de [8], $\mathbf{A}Z_b = p - c$. Como $ah_a = 2r_b(p-b)$, podemos construir o segmento $\ell = p - b$. Então $\mathbf{A}Z_b + \ell = 2p - (b+c) = a$. Assim, $\mathbf{A}Z_b = a - \ell$ é conhecido. Portanto, podemos construir o $\triangle\, \mathbf{A}I_b Z_b$ (ver o exercício 17).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.132):

i) construir os segmentos ℓ e r_c tais que $\frac{2r_b}{h_a} = \frac{a}{\ell}$ e $\frac{2r_b - h_a}{h_a} = \frac{r_b}{r_c}$, respectivamente; em seguida, obter $\mathbf{A}Z_b = a - \ell$;

ii) numa reta $\mathfrak{c}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{A}$ e Z_b tais que $\mathbf{A}Z_b = a-\ell$. Conduzir pelo ponto Z_b a reta $\mathfrak{r}$ perpendicular à reta $\mathfrak{c}$ e obter o ponto I_b ($I_b \in \mathfrak{r}$ e $Z_bI_b = r_b$). Tem-se assim o $\triangle\,\mathbf{A}I_bZ_b$ (notar que $\measuredangle \mathbf{A}I_bZ_b = \alpha/2$ e conhecemos $<\alpha, a, h_a>$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{c}_a = (\mathbf{A}, I_b)$ e obter o ponto I_c usando r_c;

iv) traçar o círculo exinscrito $\gamma_b = (I_b, r_b)$ e obter o ponto Y_b ($Y_b \in \gamma_b$ e $\mathbf{A}Y_b = \mathbf{A}Z_b$). Traçar a reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{A}, Y_b)$;

v) traçar o círculo ϕ_1 de diâmetro $\overline{I_bI_c}$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{c} \cap \phi_1$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \phi_1$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Observação: a reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ é uma das duas tangentes comuns exteriores aos círculos $\phi_2 = (\mathbf{A}, h_a)$ e γ_b. Sabendo disso, não haveria necessidade de construir o comprimento r_c, o ponto I_c e o círculo ϕ_1. A figura 4.133 mostra como seria a construção neste caso.

Exercício 164) $<a, h_b, r_a>$

Método do problema já resolvido

Como $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1$$

Conhecemos então $<\gamma, a, r_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 45).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 165) $<a, h_b, r_b>$

Método do problema já resolvido

Como $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1$$

Conhecemos então $<\gamma, a, r_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 46).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 166) $<a, h_b, r_c>$

Método do problema já resolvido

Como $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$,

$$\gamma_1 = \text{Arcsin}\,\frac{h_b}{a} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1$$

Conhecemos então $<\gamma, a, r_c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 44).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 167) $<a, m_a, m_b>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

Considere as retas $\mathfrak{m}_a = (\mathbf{A}, M_a)$ e $\mathfrak{m}'_a$ ($M_b \in \mathfrak{m}'_a$ e $\mathfrak{m}'_a \parallel \mathfrak{m}_a$). O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{B}M_b\mathcal{M}_a$, onde $\mathcal{M}_a = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}'_a$. Uma análise da figura 4.134 nos mostrará que o ponto $\mathcal{M}_a$ possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{B}$ vale $\frac{3}{4}a$;

ii) sua distância ao ponto M_b vale $\frac{1}{2}m_a$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.134):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$, M_a, $\mathcal{M}_a$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{B}M_a = \frac{1}{2}a$, $\mathbf{B}\mathcal{M}_a = \frac{3}{4}a$ e $\mathbf{BC} = a$;

ii) traçar os arcos $\phi_1 = (\mathbf{B}, m_b)$ e $\phi_2 = (\mathcal{M}_a, \frac{1}{2}m_a)$ e obter o ponto M_b ($M_b = \phi_1 \cap \phi_2$);

iii) traçar as retas $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, M_b)$ e $\mathfrak{m}_a$ ($M_a \in \mathfrak{m}_a$ e $\mathfrak{m}_a \parallel \mathfrak{m}'_a = (\mathcal{M}_a, M_b)$) e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}_a$).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{BC}G$ onde, como definido no Capítulo 1 em [8], G é o baricentro (ponto comum das três medianas) do triângulo. Uma análise da figura 4.135 (ver a página 81) nos mostrará que o ponto G possui duas propriedades (para a prova, ver [1] ou [9], por exemplo):

i) sua distância ao ponto **B** vale $\frac{1}{3}2m_b$;

ii) sua distância ao ponto M_a vale $\frac{1}{3}m_a$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.135, na página 81):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B**, M_a e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$ e $M_a\mathbf{B} = M_a\mathbf{C}$;

ii) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{B}, \frac{1}{3}2m_b)$;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (M_a, \frac{1}{3}m_a)$ e obter o ponto G ($G = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar o arco $\phi_3 = (M_a, m_a)$;

v) traçar a reta $\mathfrak{m}_a = (M_a, G)$ definida pelos pontos M_a e G e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \mathfrak{m}_a \cap \phi_3$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 168) $<a, m_b, m_c>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

Seja $\mathcal{P} \in \mathfrak{a}$ tal que $C\mathcal{P} = a/2$. O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{B}\mathcal{P}M_b$. Uma análise da figura 4.136 nos mostrará que o quadrilátero $\diamondsuit\,M_c\mathbf{C}\mathcal{P}M_b$ é um paralelogramo pois tem dois lados opostos paralelos e congruentes ($\overline{M_cM_b} \parallel \overline{\mathbf{C}\mathcal{P}}$ e $M_cM_b = \mathbf{C}\mathcal{P} = a/2$). Logo, $\mathcal{P}M_b = \mathbf{C}M_c = m_c$ e conhecemos os comprimentos dos três lados do $\triangle\,\mathbf{B}\mathcal{P}M_b$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.136 e o exercício 128):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B**, **C** e $\mathcal{P}$ tais que $\mathbf{BC} = a$ e $\mathbf{C}\mathcal{P} = \frac{a}{2}$;

ii) traçar os arcos $\phi_1 = (\mathbf{B}, m_b)$ e $\phi_2 = (\mathcal{P}, m_c)$ e obter o ponto M_b ($M_b = \phi_1 \cap \phi_2$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, M_b)$ e obter o ponto **A**, simétrico de **C** em relação a M_b.

Observação: reparar na transformação homotética de centro **B** e razão $k = \frac{3}{2}$ levando os pontos **C** e G nos pontos $\mathcal{P}$ e M_b, respectivamente.

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle \mathbf{BC}G$. Uma análise da figura 4.137 (ver a página 83) nos mostrará que o ponto G possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{B}$ vale $\frac{1}{3}2m_b$;

ii) sua distância ao ponto $\mathbf{C}$ vale $\frac{1}{3}2m_c$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.137):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$, M_a e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$ e $M_a\mathbf{B} = M_a\mathbf{C}$;

ii) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{B}, \frac{1}{3}2m_b)$;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{C}, \frac{1}{3}2m_c)$ e obter o ponto G ($G = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{m}_a = (M_a, G)$, definida pelos pontos M_a e G;

v) traçar o arco $\phi_3 = (G, 2GM_a)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{m}_a \cap \phi_3$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 169) $<a, m_a, d_a>$

Primeiro procedimento – Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \tag{4.11}$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.12}$$

Podendo construir u e v no sistema (4.13) abaixo, o problema estará resolvido pois os lados b e c serão os catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa u e altura igual a v^2/u.

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = u^2 \\ bc = v^2 \end{cases} \tag{4.13}$$

De (4.11) obtém-se

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = u^2$$

De (4.12) obtém-se

$$v^2 - \frac{a^2v^2}{u^2 + 2v^2} = d_a^2$$

$$v^4 + \frac{1}{4}(4m_a^2 - 4d_a^2 - a^2)v^2 - \frac{1}{4}(4m_a^2 + a^2)d_a^2 = 0 \tag{4.14}$$

A equação (4.14) é resolvida colocando-se

$$v^4 \pm w^2v^2 - z^4 = 0$$

e fazendo-se $v^2 = wy$, significando isto que v será a média geométrica de w e da raiz (ou cada uma das raízes) da equação

$$w^2y^2 \pm w^3y - z^4 = 0 \iff y^2 \pm wy - \left(\frac{z^2}{w}\right)^2 = 0$$

Finalmente,

$$w = \frac{\sqrt{4m_a^2 - 4d_a^2 - a^2}}{2}$$

e z pode ser construído da seguinte maneira:

$$z = \sqrt{\sqrt{\sqrt{m_a d_a}^4 + \sqrt{a\frac{d_a}{2}}^4}}$$

$$\ell_1 = \sqrt{m_a d_a} \qquad \ell_2 = \sqrt{a\frac{d_a}{2}}$$

$$z = \sqrt{\sqrt{\ell_1^4 + \ell_2^4}} = \sqrt{\sqrt{\ell_1^2\left(\ell_1^2 + \frac{\ell_2^4}{\ell_1^2}\right)}} = \sqrt{\ell_1\sqrt{\ell_1^2 + \left(\frac{\ell_2^2}{\ell_1}\right)^2}}$$

$$\ell_3 = \frac{\ell_2^2}{\ell_1} \qquad \ell_4 = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_3^2}$$

$$z = \sqrt{\ell_1 \ell_4}$$

Observação: para uma outra construção de z, mais elegante, ver [10].

Segundo procedimento – Método algébrico

Uma análise da figura 4.138 (ver a página 84) nos mostrará que o problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle \mathbf{A}DM_a$. Com este intuito, seguimos [7] e definimos os seguintes ângulos e comprimentos:

$$\measuredangle DD_aM_a = \varphi \qquad \measuredangle \mathbf{A}D_aM_a = \theta = 180^\circ - \varphi \implies \cos\theta = -\cos\varphi$$
$$D_aD = x \qquad M_aD = y \qquad D_aM_a = z$$

Escrevemos agora as seguintes equações:

$$\mathbf{B}D_a \cdot D_a\mathbf{C} = \mathbf{A}D_a \cdot D_aD \implies \left(\frac{a}{2} - z\right)\left(\frac{a}{2} + z\right) = d_a x \tag{4.15}$$

Usando os triângulos $\triangle \mathbf{A}D_aM_a$ e $\triangle DD_aM_a$, podemos escrever:

$$m_a^2 = d_a^2 + z^2 + 2d_a z\cos\varphi \tag{4.16}$$
$$0 = z - x\cos\varphi \tag{4.17}$$

Multiplicando os dois membros de (4.16) por x e os de (4.17) por $2d_a z$ e somando as duas equações obtidas, resulta:

$$xm_a^2 = 2d_a z^2 + d_a^2 x + z^2 x \tag{4.18}$$

Com (4.15) e (4.18) vamos calcular e construir x e em seguida y. De (4.15), obtemos $z^2 = \frac{a^2}{4} - d_a x$. Colocando este valor de z^2 em (4.18), vem:

$$xm_a^2 = 2d_a\left(\frac{a^2}{4} - d_a x\right) + d_a^2 x + \left(\frac{a^2}{4} - d_a x\right)x$$

Ou

$$4d_a x^2 + (4m_a^2 + 4d_a^2 - a^2)x - 2a^2 d_a = 0 \tag{4.19}$$

Devemos considerar três casos:

$$\text{Caso (I):} \quad a^2 < 4m_a^2 + 4d_a^2$$

Sejam

$$u = \frac{4m_a^2 + 4d_a^2 - a^2}{4d_a}$$
$$v^2 = \frac{a^2}{2} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2$$

Podemos então escrever (4.19) como

$$x(x+u) = v^2$$

e já sabemos como construir x.

Como $y^2 = x^2 - z^2$, então $y^2 = x^2 - \frac{a^2}{4} + d_a x = x(x + d_a) - \frac{a^2}{4}$. Ou

$$y = \sqrt{\left(\sqrt{x(x + d_a)}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

O $\triangle\,\mathbf{A}DM_a$ é agora construtível, pois conhecemos seus três lados (ver o exercício 128). Para obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, construímos o ponto O (O pertence à mediatriz (reta $\mathfrak{r}$) de $\overline{\mathbf{A}D}$ e à reta $\mathfrak{m} = (D, M_a)$) e o círculo circunscrito $\Gamma = (O, OD)$. Nas interseções da reta $\mathfrak{a}$ ($M_a \in \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{m}$) com Γ estão $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

Caso (II): $a^2 = 4m_a^2 + 4d_a^2$

Podemos escrever (4.19) como

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \implies x = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$$

ou seja, x é a metade da diagonal do quadrado de lado a. A construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$ prossegue como no caso (I).

Caso (III): $a^2 > 4m_a^2 + 4d_a^2$

Sejam

$$u = \frac{a^2 - 4m_a^2 - 4d_a^2}{4d_a}$$

$$v^2 = \frac{a^2}{2} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)$$

Podemos então escrever (4.19) como

$$x(x - u) = v^2$$

e já sabemos como construir x. A construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$ prossegue como no caso (I).

Discussão: como nos três casos só podemos construir um segmento x, o problema possui 0 ou 1 solução.

Terceiro procedimento – Método algébrico

Seja z a distância entre os pontos D_a e M_a, como denotado em [4]. O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{A}D_aM_a$ e para tal temos que construir o comprimento z do lado $\overline{D_aM_a}$.

Pode-se colocar o $\triangle\,\mathbf{ABC}$ num sistema de coordenadas cartesianas retangulares onde o ponto M_a é a origem e a reta $\mathfrak{a}$, o eixo x. Assim, as coordenadas dos pontos a seguir tomam os seguintes valores: $M_a = (0,0)$, $\mathbf{B} = (-\frac{a}{2}, 0)$, $\mathbf{C} = (\frac{a}{2}, 0)$, $D_a = (-z, 0)$ e $\mathbf{A} = (x_\mathbf{A}, y_\mathbf{A})$.

