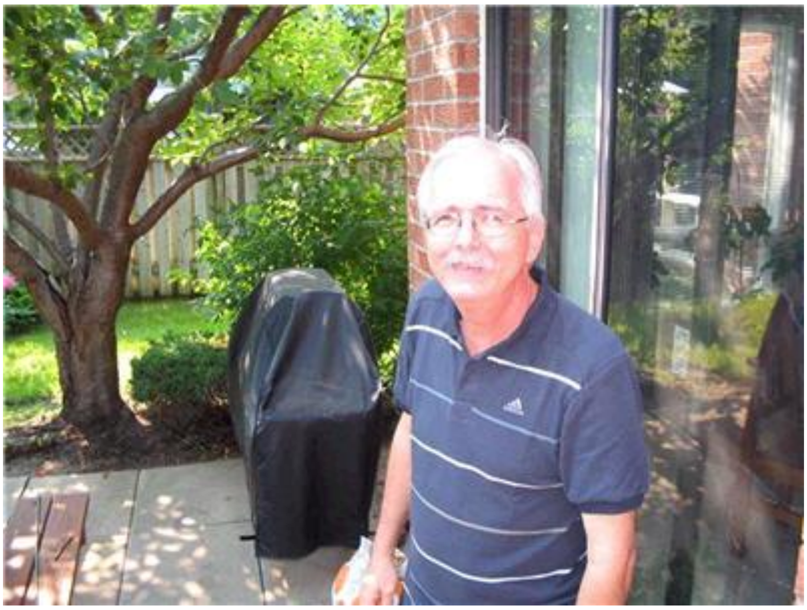


# Manual de Construção de Triângulos

Todos os volumes disponibilizados ao público estão em

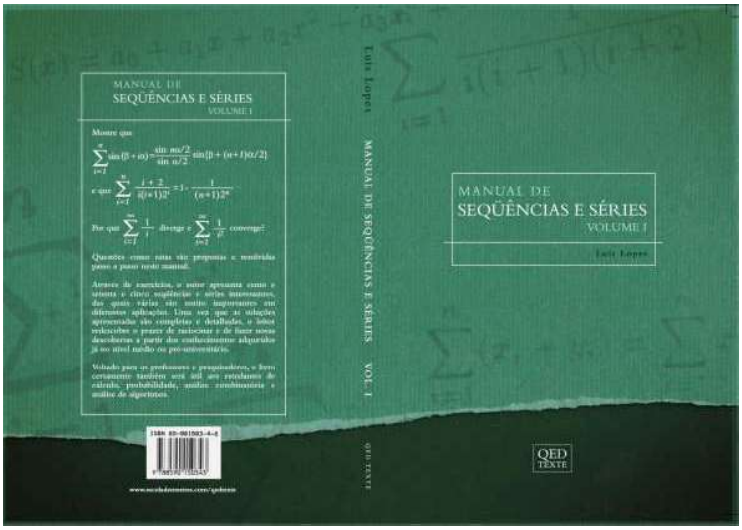
http://www.escolademestres.com/blogs/questoesresolvidas/matematica/306-construcoes-geometricas-de-triangulosversao-eletonica

Caso você goste do trabalho, há um link na mesma página para que você possa fazer uma contribuição para projeto através do Paypal.

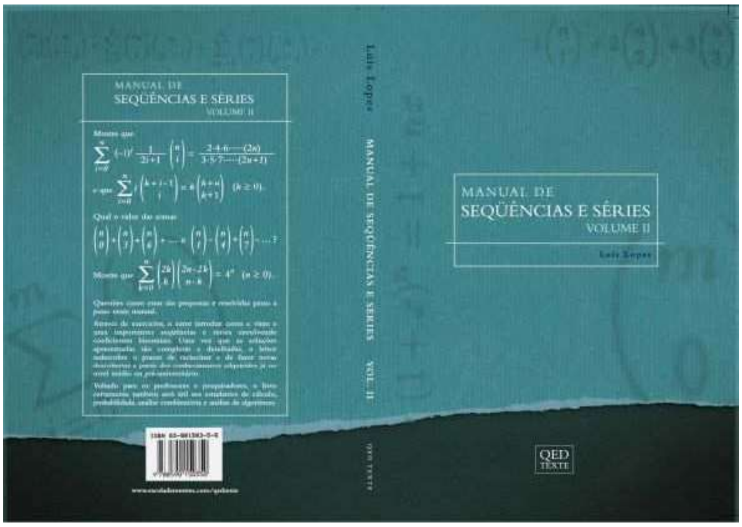
http://www.escolademestres.com/qedtexte

Tópicos abordados são os seguintes:

**Seqüências e Séries -**
**Volume 1**



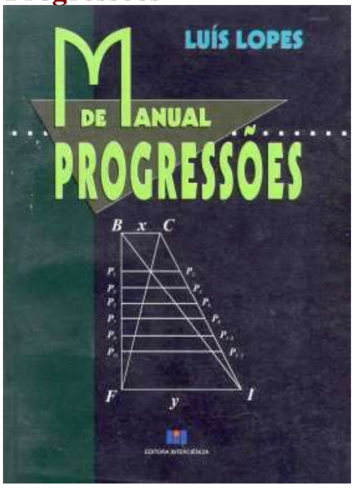

**Volume 2**



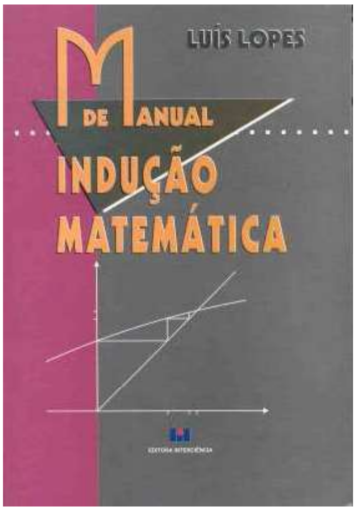
# Coleção de Matemática do Prof Luís Lopes

**Funções Exponenciais e Logarítmicas**


**Progressões**




**Indução Matemática**



This file was produced on September 9, 2015.
Montreal, CA and Rio de Janeiro, BR.
Work in progress.
Do not print. Spare the planet.
Contributions of all kinds are welcome.
Consider new constructions and insights,
algebraic developments and numerical solution,
discussion to existence and number of solutions,
references, etc.

---

Este arquivo foi criado em 9 de setembro de 2015. Montreal, CA e Rio de Janeiro, BR.
Trabalho em desenvolvimento.
Não imprima. Evite desperdícios.
Colaborações de qualquer natureza são solicitadas.

# Conteúdo

# Lista de Figuras

# CAPÍTULO 3

## EXERCÍCIOS

O enunciado de todos os exercícios começa por: construir um triângulo $\triangle$ **ABC** sendo dados ...