Para simplificar as equações que seguirão, colocamos $\ell = a/2$. Assim, $\mathbf{B} = (-\ell, 0)$ e $\mathbf{C} = (\ell, 0)$. Usando o teorema das bissetrizes (ver o teorema 2.2 em [8]), vem:

$$\frac{c}{b} = \frac{D_a\mathbf{B}}{\mathbf{C}D_a} \implies \frac{(x_\mathbf{A}+\ell)^2 + y_\mathbf{A}^2}{(x_\mathbf{A}-\ell)^2 + y_\mathbf{A}^2} = \frac{(\ell - z)^2}{(\ell + z)^2} \tag{4.20}$$

Os comprimentos dos segmentos $\overline{\mathbf{A}M_a}$ e $\overline{\mathbf{A}D_a}$ são as duas próximas equações:

$$x_\mathbf{A}^2 + y_\mathbf{A}^2 = m_a^2 \tag{4.21}$$

$$(x_\mathbf{A} + z)^2 + y_\mathbf{A}^2 = d_a^2 \tag{4.22}$$

Substituindo o valor de $y_\mathbf{A}^2$ dado por (4.21) em (4.22) e (4.20), vem:

$$x_\mathbf{A} = \frac{d_a^2 - m_a^2 - z^2}{2z} \tag{4.23}$$

$$\frac{\ell^2 + 2\ell x_\mathbf{A} + m_a^2}{\ell^2 - 2\ell x_\mathbf{A} + m_a^2} = \frac{(\ell - z)^2}{(\ell + z)^2} \tag{4.24}$$

E agora, substituindo o valor de $x_\mathbf{A}$ dado por (4.23) em (4.24) e simplificando, resulta:

$$z^4 - (m_a^2 + d_a^2 + \ell^2)z^2 + \ell^2(m_a^2 - d_a^2) = 0 \tag{4.25}$$

Logo, o comprimento z é construtível e deste modo pode-se construir o $\triangle\,\mathbf{ABC}$. Paul Yiu mostra em [12] uma construção engenhosa a partir do $\triangle\,\mathbf{A}D_aP_1$, com $\mathbf{A}D_a = d_a$, $\mathbf{A}P_1 = m_a$ e $D_aP_1 = \ell$. Escrevendo (ver a figura 2.1 do teorema 2.1 em [8]) $\ell^2 = m_a^2 + d_a^2 - 2d_a u$ e $z^2 = m_a^2 + d_a^2 - 2d_a w$, simplifica-se a equação (4.25) em

$$w(w-u) = \frac{1}{2}\ell^2 = \left(\sqrt{2}\frac{\ell}{2}\right)^2 \tag{4.26}$$

Note que u é o comprimento da projeção ortogonal do lado $\overline{\mathbf{A}P_1}$ sobre a reta $\mathfrak{d}_a$, enquanto que w é o comprimento da projeção ortogonal do lado $\overline{\mathbf{A}M_a}$ sobre a mesma reta. O comprimento w pode ser facilmente construído e com isso termina-se a construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.139, na página 85):

i) numa reta $\mathfrak{d}_a$ qualquer construir o segmento $\mathbf{A}D_a = d_a$; traçar o círculo $\phi_1 = (\mathbf{A}, m_a)$; traçar o círculo $\phi_2 = (D_a, \ell)$; obter o ponto P_1 ($P_1 = \phi_1 \cap \phi_2$);

ii) construir a reta $\mathfrak{r}$ ($P_1 \in \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{d}_a$); obter o ponto P_2 ($P_2 = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{d}_a$) e o comprimento $u = \mathbf{A}P_2$;

iii) construir o quadrado $\square P_1P_3P_4P_5$ ($P_3 \in \mathfrak{s} = (P_1, D_a)$) de lado $\ell/2$ e obter a reta $\mathfrak{t} = (P_1, P_4)$;

iv) construir a reta $\mathfrak{u}$ ($P_1 \in \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u} \perp \mathfrak{t}$); colocar o ponto P_6 na reta $\mathfrak{u}$ tal que $P_1P_6 = u$ e traçar o círculo ϕ_3 de diâmetro $\overline{P_1P_6}$ e centro $\mathfrak{O}$;

v) traçar a reta $\mathfrak{v} = (P_4, \mathfrak{O})$ e obter o ponto P_7 ($P_7 = \mathfrak{v} \cap \phi_3$); colocar o ponto $\mathcal{M}_a$ na reta $\mathfrak{d}_a$ tal que $\mathbf{A}\mathcal{M}_a = P_4P_7 = w$; construir a reta $\mathfrak{w}$ ($\mathcal{M}_a \in \mathfrak{w}$ e $\mathfrak{w} \perp \mathfrak{d}_a$); obter o ponto $M_a = \mathfrak{w} \cap \phi_1$;

vi) traçar a reta $\mathfrak{a} = (D_a, M_a)$; traçar o círculo $\phi_4 = (M_a, \ell)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \phi_4$) e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \phi_4$).

A construção apresentada pelo autor é trabalhosa e não aproveita os elementos da figura a ser obtida. Uma construção muito menos trabalhosa e bastante elegante foi mostrada por Paul Yiu em [12] (ver a figura 4.140, na página 86):

i) numa reta $\mathfrak{d}_a$ qualquer construir o segmento $\mathbf{A}D_a = d_a$; traçar os círculos $\phi_1 = (\mathbf{A}, m_a)$ e $\phi_2 = (D_a, \ell)$; obter os pontos P_1 ($P_1 = \phi_1 \cap \phi_2$) e M, médio de $\overline{\mathbf{A}P_1}$;

ii) traçar as retas $\mathfrak{s} = (D_a, P_1)$ e $\mathfrak{t} = (\mathbf{A}, P_1)$;

iii) construir o quadrado $\square P_1P_3P_4P_5$ ($P_3 \in \mathfrak{s}$) de lado $\ell/2$;

iv) construir a reta $\mathfrak{u}$ ($P_1 \in \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u} \perp \mathfrak{t}$); traçar o círculo $\phi_3 = (P_1, P_1P_4)$ e obter o ponto P_6 ($P_6 = \mathfrak{u} \cap \phi_3$);

v) traçar o círculo $\phi_4 = (M, MP_6)$ e obter o ponto $\mathcal{M}_a$ ($\mathcal{M}_a = \mathfrak{d}_a \cap \phi_4$); construir a reta $\mathfrak{w}$ ($\mathcal{M}_a \in \mathfrak{w}$ e $\mathfrak{w} \perp \mathfrak{d}_a$); obter o ponto $M_a = \mathfrak{w} \cap \phi_1$;

vi) traçar a reta $\mathfrak{a} = (D_a, M_a)$; traçar o círculo $\phi_5 = (M_a, \ell)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \phi_5$) e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \phi_5$).

Observação: prova-se que $\mathbf{A}\mathcal{M}_a = w$ satisfaz a equação (4.26) aplicando-se Pitágoras no $\triangle MP_6P_1$ e a lei dos cossenos no $\triangle \mathbf{A}\mathcal{M}_aM$ e sabendo que $P_1P_6 = P_1P_4 = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$ e $MP_6 = M\mathcal{M}_a$.

Quarto procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Uma análise da figura 4.141 (ver a página 87) nos mostrará que o ponto **A** possui duas propriedades:

i) pertence à circunferência $\phi_1 = (M_a, m_a)$;

ii) pertence à curva $\mathfrak{C}$ dada por (4.30).

Seja D_a um ponto livre que move-se sempre no interior do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ e considere tanto o círculo $\phi_2 = (D_a, d_a)$ quanto o ponto E_a tal que $<D_a, E_a>$ são os conjugados harmônicos do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$. Se $\phi_{\mathscr{A}}$ é o círculo que tem o segmento $\overline{D_a E_a}$ como diâmetro, então a curva $\mathfrak{C}$ definida por $\mathfrak{C} = \phi_2 \cap \phi_{\mathscr{A}}$ representa um lugar geométrico descrito por **A**.

Para provar o que acaba de ser afirmado, coloquemos o $\triangle$ **ABC** num sistema de coordenadas cartesianas retangulares onde o ponto M_a é a origem e a reta $\mathfrak{a}$, a reta $y = 0$ (eixo x). Assim, as coordenadas dos pontos **B**, **C**, M_a, D_a (pé da bissetriz interna) e E_a (pé da bissetriz externa) valem $\mathbf{B} = (-\frac{a}{2}, 0)$, $\mathbf{C} = (\frac{a}{2}, 0)$, $M_a = (0, 0)$, $D_a = (-z, 0)$ e $E_a = (-\frac{a^2}{4z}, 0)$. Portanto, o ponto M (ponto médio do segmento $\overline{D_a E_a}$ e centro do círculo $\phi_{\mathscr{A}}$) tem por coordenadas $M = (-\frac{a^2+4z^2}{8z}, 0)$. Podemos escrever:

$$\text{círculo } \phi_1: \quad x^2 + y^2 = m_a^2 \tag{4.27}$$

$$\text{círculo } \phi_2: \quad (x+z)^2 + y^2 = d_a^2 \tag{4.28}$$

$$\text{círculo } \phi_{\mathscr{A}}: \quad \left(x + \frac{a^2+4z^2}{8z}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a^2-4z^2}{8z}\right)^2 \tag{4.29}$$

Eliminando z usando as equações (4.28) e (4.29), vem:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^4 - 8a^2x^2 + 16x^4 + 8a^2y^2 + 32x^2y^2 + 16y^4}\Big(4x^2 - 4y^2 - a^2 + \\ + \sqrt{a^4 - 8a^2x^2 + 16x^4 + 8a^2y^2 + 32x^2y^2 + 16y^4}\Big) - 32d_a^2x^2 = 0\end{aligned} \tag{4.30}$$

∎

Seja $\mathbf{A} = (x_\mathbf{A}, y_\mathbf{A})$. Como $\mathbf{A} = \phi_1 \cap \mathfrak{C}$, usando as equações (4.30) e (4.27), resulta:

$$\begin{aligned}16a^2x_\mathbf{A}^4 + (16d_a^4 - 16m_a^4 - a^4 + 16a^2d_a^2 - 24a^2m_a^2)x_\mathbf{A}^2 + \\ + 16m_a^6 - 16d_a^2m_a^4 + 8a^2m_a^4 - 8a^2d_a^2m_a^2 + a^4m_a^2 - a^4d_a^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}16a^2y_\mathbf{A}^4 + (16m_a^4 - 16d_a^4 + a^4 - 16a^2d_a^2 - 8a^2m_a^2)y_\mathbf{A}^2 + \\ + 16d_a^4m_a^2 - 16d_a^2m_a^4 + 8a^2d_a^2m_a^2 - a^4d_a^2 = 0\end{aligned}$$

Podemos então construir o vértice **A**, terminando assim a construção do $\triangle$ **ABC**.

Exercício 170) $\langle a, m_a, d_b \rangle$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \tag{4.31}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.32}$$

Com a equação (4.31) obtém-se

$$b^2 = \frac{a^2+4m_a^2}{2} - c^2 \tag{4.33}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.33) em (4.32), resulta

$$c^3 + \left(a - \frac{d_b^2}{2a}\right)c^2 + \left(\frac{a^2}{4} - m_a^2 - d_b^2\right)c - \frac{ad_b^2}{2} = 0 \tag{4.34}$$

Como $\langle a, m_a, d_b \rangle$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.34) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.34) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}\,\text{cm}$ e $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.34) torna-se

$$c^3 + \frac{365}{169}c^2 - \frac{12236}{169}c - \frac{12000}{169} = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtém-se $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.33), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $\langle a, b, c \rangle$ satisfaz todas as condições do problema.

Discussão: uma análise de (4.34) nos permitirá concluir que esta equação possui no máximo uma raiz positiva. Logo, o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 171) $<a, m_b, d_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \tag{4.35}$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.36}$$

Com a equação (4.35) obtém-se

$$b^2 = 2(c^2 + a^2 - 2m_b^2) \tag{4.37}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.37) em (4.36), resulta

$$2(c^2+a^2-2m_b^2)c^2 = \left[\frac{4c^4 + (4a^2 - 8m_b^2 - 3d_a^2)c^2 + 2(2m_b^2 - a^2)d_a^2}{3c^2 + a^2 - 4m_b^2 - 2d_a^2}\right]^2 \tag{4.38}$$

Como $<a, m_b, d_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.38) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.38) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ e $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.38) torna-se

$$x^4 - 347{,}50x^3 + \frac{2164390}{81}x^2 - \frac{34676576}{81}x - \frac{626296832}{81} = 0 \tag{†}$$

onde $x = c^2$.

Resolvendo (†) com algum programa, obtém-se $x = 64$ e daí $c = 8\,\text{cm}$; e com (4.37), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 172) $\langle a, m_b, d_b \rangle$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \tag{4.39}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.40}$$

Com a equação (4.39) obtém-se

$$b^2 = 2(c^2 + a^2 - 2m_b^2) \tag{4.41}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.41) em (4.40), resulta

$$c^3 + \left(\frac{d_b^2}{a} - 2a\right)c^2 + (a^2 + 2d_b^2 - 4m_b^2)c + ad_b^2 = 0 \tag{4.42}$$

Como $\langle a, m_b, d_b \rangle$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.42) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.42) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ e $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.42) torna-se

$$c^3 - \frac{730}{169}c^2 - \frac{7976}{169}c + \frac{24000}{169} = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se duas raízes positivas. Seus valores, com seis algarismos decimais exatos, são:

$$c_1 = 8\,\text{cm} \implies b_1 = 7\,\text{cm}$$

$$c_2 = 2{,}757365\,9\,\text{cm} \implies b_2^2 < 0 \quad \text{(solução estranha).}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $\langle a, b_1, c_1 \rangle$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 173) $<a, m_b, d_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \tag{4.43}$$

$$ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = d_c^2 \tag{4.44}$$

Com a equação (4.43) obtém-se

$$c^2 = \frac{b^2}{2} - a^2 + 2m_b^2 \tag{4.45}$$

Substituindo o valor de c^2 dado por (4.45) em (4.44), resulta

$$b^3 + \left(4a - 2\frac{d_c^2}{a}\right)b^2 + 4(a^2 - m_b^2 - d_c^2)b - 2ad_c^2 = 0 \tag{4.46}$$

Como $<a, m_b, d_c>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.46) com um programa qualquer para obter b.

Se a equação (4.46) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ e $d_c = \frac{5\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.46) torna-se

$$b^3 + \frac{110}{9}b^2 - \frac{961}{9}b - \frac{1750}{9} = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtém-se $b = 7\,\text{cm}$ e, com (4.45), $c = 8\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 174) $<a, m_a, e_a>$

Primeiro procedimento – Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \tag{4.47}$$

$$\frac{a^2bc}{(b-c)^2} - bc = e_a^2 \tag{4.48}$$

Podendo construir u e v no sistema (4.49) abaixo, o problema estará resolvido pois os lados b e c serão os catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa u e altura igual a v^2/u.

$$\begin{cases} b^2+c^2 = u^2 \\ \quad\;\; bc = v^2 \end{cases} \tag{4.49}$$

De (4.47) obtém-se

$$b^2+c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = u^2$$

De (4.48) obtém-se

$$\frac{a^2v^2}{u^2-2v^2} - v^2 = e_a^2$$

$$v^4 + \frac{1}{4}(a^2+4e_a^2-4m_a^2)v^2 - \frac{1}{4}(a^2+4m_a^2)e_a^2 = 0 \tag{4.50}$$

A equação (4.50) é resolvida colocando-se

$$v^4 \pm w^2v^2 - z^4 = 0$$

e fazendo-se $v^2 = wy$, significando isto que v será a média geométrica de w e da raiz (ou cada uma das raízes) da equação

$$w^2y^2 \pm w^3y - z^4 = 0 \iff y^2 \pm wy - \left(\frac{z^2}{w}\right)^2 = 0$$

Finalmente,

$$w = \frac{\sqrt{a^2+4e_a^2-4m_a^2}}{2}$$

e z pode ser construído da seguinte maneira:

$$z = \sqrt{\sqrt{\sqrt{m_a e_a}^4 + \sqrt{a\frac{e_a}{2}}^4}}$$

$$\ell_1 = \sqrt{m_a e_a} \qquad \ell_2 = \sqrt{a\frac{e_a}{2}}$$

$$z = \sqrt{\sqrt{\ell_1^4 + \ell_2^4}} = \sqrt{\sqrt{\ell_1^2\left(\ell_1^2 + \frac{\ell_2^4}{\ell_1^2}\right)}} = \sqrt{\ell_1\sqrt{\ell_1^2 + \left(\frac{\ell_2^2}{\ell_1}\right)^2}}$$

$$\ell_3 = \frac{\ell_2^2}{\ell_1} \qquad \ell_4 = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_3^2}$$

$$z = \sqrt{\ell_1 \ell_4}$$

Segundo procedimento – Método algébrico

Uma análise da figura 4.142 (ver a página 88) nos mostrará que o problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{A}EM_a$. Com este intuito, vamos construir o $\triangle\,EE_aM_a$ e para tal definimos os seguintes ângulo e comprimentos:

$$\measuredangle EE_aM_a = \varphi$$

$$E_aE = x \qquad M_aE = y \qquad E_aM_a = z$$

Escrevemos agora as seguintes equações:

$$E_a\mathbf{B}\cdot E_a\mathbf{C} = E_a\mathbf{A}\cdot E_aE \implies \left(z - \frac{a}{2}\right)\left(z + \frac{a}{2}\right) = e_a x \tag{4.51}$$

Usando os triângulos $\triangle\,\mathbf{A}E_aM_a$ e $\triangle\,EE_aM_a$, podemos escrever:

$$m_a^2 = e_a^2 + z^2 - 2e_a z\cos\varphi \tag{4.52}$$

$$0 = z - x\cos\varphi \tag{4.53}$$

Multiplicando os dois membros de (4.52) por x e os de (4.53) por $2e_az$ e subtraindo as duas equações obtidas, resulta:

$$xm_a^2 = z^2x + e_a^2x - 2e_az^2 \tag{4.54}$$

Com (4.51) e (4.54) vamos calcular e construir x e em seguida y. De (4.51), obtemos $z^2 = \frac{a^2}{4} + e_ax$. Colocando este valor de z^2 em (4.54), vem:

$$xm_a^2 = \left(\frac{a^2}{4} + e_ax\right)x + e_a^2x - 2e_a\left(\frac{a^2}{4} + e_ax\right)$$

Ou

$$4e_a x^2 - (4m_a^2 + 4e_a^2 - a^2)x - 2a^2 e_a = 0 \tag{4.55}$$

Devemos considerar três casos:

$$\text{Caso (I):}\quad a^2 < 4m_a^2 + 4e_a^2$$

Sejam

$$u = \frac{4m_a^2 + 4e_a^2 - a^2}{4e_a}$$
$$v^2 = \frac{a^2}{2} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2$$

Podemos então escrever (4.55) como

$$x(x-u) = v^2$$

e já sabemos como construir x.

Como $y^2 = x^2 - z^2$, então $y^2 = x^2 - \frac{a^2}{4} - e_a x = x(x - e_a) - \frac{a^2}{4}$. Ou

$$y = \sqrt{\left(\sqrt{x(x-e_a)}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

O triângulo retângulo $\triangle EE_aM_a$ é construído facilmente e daí construímos o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{e}_a$ e $E_a\mathbf{A} = e_a$). Temos assim o $\triangle \mathbf{A}EM_a$. Para construir os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, construímos o ponto O (O pertence à mediatriz (reta $\mathfrak{r}$) de $\overline{\mathbf{A}E}$ e à reta $\mathfrak{m} = (E, M_a)$) e o círculo circunscrito $\Gamma = (O, OE)$. Nas interseções da reta $\mathfrak{a}$ ($M_a \in \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{m}$) com Γ estão $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

$$\text{Caso (II):}\quad a^2 = 4m_a^2 + 4e_a^2$$

Podemos escrever (4.55) como

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \implies x = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$$

ou seja, x é a metade da diagonal do quadrado de lado a. A construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$ prossegue como no caso (I).

$$\text{Caso (III):}\quad a^2 > 4m_a^2 + 4e_a^2$$

Sejam

$$u = \frac{a^2 - 4m_a^2 - 4e_a^2}{4e_a}$$
$$v^2 = \frac{a^2}{2} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2$$

Podemos então escrever (4.55) como

$$x(x+u) = v^2$$

e já sabemos como construir x. A construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$ prossegue como no caso (I).

Discussão: como nos três casos só podemos construir um segmento x, o problema possui 0 ou 1 solução.

Terceiro procedimento – Método algébrico

Seja z a distância entre os pontos E_a e M_a. O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{A}E_aM_a$ e para tal temos que construir o comprimento z do lado $\overline{E_aM_a}$.

Pode-se colocar o $\triangle\,\mathbf{ABC}$ num sistema de coordenadas cartesianas retangulares onde o ponto M_a é a origem e a reta $\mathfrak{a}$, o eixo x. Assim, as coordenadas dos pontos a seguir tomam os seguintes valores: $M_a = (0,0)$, $\mathbf{B} = (-\frac{a}{2},0)$, $\mathbf{C} = (\frac{a}{2},0)$, $E_a = (-z,0)$ e $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}})$.

Para simplificar as equações que seguirão, colocamos $\ell = a/2$. Assim, $\mathbf{B} = (-\ell,0)$ e $\mathbf{C} = (\ell,0)$. Usando as equações do exercício 169, com E_a e e_a substituindo D_a e d_a, respectivamente, chegamos à equação

$$z^4 - (e_a^2 + m_a^2 + \ell^2)z^2 + \ell^2(m_a^2 - e_a^2) = 0 \tag{4.56}$$

Logo, o comprimento z é construtível e deste modo pode-se construir o $\triangle\,\mathbf{ABC}$. Seguindo a ideia da construção do exercício 169, constrói-se o $\triangle\,\mathbf{A}E_aP_1$, com $\mathbf{A}E_a = e_a$, $\mathbf{A}P_1 = m_a$ e $E_aP_1 = \ell$. Escrevendo (ver a figura 2.1, do teorema 2.1 em [8]) $\ell^2 = m_a^2 + e_a^2 - 2e_a u$ e $z^2 = e_a^2 + m_a^2 + 2e_a w$, simplifica-se a equação (4.56) em

$$w(w+u) = \frac{1}{2}\ell^2 = \left(\sqrt{2}\frac{\ell}{2}\right)^2 \tag{4.57}$$

Note que u é o comprimento da projeção ortogonal do lado $\overline{\mathbf{A}P_1}$ sobre a reta $\mathfrak{e}_a$, enquanto que w é o comprimento da projeção ortogonal do lado $\overline{\mathbf{A}M_a}$ sobre a mesma reta. O comprimento w pode ser facilmente construído e com isso termina-se a construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.143, na página 89):

i) numa reta $\mathfrak{e}_a$ qualquer construir o segmento $\mathbf{A}E_a = e_a$; traçar o círculo $\phi_1 = (\mathbf{A}, m_a)$; traçar o círculo $\phi_2 = (E_a, \ell)$; obter o ponto P_1 $(P_1 = \phi_1 \cap \phi_2)$;

ii) construir a reta $\mathfrak{r}$ $(P_1 \in \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{e}_a)$; obter o ponto P_2 $(P_2 = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}_a)$ e o comprimento $u = \mathbf{A}P_2$;

iii) construir o quadrado $\square\, P_1P_3P_4P_5$ $(P_3 \in \mathfrak{s} = (P_1, E_a))$ de lado $\frac{\ell}{2}$ e obter a reta $\mathfrak{t} = (P_1, P_4)$;

iv) construir a reta $\mathfrak{u}$ $(P_1 \in \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u} \perp \mathfrak{t})$; colocar o ponto P_6 na reta $\mathfrak{u}$ tal que $P_1P_6 = u$ e traçar o círculo ϕ_3 de diâmetro $\overline{P_1P_6}$ e centro P_7;

v) traçar a reta $\mathfrak{v} = (P_4, P_7)$ e obter o ponto P_8 $(P_8 = \mathfrak{v} \cap \phi_3)$; colocar o ponto $\mathcal{M}_a$ na reta $\mathfrak{e}_a$ tal que $\mathbf{A}\mathcal{M}_a = P_4P_8 = w$; construir a reta $\mathfrak{w}$ $(\mathcal{M}_a \in \mathfrak{w}$ e $\mathfrak{w} \perp \mathfrak{e}_a)$; obter o ponto $M_a = \mathfrak{w} \cap \phi_1$;

vi) traçar a reta $\mathfrak{a} = (E_a, M_a)$; traçar o círculo $\phi_4 = (M_a, \ell)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ $(\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \phi_4)$ e $\mathbf{C}$ $(\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \phi_4)$.

A construção da figura 4.143 é trabalhosa e não aproveita os elementos da figura a ser obtida. Uma construção muito menos trabalhosa e bastante elegante, baseada na figura 4.140, será mostrada a seguir (ver a figura 4.144, na página 90):

i) numa reta $\mathfrak{e}_a$ qualquer construir o segmento $\mathbf{A}E_a = e_a$; traçar os círculos $\phi_1 = (\mathbf{A}, m_a)$ e $\phi_2 = (E_a, \ell)$; obter os pontos P_1 $(P_1 = \phi_1 \cap \phi_2)$ e M, médio de $\overline{\mathbf{A}P_1}$;

ii) traçar as retas $\mathfrak{s} = (E_a, P_1)$ e $\mathfrak{t} = (\mathbf{A}, P_1)$;

iii) construir o quadrado $\square\, P_1P_3P_4P_5$ $(P_3 \in \mathfrak{s})$ de lado $\ell/2$;

iv) construir a reta $\mathfrak{u}$ $(P_1 \in \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u} \perp \mathfrak{t})$; traçar o círculo $\phi_3 = (P_1, P_1P_4)$ e obter o ponto P_6 $(P_6 = \mathfrak{u} \cap \phi_3)$;

v) traçar o círculo $\phi_4 = (M, MP_6)$ e obter o ponto $\mathcal{M}_a$ $(\mathcal{M}_a = \mathfrak{e}_a \cap \phi_4)$; construir a reta $\mathfrak{w}$ $(\mathcal{M}_a \in \mathfrak{w}$ e $\mathfrak{w} \perp \mathfrak{e}_a)$; obter o ponto $M_a = \mathfrak{w} \cap \phi_1$;

vi) traçar a reta $\mathfrak{a} = (E_a, M_a)$; traçar o círculo $\phi_5 = (M_a, \ell)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ $(\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \phi_5)$ e $\mathbf{C}$ $(\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \phi_5)$.

Observação: sabendo que $P_1P_6 = P_1P_4 = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$ e $MP_6 = M\mathcal{M}_a$, prova-se que $\mathbf{A}\mathcal{M}_a = w$ satisfaz a equação (4.57) aplicando-se Pitágoras no $\triangle\, MP_1P_6$ e a lei dos cossenos no $\triangle\, \mathbf{A}M\mathcal{M}_a$.

Exercício 175) $<a, m_a, e_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \tag{4.58}$$

$$\frac{ab^2c}{(a-c)^2} - ac = e_b^2 \tag{4.59}$$

Com a equação (4.58) obtém-se

$$\frac{a^2+4m_a^2}{2} - c^2 = b^2 \tag{4.60}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.60) em (4.59), resulta

$$c^3 + \left(\frac{e_b^2}{2a} - a\right)c^2 + \left(\frac{a^2}{4} - m_a^2 - e_b^2\right)c + \frac{ae_b^2}{2} = 0 \tag{4.61}$$

Como $<a, m_a, e_b>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.61) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.61) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}\,\text{cm}$ e $e_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.61) torna-se

$$c^3 + \frac{115}{9}c^2 - \frac{1996}{9}c + \frac{4000}{9} = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se duas raízes positivas, as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$c_1 = 8\,\text{cm} \implies b_1 = 7\,\text{cm} \quad \text{(usando (4.60))}$$

$$c_2 = 2{,}397219\,5\,\text{cm} \implies b_2 = 10{,}356318\,8\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b_1, c_1>$ satisfaz todas as condições do problema e que $<a, b_2, c_2>$ é uma solução estranha pois $b_2 > a + c_2$.

Exercício 176) $<a, m_b, e_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \tag{4.62}$$

$$\frac{a^2bc}{(b-c)^2} - bc = e_a^2 \tag{4.63}$$

Com a equação (4.62) obtém-se

$$b^2 = 2(c^2+a^2-2m_b^2) \tag{4.64}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.64) em (4.63), resulta

$$2(c^2+a^2-2m_b^2)c^2 = \left[\frac{4c^4+(4a^2-8m_b^2-3e_a^2)c^2+2(2m_b^2-a^2)e_a^2}{3c^2+a^2-4m_b^2-2e_a^2}\right]^2 \tag{4.65}$$

Como $<a, m_b, e_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.65) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.65) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ e $e_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.65) torna-se

$$x^4 - 347{,}50x^3 - 745786x^2 + 136964512x - 5636671488 = 0 \tag{†}$$

onde $x = c^2$.

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se duas raízes que convêm: $x_1 = 64$ e $x_2 = 112{,}457769285\,8$. Assim, como $x = c^2$ e com (4.64), obtêm-se os seguintes valores para os lados b e c (com seis algarismos decimais exatos):

$$b_1 = 7\,\text{cm} \quad \text{e} \quad c_1 = 8\,\text{cm}$$

$$b_2 = 12{,}079550\,4\,\text{cm} \quad \text{e} \quad c_2 = 10{,}604610\,8\,\text{cm}.$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os triângulos cujos lados são $<a, b_1, c_1>$ e $<a, b_2, c_2>$ satisfazem todas as condições do problema.

Exercício 177) $<a, m_b, e_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \tag{4.66}$$

$$\frac{ab^2c}{(a-c)^2} - ac = e_b^2 \tag{4.67}$$

Com a equação (4.66) obtém-se

$$b^2 = 2(c^2 + a^2 - 2m_b^2) \tag{4.68}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.68) em (4.67), resulta

$$c^3 + \Big(2a - \frac{e_b^2}{a}\Big)c^2 + (a^2 - 4m_b^2 + 2e_b^2)c - ae_b^2 = 0 \tag{4.69}$$

Como $<a, m_b, e_b>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.69) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.69) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $e_b = \frac{40}{3}$ cm.

Com estes valores, a equação (4.69) torna-se

$$c^3 - \frac{230}{9}c^2 + \frac{2264}{9}c - \frac{8000}{9} = 0 \tag{$\dagger$}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se uma raiz positiva ($c = 8\,\text{cm} \implies b = 7\,\text{cm}$) e duas raízes complexas.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 178) $<a, m_b, e_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \tag{4.70}$$

$$\frac{abc^2}{(b-a)^2} - ab = e_c^2 \tag{4.71}$$

Com a equação (4.70) obtém-se

$$c^2 = \frac{b^2}{2} - a^2 + 2m_b^2 \tag{4.72}$$

Substituindo o valor de c^2 dado por (4.72) em (4.71), resulta

$$b^3 + \Big(2\frac{e_c^2}{a} - 4a\Big)b^2 + 4(a^2 - m_b^2 - e_c^2)b + 2ae_c^2 = 0 \tag{4.73}$$

Como $< a, m_b, e_c >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.73) com um programa qualquer para obter b.

Se a equação (4.73) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ e $e_c = 5\sqrt{21}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.73) torna-se

$$b^3 + 190b^2 - 2129b + 5250 = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se duas raízes positivas, as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$\begin{aligned} b_1 &= 7\,\text{cm} \implies c_1 = 8\,\text{cm} \quad \text{(usando (4.72))} \\ b_2 &= 3{,}736246\,0\,\text{cm} \implies c_2 = 6{,}817607\,1\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os triângulos cujos lados são $< a, b_1, c_1 >$ e $< a, b_2, c_2 >$ satisfazem todas as condições do problema.

Discussão: uma análise de (4.73) nos permitirá concluir que esta equação possui no máximo duas raízes positivas. Logo, o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 179) $< a, m_a, R >$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $< a, R, \alpha >$ formam um datum ($\sin\alpha = a/2R$), podemos construir o(s) ângulo(s) do vértice **A** (α e $180° - \alpha$). Conhecemos então $< \alpha, a, m_a >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 23).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{BC}O$ e o círculo circunscrito Γ. Uma análise da figura 4.145 nos mostrará que o ponto O possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{B}$ vale R;

ii) sua distância ao ponto $\mathbf{C}$ vale R.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.145):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir a mediatriz (reta $\mathfrak{m}$) de $\overline{\mathbf{BC}}$ e obter o ponto M_a ($M_a = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}$);

iii) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{B}, R)$ e obter os pontos O e O' ($O(O') = \mathfrak{m} \cap \phi_1$);

iv) traçar os círculos $\Gamma = (O, R)$ e $\Gamma' = (O', R)$;

v) traçar o arco $\phi_2 = (M_a, m_a)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \Gamma' \cap \phi_2$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução (notar que o triângulo que seria gerado por $\mathbf{A'}$ é congruente ao $\triangle\,\mathbf{ABC}$ e que ϕ_2 intersecta ou Γ ou Γ').

Exercício 180) $<a, m_b, R>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $<a, R, \alpha>$ formam um datum ($\sin\alpha = a/2R$), podemos construir o(s) ângulo(s) do vértice $\mathbf{A}$ (α e $180° - \alpha$). Conhecemos então $<\alpha, a, m_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 24).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Uma análise da figura 4.146 nos mostrará que o ponto M_b possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{B}$ vale m_b;

ii) um observador colocado em M_b enxerga o segmento $\overline{O\mathbf{C}}$ segundo um ângulo reto (M_b pertence ao arco capaz—ϕ_1—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{O\mathbf{C}}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.146):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o centro O e o círculo Γ;

iii) traçar o segmento $\overline{O\mathbf{C}}$ e construir ϕ_1;

iv) traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{B}, m_b)$ e obter o ponto M_b ($M_b = \phi_1 \cap \phi_2$);

v) se $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, M_b)$ é a reta definida pelos pontos $\mathbf{C}$ e M_b, então $\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \Gamma$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

Observação: seja P um ponto do plano do $\triangle\,\mathbf{ABC}$. Se P é um ponto da circunferência de Γ ($P = \mathbf{C}$, por exemplo), então a circunferência (ϕ_1) de diâmetro $\overline{O\mathbf{C}}$ é o lugar geométrico dos pontos médios das cordas de Γ cujas retas suportes passam por $\mathbf{C}$ (logo, $\diamondsuit\,\mathbf{C}M_aOM_b$ é um quadrilátero cíclico). No caso de o ponto P estar no interior de Γ, o lugar geométrico daqueles pontos (pontos médios das cordas) é a circunferência de diâmetro $\overline{OP}$. Entretanto, se o ponto P estiver no exterior de Γ, então o lugar geométrico acima mencionado torna-se o arco da circunferência de diâmetro $\overline{OP}$ contido no interior de Γ (para os detalhes e prova deste resultado, ver [11]).

Note também que ϕ_1 (sua parte "superior") é o arco capaz do ângulo α sobre o segmento $\overline{M_a\mathbf{C}}$. Assim, $M_b \in \phi_1$ e tem-se uma outra maneira de resolver o exercício 24.

Exercício 181) $\quad < a, m_a, r >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \tag{4.74}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}} = r \tag{4.75}$$

Com a equação (4.74) obtém-se

$$\frac{a^2 + 4m_a^2}{2} - c^2 = b^2 \tag{4.76}$$

E com a equação (4.75), obtém-se

$$c^3 - ac^2 - (a+c)b^2 + (4r^2 - a^2)c + (a^2 + 4r^2)a = [(c-a)^2 - b^2 - 4r^2]b \tag{4.77}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.76) em (4.77), resulta

$$\frac{a^2 + 4m_a^2}{2} - c^2 = \left[\frac{2c^3 + (4r^2 - 2m_a^2 - 3a^2/2)c + 4ar^2 + a^3/2 - 2am_a^2}{2c^2 - 2ac + a^2/2 - 2m_a^2 - 4r^2}\right]^2 \tag{4.78}$$

Como $< a, m_a, r >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.78) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.78) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}\,\text{cm}$ e $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.78) torna-se

$$c^6 - 5c^5 - 157c^4 + 625c^3 + 7472c^2 - 16280c - 123200 = 0 \tag{†}$$

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (†). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.76), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $< a, b, c >$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 182) $< a, m_b, r >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} = m_b \tag{4.79}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}} = r \tag{4.80}$$

Com a equação (4.79) obtém-se

$$2(a^2 + c^2) - 4m_b^2 = b^2 \tag{4.81}$$

E com a equação (4.80), obtém-se

$$c^3 - ac^2 - (a+c)b^2 + (4r^2 - a^2)c + (a^2 + 4r^2)a = [(c-a)^2 - b^2 - 4r^2]b \tag{4.82}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.81) em (4.82), resulta

$$2(a^2+c^2)-4m_b^2 = \left[\frac{c^3+3ac^2+(3a^2-4m_b^2-4r^2)c+(a^2-4r^2-4m_b^2)a}{c^2+2ac+a^2-4m_b^2+4r^2}\right]^2 \tag{4.83}$$

Como $< a, m_b, r >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.83) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.83) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.83) torna-se

$$c^6+10c^5-340c^4-2120c^3+36608c^2+68800c-1005056=0 \tag{†}$$

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (†). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.81), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $< a, b, c >$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 183) $< a, m_a, r_a >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \tag{4.84}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{b+c-a}} = r_a \tag{4.85}$$

Com a equação (4.84) obtém-se

$$\frac{a^2+4m_a^2}{2}-c^2=b^2 \tag{4.86}$$

E com a equação (4.85), obtém-se

$$c^3+ac^2+(a-c)b^2+(4r_a^2-a^2)c-(a^2+4r_a^2)a=[(c+a)^2-b^2-4r_a^2]b \tag{4.87}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.86) em (4.87), resulta

$$\frac{a^2+4m_a^2}{2}-c^2 = \left[\frac{4c^3+(8r_a^2-3a^2-4m_a^2)c+(4m_a^2-a^2-8r_a^2)a}{4c^2+4ac+a^2-4m_a^2-8r_a^2}\right]^2 \tag{4.88}$$

Como $<a, m_a, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.88) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.88) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}\,\text{cm}$ e $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.88) torna-se

$$c^6 + 5c^5 - 157c^4 - 805c^3 + 9596c^2 + 33920c - 256256 = 0 \qquad (\dagger)$$

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de ($\dagger$). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.86), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 184) $<a, m_a, r_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \qquad (4.89)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)}{a-b+c}} = r_b \qquad (4.90)$$

Com a equação (4.89) obtém-se

$$\frac{a^2+4m_a^2}{2} - c^2 = b^2 \qquad (4.91)$$

E com a equação (4.90), obtém-se

$$c^3 - ac^2 - (a+c)b^2 + (4r_b^2 - a^2)c + (a^2 + 4r_b^2)a = [b^2 - (c-a)^2 + 4r_b^2]b \qquad (4.92)$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.91) em (4.92), resulta

$$\frac{a^2+4m_a^2}{2} - c^2 = \Big[\frac{4c^3 + (8r_b^2 - 3a^2 - 4m_a^2)c + (8r_b^2) - 4m_a^2 + a^2)a}{4c^2 - 4ac + a^2 - 4m_a^2 - 8r_b^2}\Big]^2 \qquad (4.93)$$

Como $<a, m_a, r_b>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.93) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.93) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}\,\text{cm}$ e $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.93) torna-se

$$c^6 - 5c^5 - 157c^4 + \frac{1}{9}\Big(11085c^3 + 154972c^2 - 565120c - 6169856\Big) = 0 \quad (\dagger)$$

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (†). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.91), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 185) $\quad <a, m_b, r_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} = m_b \tag{4.94}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{b+c-a}} = r_a \tag{4.95}$$

Com a equação (4.94) obtém-se

$$2(a^2 + c^2) - 4m_b^2 = b^2 \tag{4.96}$$

E com a equação (4.95), obtém-se

$$c^3 + ac^2 + (a-c)b^2 + (4r_a^2 - a^2)c - (a^2 + 4r_a^2)a = [(c+a)^2 - b^2 - 4r_a^2]b \tag{4.97}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.96) em (4.97), resulta

$$2(a^2 + c^2) - 4m_b^2 = \Big[\frac{c^3 - 3ac^2 + (3a^2 - 4m_b^2 - 4r_a^2)c + (4r_a^2 + 4m_b^2 - a^2)a}{c^2 - 2ac + a^2 - 4m_b^2 + 4r_a^2}\Big]^2 \tag{4.98}$$

Como $<a, m_b, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.98) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.98) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ e $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.98) torna-se

$$c^6 - 10c^5 - 124c^4 - 760c^3 + 19616c^2 + 66560c - 825344 = 0 \quad (\dagger)$$

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (†). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.96), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 186) $<a, m_b, r_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_b \tag{4.99}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)}{a-b+c}} = r_b \tag{4.100}$$

Com a equação (4.99) obtém-se

$$2(a^2+c^2) - 4m_b^2 = b^2 \tag{4.101}$$

E com a equação (4.100), obtém-se

$$c^3 - ac^2 - (a+c)b^2 + (4r_b^2 - a^2)c + (a^2 + 4r_b^2)a = [b^2 - (c-a)^2 + 4r_b^2]b \tag{4.102}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.101) em (4.102), resulta

$$2(a^2+c^2) - 4m_b^2 = \left[\frac{c^3 + 3ac^2 + (3a^2 - 4m_b^2 - 4r_b^2)c + (a^2 - 4m_b^2 - 4r_b^2)a}{c^2 + 2ac + a^2 - 4m_b^2 + 4r_b^2}\right]^2 \tag{4.103}$$

Como $<a, m_b, r_b>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.103) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.103) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Com estes valores, a equação (4.103) torna-se

$$c^6 + 10c^5 + 388c^4 + \frac{1}{9}\Big(68280c^3 - 92768c^2 - 4418560c - 13285376\Big) = 0 \quad (\dagger)$$

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de ($\dagger$). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.101), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 187) $<a, m_b, r_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = m_{_b} \tag{4.104}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)}{a+b-c}} = r_{_c} \tag{4.105}$$

Com a equação (4.104) obtém-se

$$2(a^2+c^2) - 4m_{_b}^2 = b^2 \tag{4.106}$$

E com a equação (4.105), obtém-se

$$c^3+ac^2+(a-c)b^2+(4r_{_c}^2-a^2)c-(a^2+4r_{_c}^2)a = [b^2-(c+a)^2+4r_{_c}^2]b \tag{4.107}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.106) em (4.107), resulta

$$2(a^2+c^2)-4m_{_b}^2 = \Big[\frac{c^3-3ac^2+(3a^2-4m_{_b}^2-4r_{_c}^2)c+(4m_{_b}^2+4r_{_c}^2-a^2)a}{c^2-2ac+a^2-4m_{_b}^2+4r_{_c}^2}\Big]^2 \tag{4.108}$$

Como $< a, m_{_b}, r_{_c} >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.108) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.108) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $m_{_b} = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ e $r_{_c} = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.108) torna-se

$$c^6 - 10c^5 + 1388c^4 - 20920c^3 - 26752c^2 + 1739840c - 7115264 = 0 \tag{†}$$

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (†). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.106), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $< a, b, c >$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 188) $\quad < a, d_{_a}, d_{_b} >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_{_a}^2 \tag{4.109}$$

$$ac - \frac{b^2ac}{(a+c)^2} = d_{_b}^2 \tag{4.110}$$

Com a equação (4.110) obtém-se

$$\frac{(ac-d_b^2)(a+c)^2}{ac}=b^2 \tag{4.111}$$

E com a equação (4.109), obtém-se

$$c[b^2+c^2-a^2-2d_a^2]b=d_a^2c^2+(d_a^2-2c^2)b^2 \tag{4.112}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.111) em (4.112), resulta

$$\frac{c}{a}(ac-d_b^2)(a+c)^2=\left[\frac{ad_a^2c^3+d_a^2(ac-d_b^2)(a+c)^2-2(ac-d_b^2)(a+c)^2c^2}{ac^3+(ac-d_b^2)(a+c)^2-a(a^2+2d_a^2)c}\right]^2 \tag{4.113}$$

Como $<a, d_a, d_b>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.113) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.113) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$ e $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$.
Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (†). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.111), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Observação: em <http://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200503.pdf> Victor Oxman mostra as condições que $<a, d_a, d_b>$ devem satisfazer para a existência e unicidade de um triângulo.

Exercício 189) $<a, d_b, d_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$ac-\frac{b^2ac}{(a+c)^2}=d_b^2 \tag{4.114}$$

$$ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}=d_c^2 \tag{4.115}$$

Com a equação (4.114), obtém-se

$$\frac{(ac-d_b^2)(a+c)^2}{ac}=b^2 \tag{4.116}$$

E com a equação (4.115), obtém-se

$$a[a^2 + b^2 - c^2 - 2d_c^2]b = a^2 d_c^2 + (d_c^2 - 2a^2)b^2 \tag{4.117}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.116) em (4.117), resulta

$$\frac{a}{c}(ac - d_b^2)(a+c)^2 = \left[\frac{(d_c^2 - 2a^2)(ac - d_b^2)(a+c)^2 + a^3 d_c^2 c}{ac^3 - (ac - d_b^2)(a+c)^2 - a(a^2 - 2d_c^2)c}\right]^2 \tag{4.118}$$

Como $< a, d_b, d_c >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.118) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.118) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$ e $d_c = \frac{5\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$.
Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (†). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.116), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $< a, b, c >$ satisfaz todas as condições do problema.

Observação: em <http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200425.pdf> Victor Oxman mostra as condições que $< a, d_b, d_c >$ devem satisfazer para a existência e unicidade de um triângulo.

Exercício 190) $< a, d_a, e_a >$

Método do problema já resolvido

Como $< d_a, e_a, h_a >$ formam um datum, conhecemos $< a, h_a, d_a >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 148).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 191) $< a, d_a, e_b >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]bc = d_a^2 \tag{4.119}$$

$$\left[\left(\frac{b}{a-c}\right)^2 - 1\right]ac = e_b^2 \tag{4.120}$$

Com a equação (4.120) obtém-se

$$\frac{(ac+e_b^2)(a-c)^2}{ac} = b^2 \tag{4.121}$$

E com a equação (4.119), obtém-se

$$c[b^2+c^2-a^2-2d_a^2]b = d_a^2c^2 + (d_a^2-2c^2)b^2 \tag{4.122}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.121) em (4.122), resulta

$$\frac{c}{a}(ac+e_b^2)(a-c)^2 = \Big[\frac{ad_a^2c^3+(d_a^2-2c^2)(ac+e_b^2)(a-c)^2}{ac^3+(ac+e_b^2)(a-c)^2-a(a^2+2d_a^2)c}\Big]^2 \tag{4.123}$$

Como $<a, d_a, e_b>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.123) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.123) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$ e $e_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$.

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (†). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.121), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 192) $<a, d_b, e_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\Big[1-\Big(\frac{b}{a+c}\Big)^2\Big]ac = d_b^2 \tag{4.124}$$

$$\Big[\Big(\frac{a}{b-c}\Big)^2-1\Big]bc = e_a^2 \tag{4.125}$$

Com a equação (4.124) obtém-se

$$\frac{(ac-d_b^2)(a+c)^2}{ac} = b^2 \tag{4.126}$$

E com a equação (4.125), obtém-se

$$c[b^2+c^2-a^2-2e_a^2]b = (2c^2-e_a^2)b^2 - e_a^2c^2 \tag{4.127}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.126) em (4.127), resulta

$$\frac{c}{a}(ac-d_b^2)(a+c)^2 = \Big[\frac{[ac^3+(ac-d_b^2)(a+c)^2]e_a^2-2(ac-d_b^2)(a+c)^2c^2}{ac^3+(ac-d_b^2)(a+c)^2-a(a^2+2e_a^2)c}\Big]^2 \tag{4.128}$$

Como $<a, d_b, e_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.128) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.128) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$ e $e_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$.

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (†). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.126), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 193) $<a, d_b, e_b>$

Método do problema já resolvido

Como $<d_b, e_b, h_b>$ formam um datum, conhecemos $<a, h_b, d_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 151).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 194) $<a, d_b, e_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right]ac = d_b^2 \tag{4.129}$$

$$\left[\left(\frac{c}{b-a}\right)^2-1\right]ab = e_c^2 \tag{4.130}$$

Com a equação (4.129) obtém-se

$$\frac{(ac-d_b^2)(a+c)^2}{ac} = b^2 \tag{4.131}$$

E com a equação (4.130), obtém-se

$$a[c^2-b^2-a^2+2e_c^2]b = a^2e_c^2+(e_c^2-2a^2)b^2 \tag{4.132}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.131) em (4.132), resulta

$$\frac{a}{c}(ac-d_b^2)(a+c)^2 = \left[\frac{a^3e_c^2c+(e_c^2-2a^2)(ac-d_b^2)(a+c)^2}{ac^3-(ac-d_b^2)(a+c)^2-a(a^2-2e_c^2)c}\right]^2 \tag{4.133}$$

Como $<a, d_b, e_c>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.133) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.133) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$ e $e_c = 5\sqrt{21}\,\text{cm}$.
Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (†). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.131), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 195) $<a, d_a, R>$

Método do problema já resolvido

Como $<a, R, \alpha>$ formam um datum ($\sin\alpha = a/2R$), podemos construir o(s) ângulo(s) do vértice **A** (α e $180° - \alpha$). Conhecemos então $<\alpha, a, d_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 28).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 196) $<a, d_b, R>$

Método do problema já resolvido

Como $<a, R, \alpha>$ formam um datum ($\sin\alpha = a/2R$), podemos construir o(s) ângulo(s) do vértice **A** (α e $180° - \alpha$). Conhecemos então $<\alpha, a, d_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 29).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 197) $<a, d_a, r>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{4.134}$$

$$\frac{2bc\cos\alpha/2}{b+c} = d_a \implies bc = \frac{(b+c)d_a}{2\cos\alpha/2} \tag{4.135}$$

$$\tan\alpha/2 = \frac{r}{p-a} \implies \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha/2}}{\cos\alpha/2} = \frac{2r}{b+c-a} \tag{4.136}$$

Com a equação (4.136) obtém-se

$$b + c = a + \frac{2r\cos\alpha/2}{\sqrt{1-\cos^2\alpha/2}} \tag{4.137}$$

Podemos escrever (4.134) como

$$(b+c)^2 - 2bc(1+\cos\alpha) = a^2$$

Como $1+\cos\alpha = 2\cos^2\alpha/2$, e com (4.135), a equação acima torna-se

$$(b+c)^2 - 2d_a(b+c)\cos\alpha/2 = a^2,$$

ou, com (4.137),

$$x^4 - \frac{4ar^2d_a}{(a^2+4r^2)d_a^2}x^3 + \frac{4(a^2+r^2-d_a^2)r^2 - 2a^2d_a^2}{(a^2+4r^2)d_a^2}x^2 + \frac{4ar^2d_a}{(a^2+4r^2)d_a^2}x + \frac{(d_a^2-4r^2)a^2}{(a^2+4r^2)d_a^2} = 0, \tag{4.138}$$

onde $x = \cos\alpha/2$.

Como $<a, d_a, r>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.138) com um programa qualquer para obter x.

Se a equação (4.138) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}$ cm e $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.138) torna-se

$$x^4 - \frac{45\sqrt{7}}{518}x^3 - \frac{773{,}50}{518}x^2 + \frac{45\sqrt{7}}{518}x + \frac{265{,}625}{518} = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se duas raízes positivas, as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$x_1 = 0{,}944911\,2 \implies b_1 = 7\,\text{cm} \;\text{ e }\; c_1 = 8\,\text{cm}$$

$$x_2 = 0{,}889627\,7 \quad \text{(solução estranha)}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b_1, c_1>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 198) $\quad <a, d_b, r>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left[1 - \left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right]ac = d_b^2 \tag{4.139}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}} = r \tag{4.140}$$

Com a equação (4.139) obtém-se

$$\frac{(ac-d_b^2)(a+c)^2}{ac} = b^2 \tag{4.141}$$

E com a equação (4.140), obtém-se

$$c^3 - ac^2 - (a+c)b^2 + (4r^2 - a^2)c + (a^2 + 4r^2)a = [(c-a)^2 - b^2 - 4r^2]b \tag{4.142}$$

Substituindo o valor de b^2 dado por (4.141) em (4.142), resulta

$$\begin{aligned} &\frac{(ac-d_b^2)(a+c)^2}{ac} = \\ &= \Big[\frac{1}{a(c^2-2ac-4r^2+a^2)c-(ac-d_b^2)(a+c)^2}\big(ac^4-a^2c^3+ \\ &+ [a^4+4a^2r^2+(4r^2-a^2)ac-(ac-d_b^2)(a+c)^2]c - a(ac-d_b^2)(a+c)^2\big)\Big]^2 \end{aligned} \tag{4.143}$$

Como $< a, d_b, r >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.143) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.143) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ cm e $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.
Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (4.143). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.141), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $< a, b, c >$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 199) $< a, d_a, r_a >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{4.144}$$

$$\frac{2bc\cos\alpha/2}{b+c} = d_a \implies bc = \frac{(b+c)d_a}{2\cos\alpha/2} \tag{4.145}$$

$$\tan\alpha/2 = \frac{r_a}{p} \implies \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha/2}}{\cos\alpha/2} = \frac{2r_a}{a+b+c} \tag{4.146}$$

Com a equação (4.146) obtém-se

$$b + c = \frac{2r_a\cos\alpha/2}{\sqrt{1-\cos^2\alpha/2}} - a \tag{4.147}$$

Podemos escrever (4.144) como

$$(b+c)^2 - 2bc(1+\cos\alpha) = a^2$$

Como $1+\cos\alpha = 2\cos^2\alpha/2$, e com (4.145), a equação acima torna-se

$$(b+c)^2 - 2d_a(b+c)\cos\alpha/2 = a^2,$$

ou, com (4.147),

$$x^4 + \frac{4ar_a^2 d_a}{(a^2+4r_a^2)d_a^2}x^3 + \frac{4(a^2+r_a^2-d_a^2)r_a^2 - 2a^2d_a^2}{(a^2+4r^2)d_a^2}x^2 - \frac{4ar_a^2d_a}{(a^2+4r_a^2)d_a^2}x + \frac{(d_a^2-4r_a^2)a^2}{(a^2+4r_a^2)d_a^2} = 0, \tag{4.148}$$

onde $x = \cos\alpha/2$.

Como $<a, d_a, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.148) com um programa qualquer para obter x.

Se a equação (4.148) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$ e $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.148) torna-se

$$x^4 + \frac{90\sqrt{7}}{511}x^3 - \frac{436{,}25}{511}x^2 - \frac{90\sqrt{7}}{511}x + \frac{6{,}25}{511} = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se duas raízes positivas, as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$x_1 = 0{,}944911\,2 \implies b_1 = 7\,\text{cm} \;\text{ e }\; c_1 = 8\,\text{cm}$$
$$x_2 = 0{,}025109\,1 \quad \text{(solução estranha)}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b_1, c_1>$ satisfaz todas as condições do problema.

Exercício 200) $<a, d_a, r_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]bc = d_a^2 \tag{4.149}$$

$$\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)}{4(a-b+c)} = r_b^2 \tag{4.150}$$

Escrevemos (4.149) e (4.150) como

$$b^3 + \big(2c - \frac{d_a^2}{c}\big)b^2 + (c^2 - a^2 - 2d_a^2)b - d_a^2 c = 0 \tag{4.151}$$

$$\begin{aligned} b^3 + (a+c)b^2 - [(c-a)^2 - 4r_b^2]b - (c-a)c^2 + \\ + (a^2 - 4r_b^2)c - (a^2 + 4r_b^2)a = 0 \end{aligned} \tag{4.152}$$

Como $<a, d_a, r_b>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.151)–(4.152), obtendo assim os lados b e c do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$ e $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, um programa qualquer nos fornece $b = 7\,\text{cm}$ e $c = 8\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] N. Altshiller-Court. *College Geometry.* Barnes & Noble, New York, 1952.

[2] R. W. Brink. *Analytic Geometry.* D. Appleton-Century Company, 1935.

[3] I. D'Ignazio and E. Suppa. *Il Problema Geometrico dal Compasso al Cabri.* Interlinea editrice, Itália, 2001.

[4] H. W. Eves. Problem 1054, Two euclidean constructions. *Mathematics Magazine*, 53:52–53, 1980.

[5] V. B. Fursenko. Lexicographic account of triangle construction problems. *Mathematics in schools*, 5:4–30, 1937. Parte i (em russo).

[6] V. B. Fursenko. Lexicographic account of triangle construction problems. *Mathematics in schools*, 6:21–45, 1937. Parte ii (em russo).

[7] K. Herterich. *Die Konstruktion von Dreiecken.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1986.

[8] L. Lopes. *Manual de Construção de Triângulos*, volume 1. A ser publicado, Rio de Janeiro, 2015.

[9] A. C. de O. Morgado and E. Wagner e M. Jorge. *Geometria I.* Editora Francisco Alves, Rio de Janeiro, 1973.

[10] S. L. Netto. *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções.* Coleção do Professor de Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 2009.

[11] J. C. Putnoki. *Elementos de Geometria & Desenho Geométrico.* Editora Scipione, São Paulo, 1989.

[12] P. Yiu. Elegant geometric constructions. http://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200512.pdf, 2005. Último acesso: março de 2010.

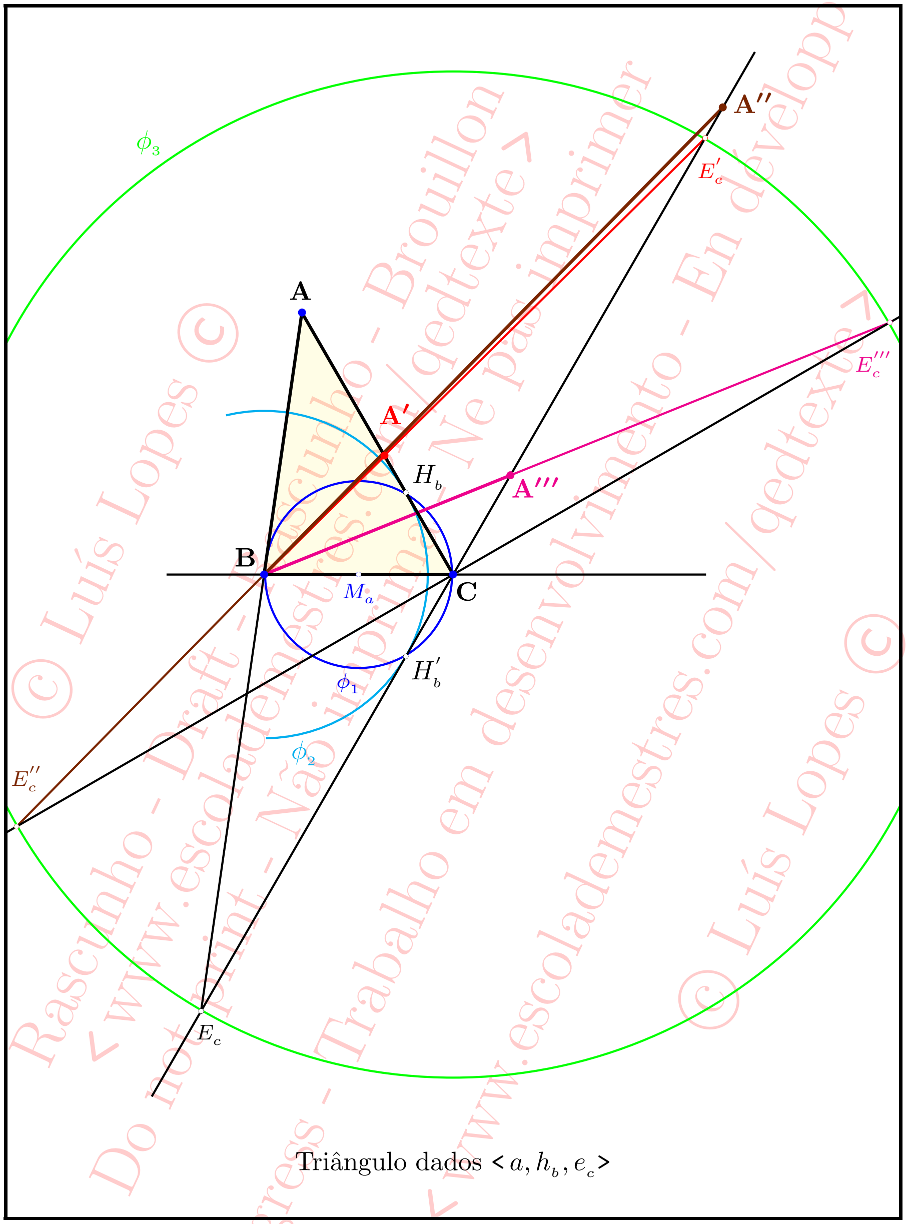


Figura 4.123: Exercício 157.

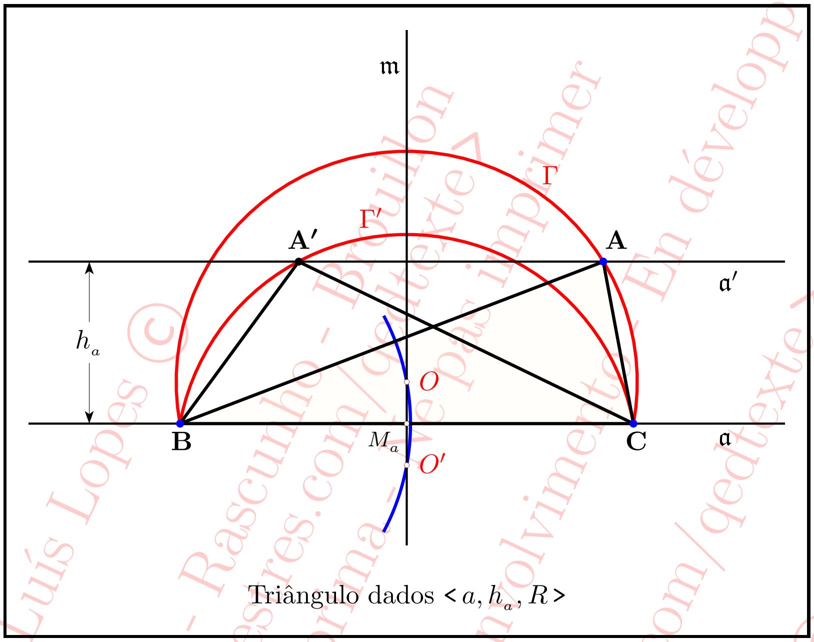
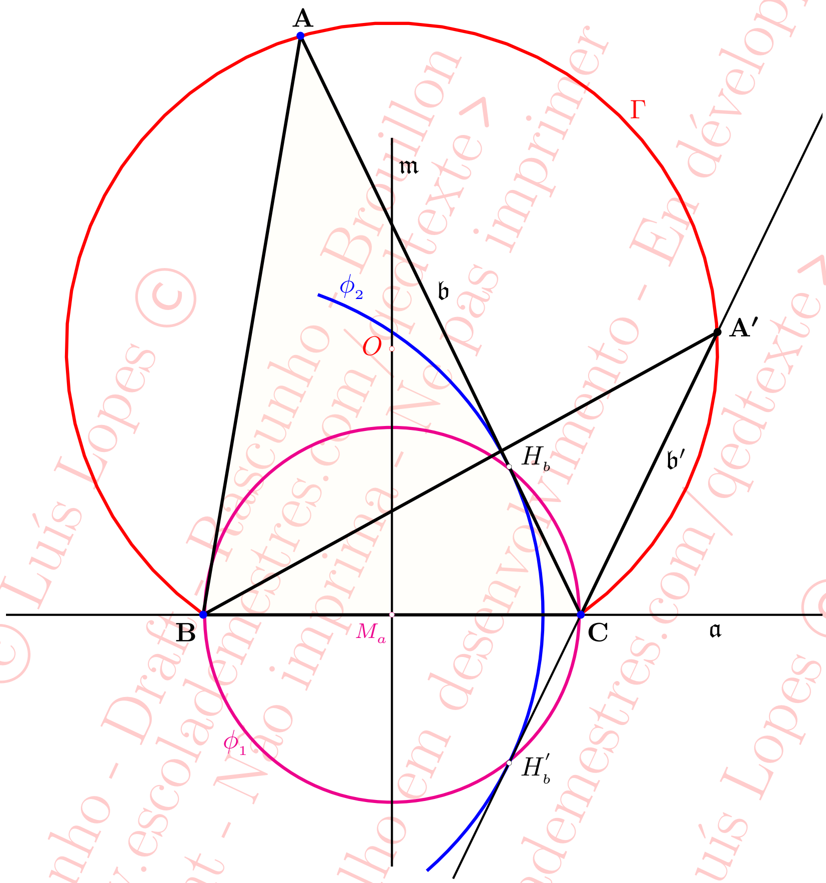


Figura 4.124: Exercício 158 — Segundo procedimento.



Triângulo dados $<a, h_b, R>$

Figura 4.125: Exercício 159 — Segundo procedimento.

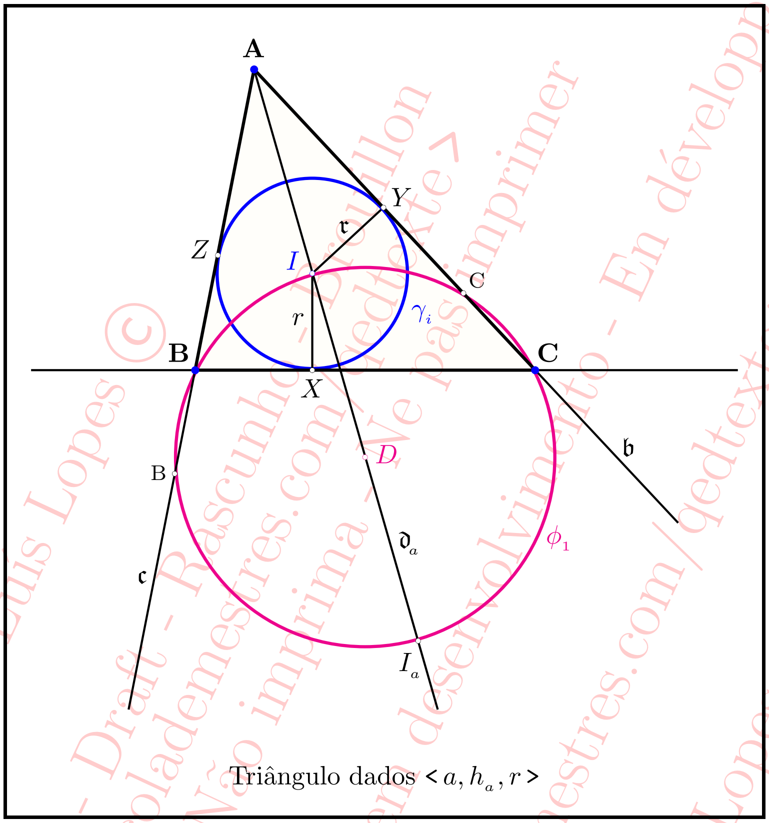


Figura 4.126: Exercício 160 — Terceiro procedimento.

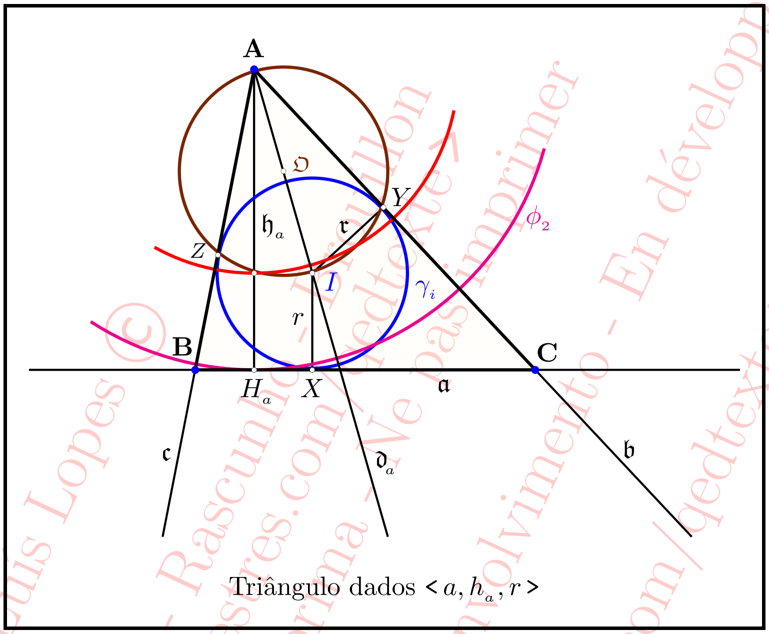


Figura 4.127: Reta $\mathfrak{a}$ é uma tangente comum exterior aos círculos $\phi_2 = (\mathbf{A}, h_a)$ e γ_i.

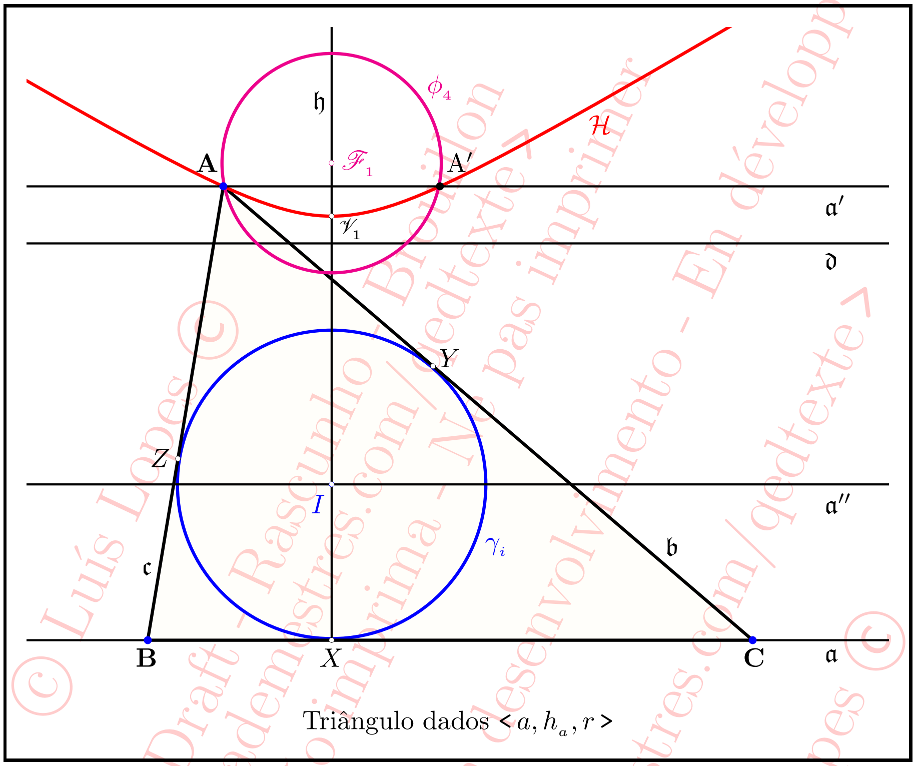


Figura 4.128: Exercício 160 — Quarto procedimento.

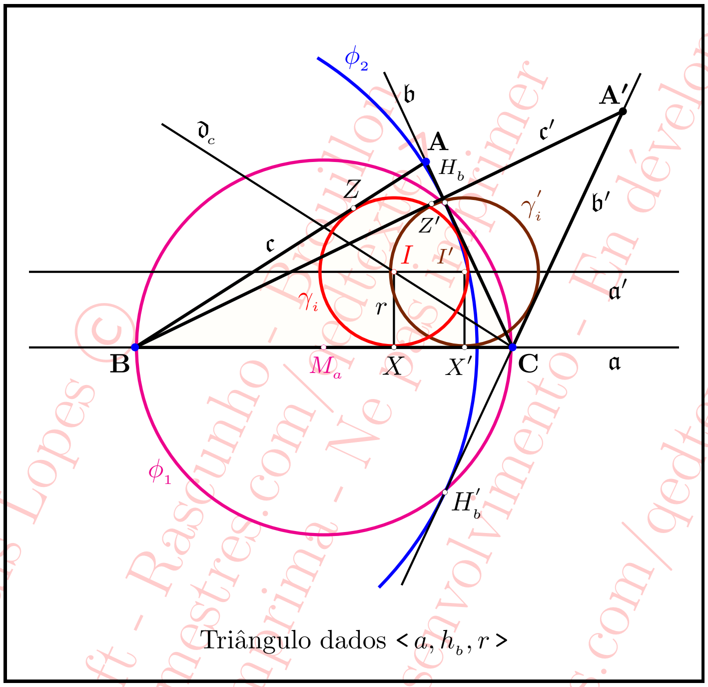


Figura 4.129: Exercício 161 — Segundo procedimento.

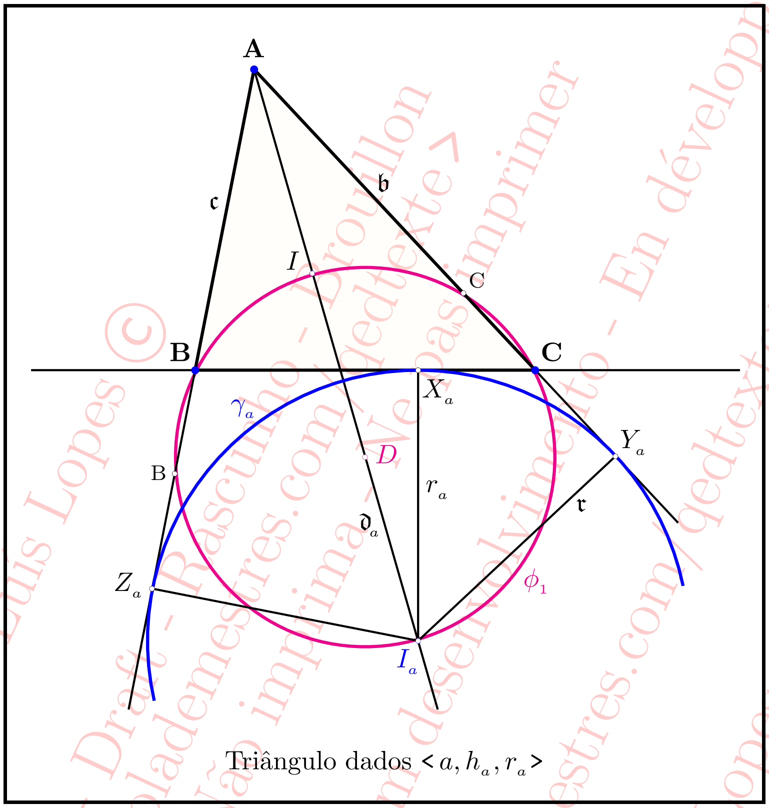


Figura 4.130: Exercício 162 — Segundo procedimento.

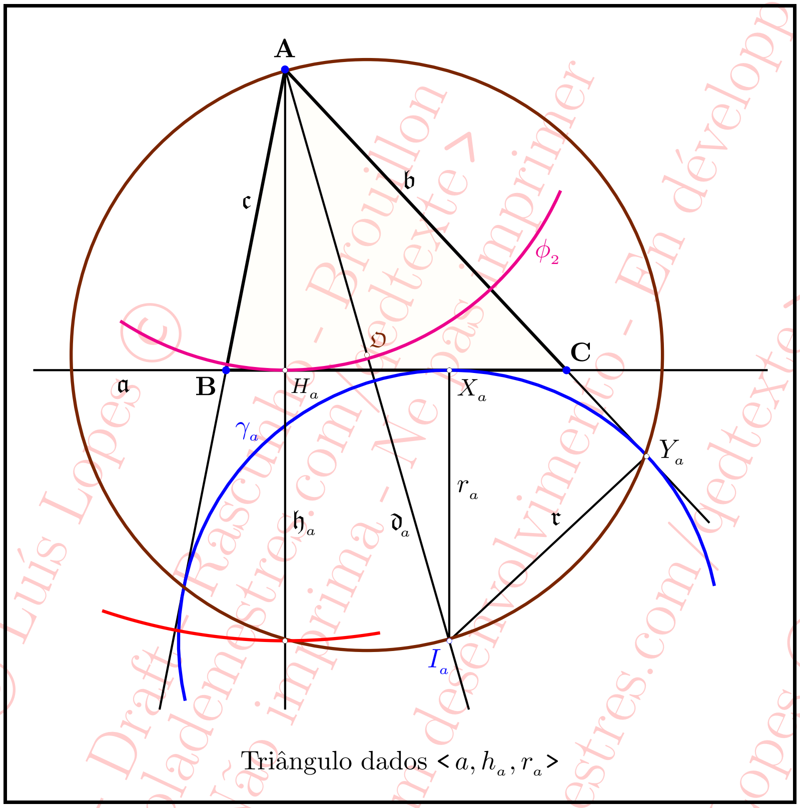


Figura 4.131: Reta $\mathfrak{a}$ é uma tangente comum interior aos círculos $\phi_2 = (\mathbf{A}, h_a)$ e γ_a.

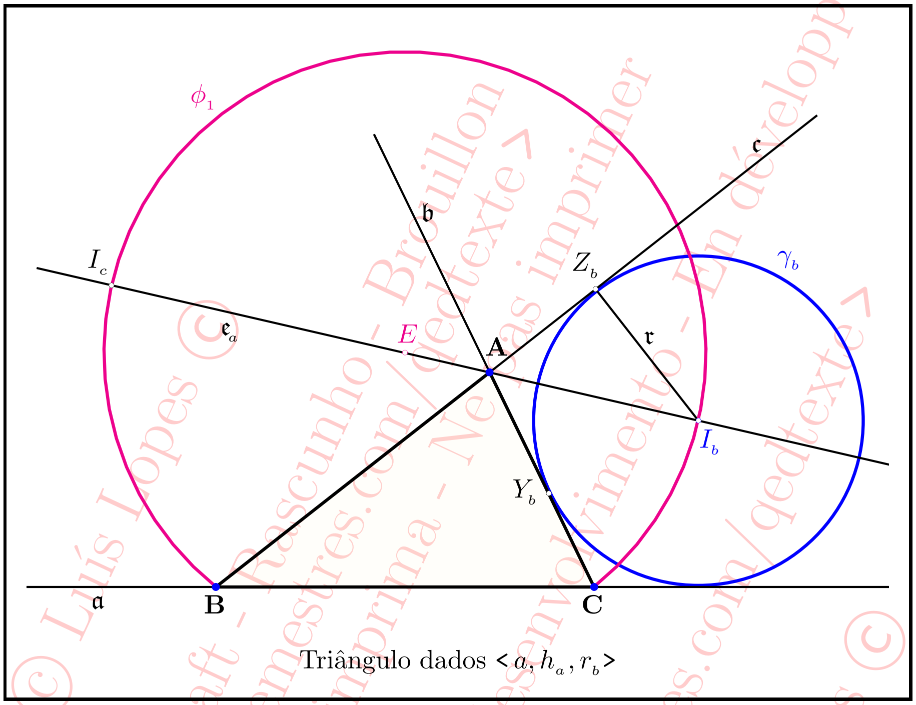


Figura 4.132: Exercício 163 — Segundo procedimento.

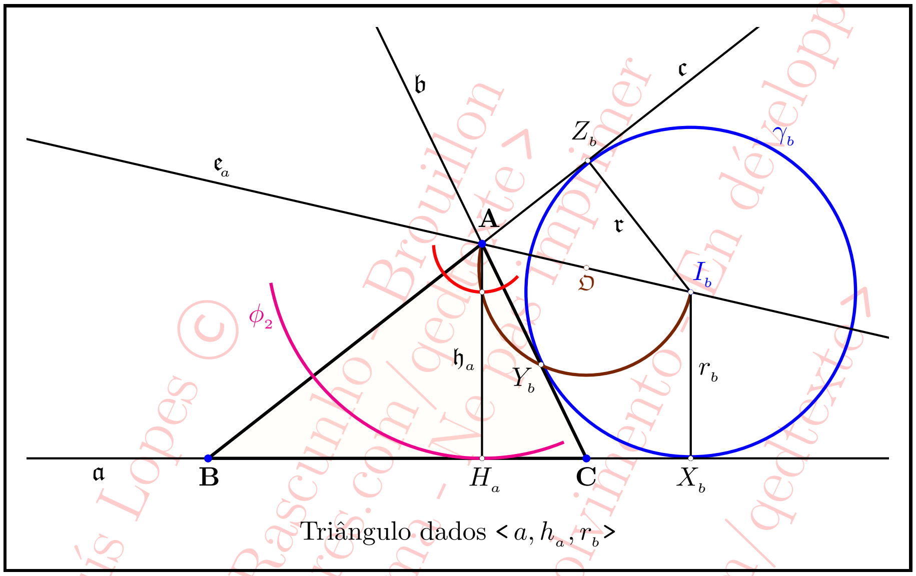


Figura 4.133: Reta $\mathfrak{a}$ é uma tangente comum exterior aos círculos $\phi_2 = (\mathbf{A}, h_a)$ e γ_b.

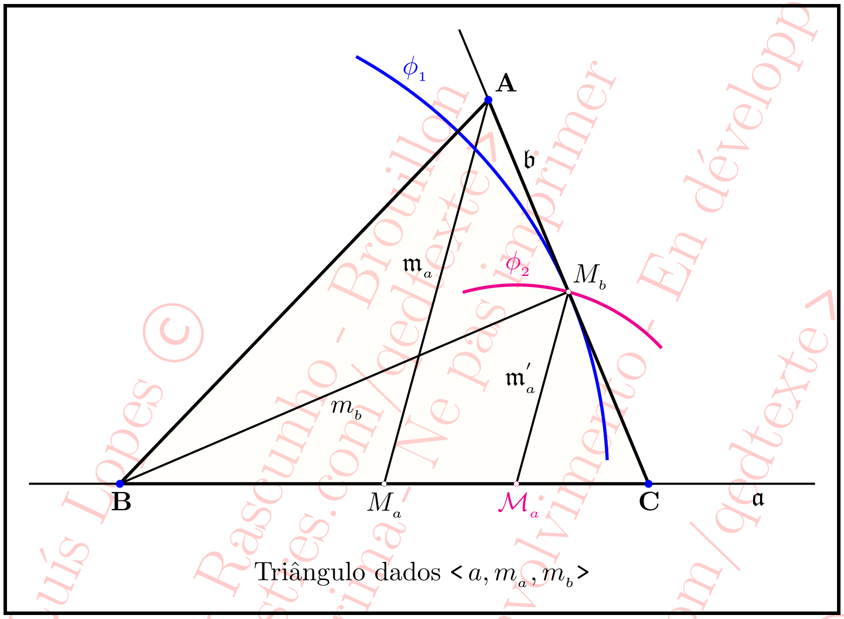


Figura 4.134: Exercício 167 — Primeiro procedimento.

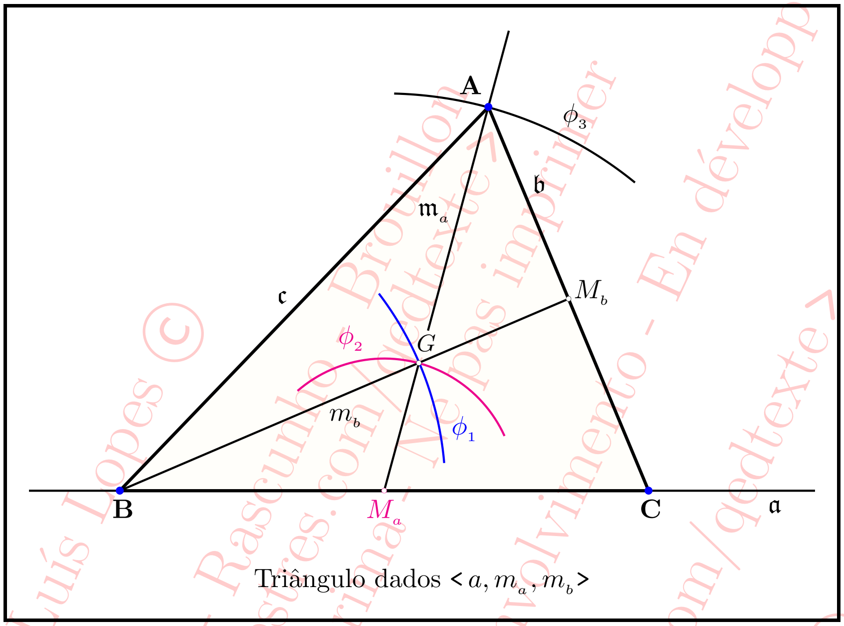


Figura 4.135: Exercício 167 — Segundo procedimento.

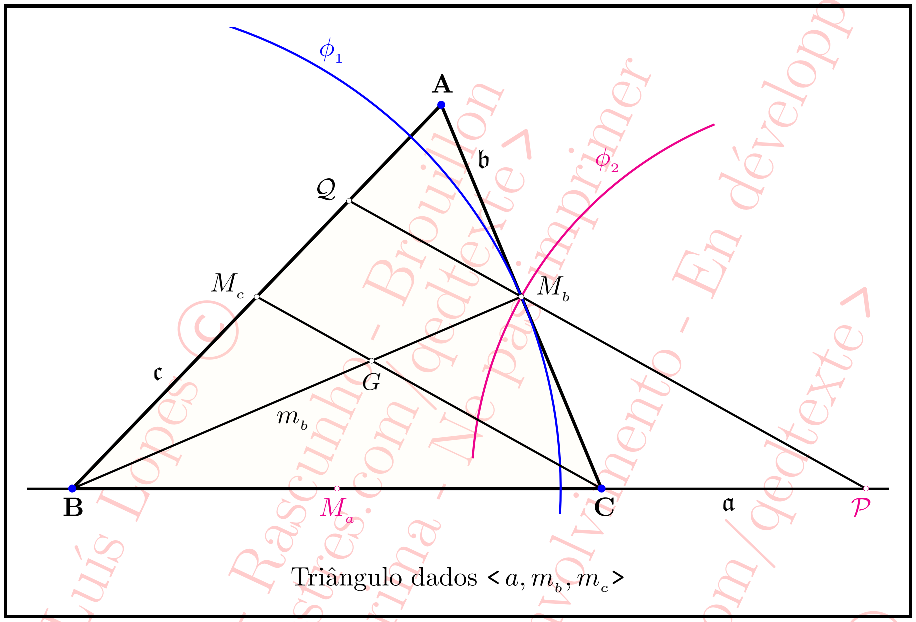


Figura 4.136: Exercício 168 — Primeiro procedimento.

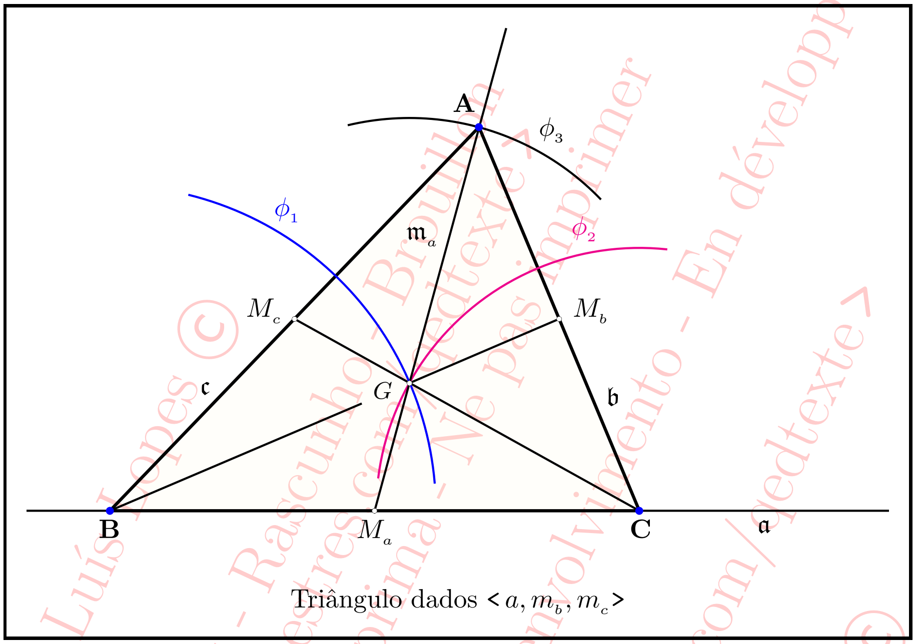
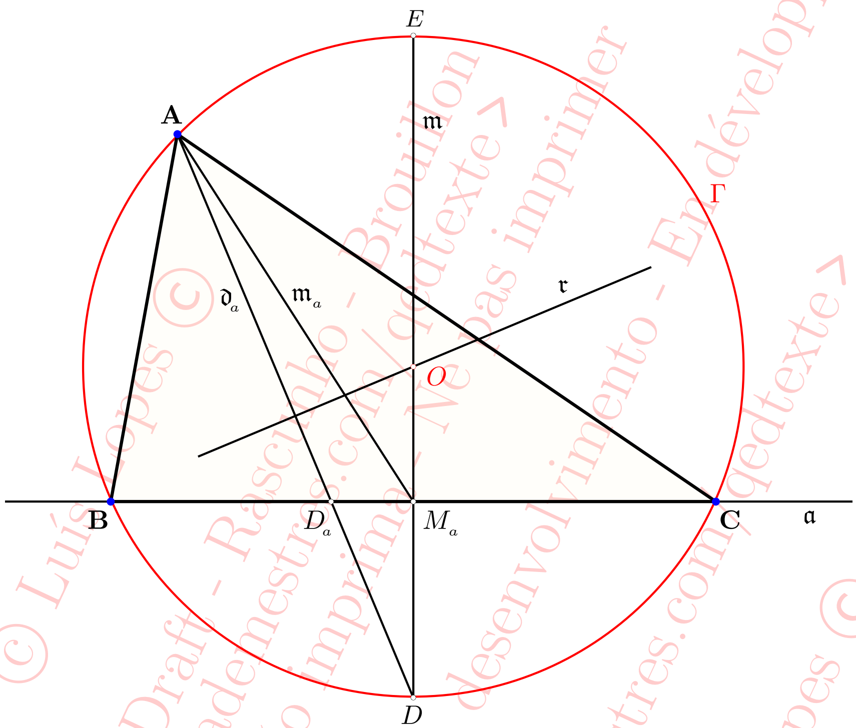
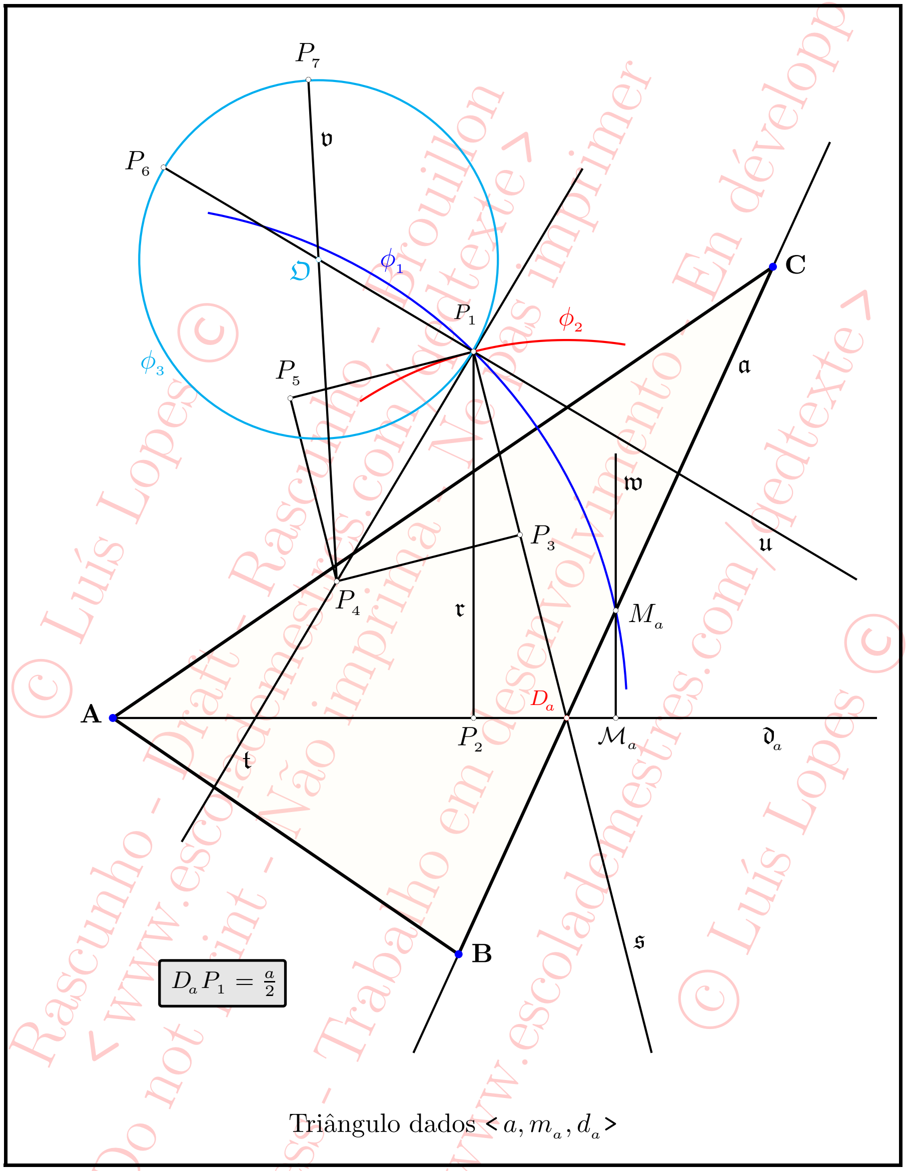


Figura 4.137: Exercício 168 — Segundo procedimento.



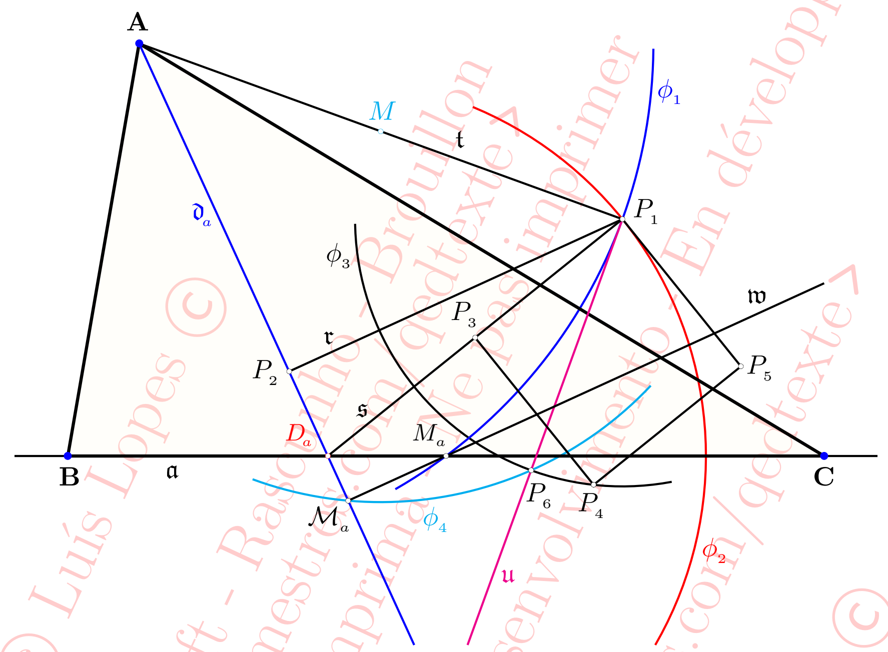
Triângulo dados $<a, m_a, d_a>$

Figura 4.138: Exercício 169 — Segundo procedimento.



Triângulo dados $<a, m_a, d_a>$

Figura 4.139: Exercício 169 — Terceiro procedimento.



Triângulo dados < a, m_a, d_a >

Figura 4.140: Exercício 169 — Terceiro procedimento. Construção de Paul Yiu em [12].

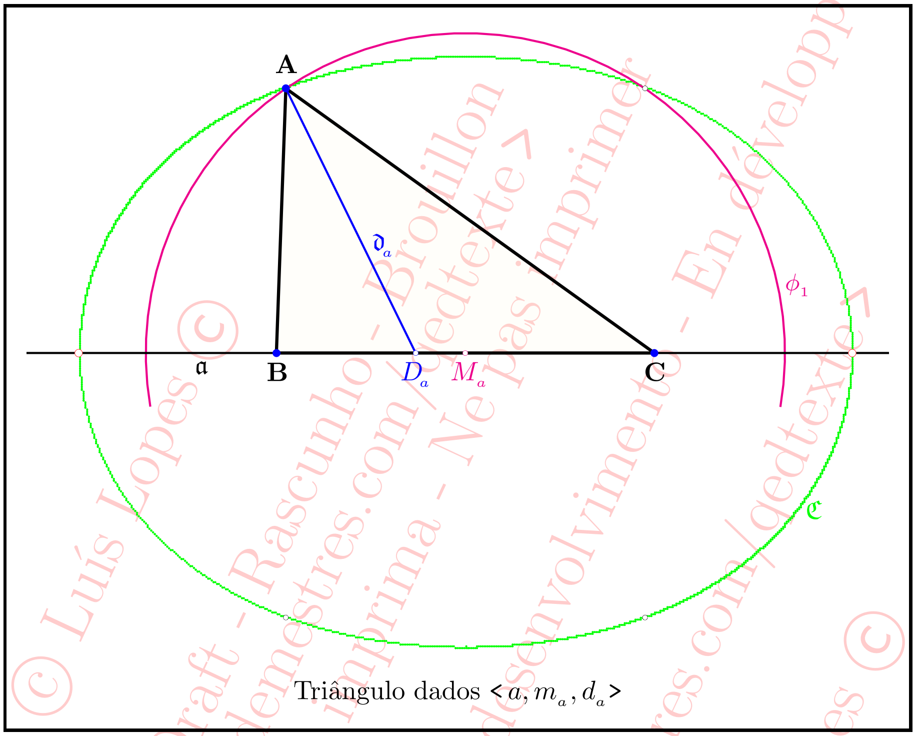
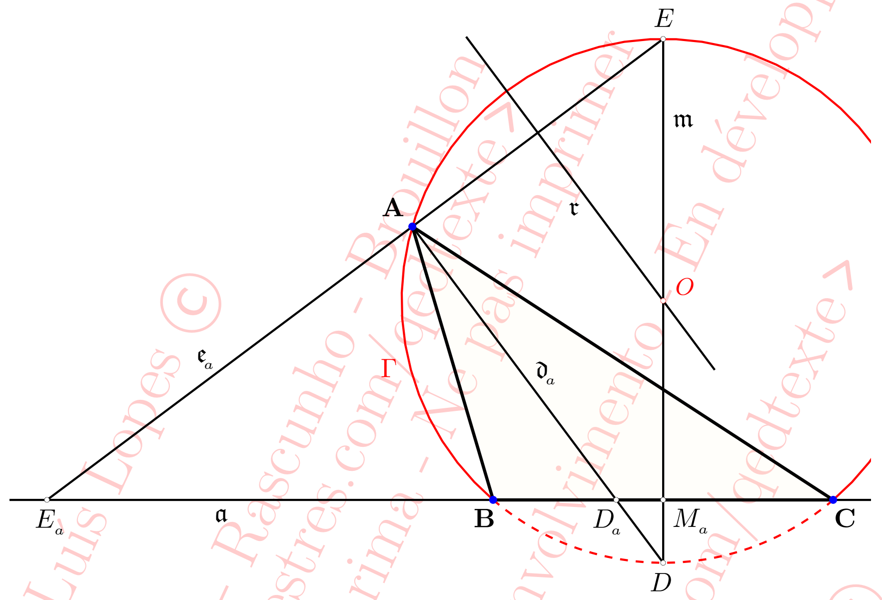
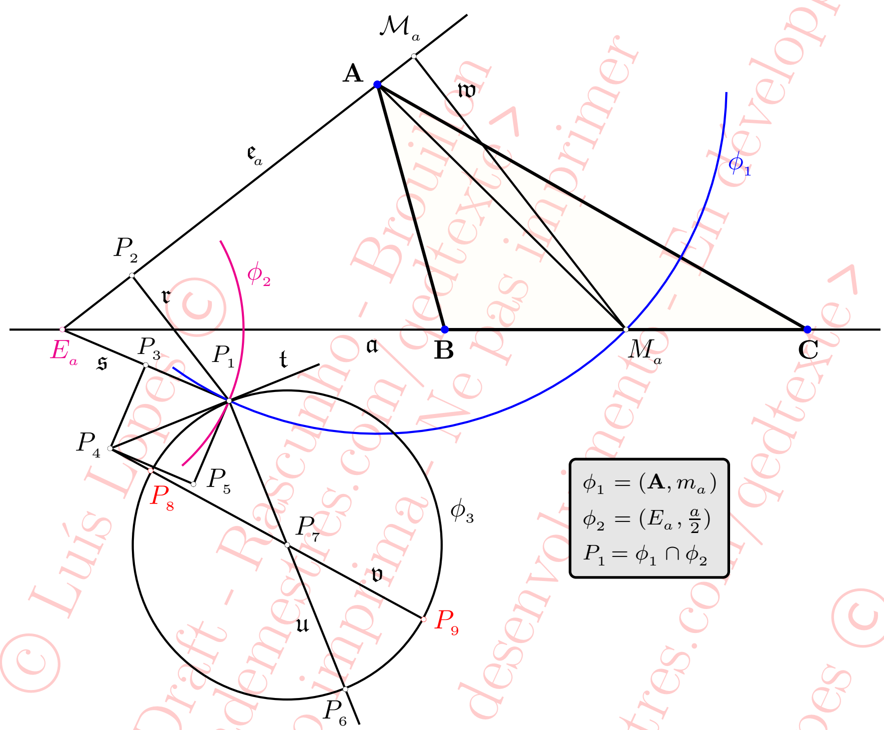


Figura 4.141: Exercício 169 — Quarto procedimento.



Triângulo dados $\langle a, m_a, e_a \rangle$

Figura 4.142: Exercício 174 — Segundo procedimento.



Triângulo dados $< a, m_a, e_a >$

Figura 4.143: Exercício 174 — Terceiro procedimento.

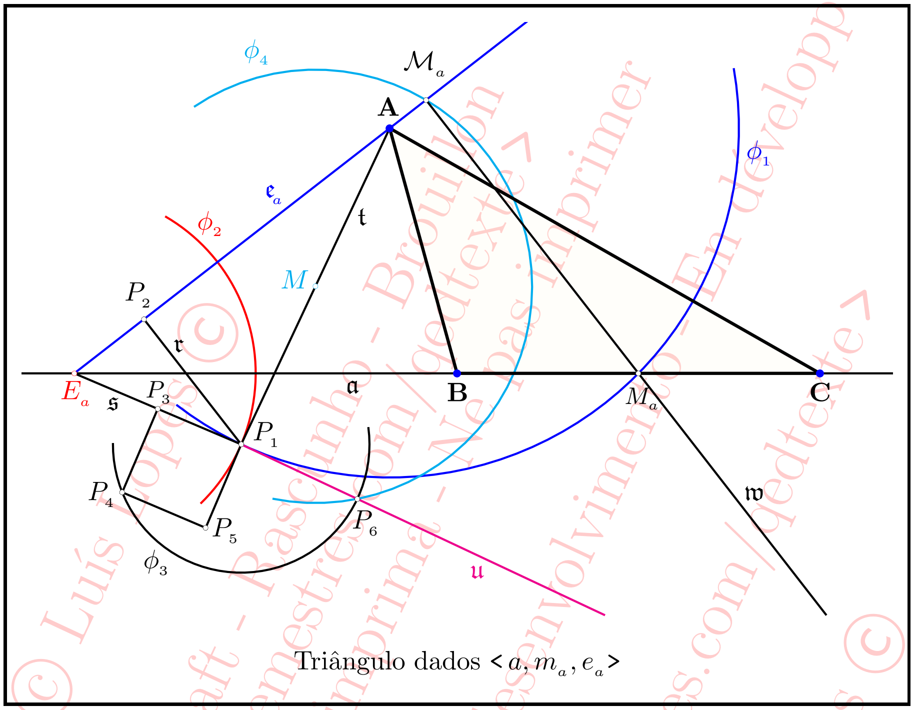


Figura 4.144: Exercício 174 — Terceiro procedimento. Construção baseada na figura 4.140.

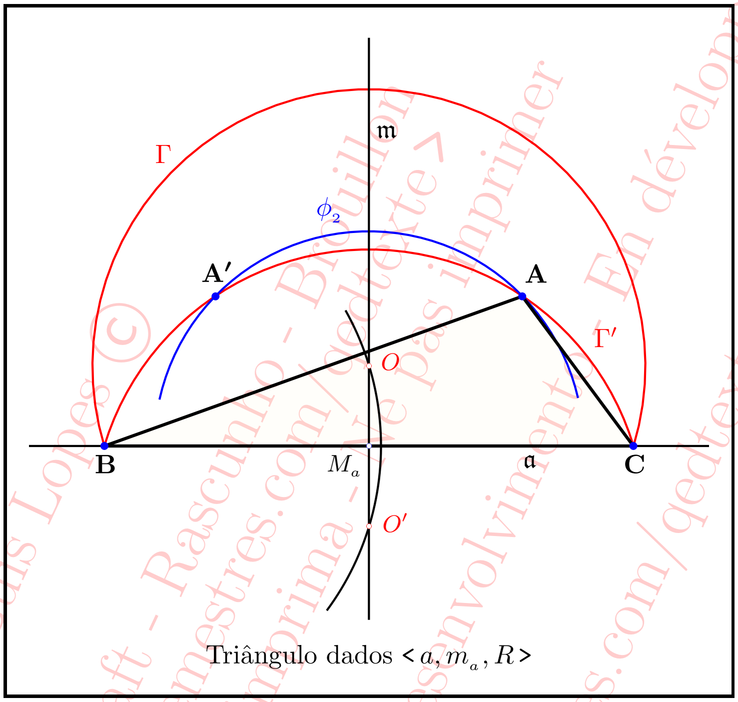


Figura 4.145: Exercício 179 — Segundo procedimento.

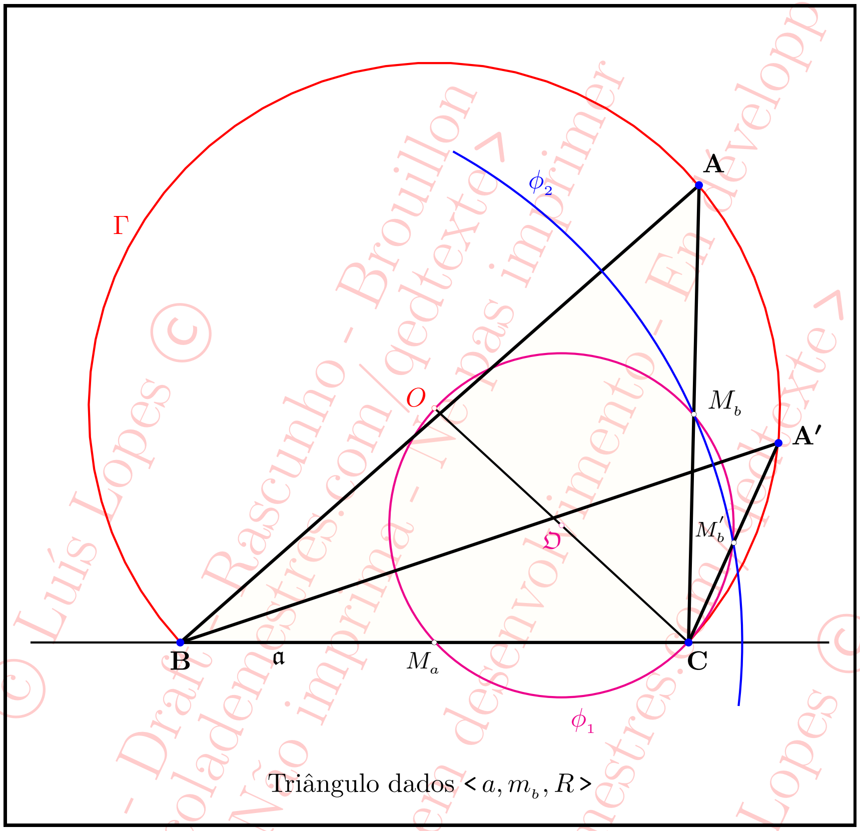


Figura 4.146: Exercício 180 — Segundo procedimento.