**Exercício 1)** $\blacktriangle$ $<\alpha,\ \beta,\ \gamma>$ `(alpha,beta,gamma)`.

**Exercício 2)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ a>$ `(alpha,beta,a)`.

**Exercício 3)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ c>$ `(alpha,beta,c)`.

**Exercício 4)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ h_a>$ `(alpha,beta,h_a)`.

**Exercício 5)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ h_c>$ `(alpha,beta,h_c)`.

**Exercício 6)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ m_a>$ `(alpha,beta,m_a)`.

**Exercício 7)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ m_c>$ `(alpha,beta,m_c)`.

**Exercício 8)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ d_a>$ `(alpha,beta,d_a)`.

**Exercício 9)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ d_c>$ `(alpha,beta,d_c)`.

**Exercício 10)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ e_a>$ `(alpha,beta,e_a)`.

**Exercício 11)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ e_c>$ `(alpha,beta,e_c)`.

**Exercício 12)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ R>$ `(alpha,beta,R)`.

**Exercício 13)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r>$ `(alpha,beta,r)`.

**Exercício 14)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r_a>$ `(alpha,beta,r_a)`.

**Exercício 15)** $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r_c>$ `(alpha,beta,r_c)`.

**Exercício 16)** $\triangle$ $<\alpha,\, a,\, b>$ `(alpha,a,b).`

**Exercício 17)** $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, c>$ `(alpha,b,c).`

**Exercício 18)** $\triangle$ $<\alpha,\, a,\, h_a>$ `(alpha,a,h_a).`

**Exercício 19)** $\triangle$ $<\alpha,\, a,\, h_b>$ `(alpha,a,h_b).`

**Exercício 20)** $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, h_a>$ `(alpha,b,h_a).`

**Exercício 21)** $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, h_b>$ `(alpha,b,h_b).`

**Exercício 22)** $\blacktriangle$ $<\alpha,\, b,\, h_c>$ `(alpha,b,h_c).`

**Exercício 23)** $\triangle$ $<\alpha,\, a,\, m_a>$ `(alpha,a,m_a).`

**Exercício 24)** $\triangle$ $<\alpha,\, a,\, m_b>$ `(alpha,a,m_b).`

**Exercício 25)** $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, m_a>$ `(alpha,b,m_a).`

**Exercício 26)** $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, m_b>$ `(alpha,b,m_b).`

**Exercício 27)** $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, m_c>$ `(alpha,b,m_c).`

**Exercício 28)** $\triangle$ $<\alpha,\, a,\, d_a>$ `(alpha,a,d_a).`

**Exercício 29)** $<\alpha,\, a,\, d_b>$ `(alpha,a,d_b).`

**Exercício 30)** $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, d_a>$ `(alpha,b,d_a).`

**Exercício 31)** $<\alpha,\, b,\, d_b>$ `(alpha,b,d_b).`

**Exercício 32)** $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, d_c>$ `(alpha,b,d_c).`

**Exercício 33)** $\triangle$ $<\alpha,\, a,\, e_a>$ `(alpha,a,e_a).`

**Exercício 34)** $<\alpha,\, a,\, e_b>$ `(alpha,a,e_b).`

**Exercício 35)** $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, e_a>$ `(alpha,b,e_a).`

**Exercício 36)** $<\alpha,\, b,\, e_b>$ `(alpha,b,e_b).`

**Exercício 37)** $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, e_c>$ `(alpha,b,e_c).`

**Exercício 38)** $\blacktriangle$ $<\alpha,\, a,\, R>$ `(alpha,a,R).`

**Exercício 39)** $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, R>$ `(alpha,b,R).`

**Exercício 40)** $\triangle$ $<\alpha,\, a,\, r>$ `(alpha,a,r).`

**Exercício 41)** $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, r>$ `(alpha,b,r).`

**Exercício 42)** $\triangle$ $<\alpha,\, a,\, r_a>$ `(alpha,a,r_a).`

**Exercício 43)** $\triangle$ $<\alpha,\, a,\, r_b>$ `(alpha,a,r_b).`

**Exercício 44)** $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, r_a>$ `(alpha,b,r_a).`

**Exercício 45)** $\triangle$ $<\alpha, b, r_b>$ `(alpha,b,r_b)`.

**Exercício 46)** $\triangle$ $<\alpha, b, r_c>$ `(alpha,b,r_c)`.

**Exercício 47)** $\triangle$ $<\alpha, h_a, h_b>$ `(alpha,h_a,h_b)`.

**Exercício 48)** $\triangle$ $<\alpha, h_b, h_c>$ `(alpha,h_b,h_c)`.

**Exercício 49)** $\triangle$ $<\alpha, h_a, m_a>$ `(alpha,h_a,m_a)`.

**Exercício 50)** $\triangle$ $<\alpha, h_a, m_b>$ `(alpha,h_a,m_b)`.

**Exercício 51)** $\triangle$ $<\alpha, h_b, m_a>$ `(alpha,h_b,m_a)`.

**Exercício 52)** $\triangle$ $<\alpha, h_b, m_b>$ `(alpha,h_b,m_b)`.

**Exercício 53)** $\triangle$ $<\alpha, h_b, m_c>$ `(alpha,h_b,m_c)`.

**Exercício 54)** $\triangle$ $<\alpha, h_a, d_a>$ `(alpha,h_a,d_a)`.

**Exercício 55)** $<\alpha, h_a, d_b>$ `(alpha,h_a,d_b)`.

**Exercício 56)** $\triangle$ $<\alpha, h_b, d_a>$ `(alpha,h_b,d_a)`.

**Exercício 57)** $\triangle$ $<\alpha, h_b, d_b>$ `(alpha,h_b,d_b)`.

**Exercício 58)** $<\alpha, h_b, d_c>$ `(alpha,h_b,d_c)`.

**Exercício 59)** $\triangle$ $<\alpha, h_a, e_a>$ `(alpha,h_a,e_a)`.

**Exercício 60)** $<\alpha, h_a, e_b>$ `(alpha,h_a,e_b)`.

**Exercício 61)** $\triangle$ $<\alpha, h_b, e_a>$ `(alpha,h_b,e_a)`.

**Exercício 62)** $\triangle$ $<\alpha, h_b, e_b>$ `(alpha,h_b,e_b)`.

**Exercício 63)** $<\alpha, h_b, e_c>$ `(alpha,h_b,e_c)`.

**Exercício 64)** $\triangle$ $<\alpha, h_a, R>$ `(alpha,h_a,R)`.

**Exercício 65)** $\triangle$ $<\alpha, h_b, R>$ `(alpha,h_b,R)`.

**Exercício 66)** $\triangle$ $<\alpha, h_a, r>$ `(alpha,h_a,r)`.

**Exercício 67)** $\triangle$ $<\alpha, h_b, r>$ `(alpha,h_b,r)`.

**Exercício 68)** $\triangle$ $<\alpha, h_a, r_a>$ `(alpha,h_a,r_a)`.

**Exercício 69)** $\triangle$ $<\alpha, h_a, r_b>$ `(alpha,h_a,r_b)`.

**Exercício 70)** $\triangle$ $<\alpha, h_b, r_a>$ `(alpha,h_b,r_a)`.

**Exercício 71)** $\triangle$ $<\alpha, h_b, r_b>$ `(alpha,h_b,r_b)`.

**Exercício 72)** $\triangle$ $<\alpha, h_b, r_c>$ `(alpha,h_b,r_c)`.

**Exercício 73)** $\triangle$ $<\alpha, m_a, m_b>$ `(alpha,m_a,m_b)`.

**Exercício 74)** $\triangle$ $<\alpha, m_b, m_c>$ (alpha,m_b,m_c).

**Exercício 75)** $\triangle$ $<\alpha, m_a, d_a>$ (alpha,m_a,d_a).

**Exercício 76)** $<\alpha, m_a, d_b>$ (alpha,m_a,d_b).

**Exercício 77)** $<\alpha, m_b, d_a>$ (alpha,m_b,d_a).

**Exercício 78)** $<\alpha, m_b, d_b>$ (alpha,m_b,d_b).

**Exercício 79)** $<\alpha, m_b, d_c>$ (alpha,m_b,d_c).

**Exercício 80)** $\triangle$ $<\alpha, m_a, e_a>$ (alpha,m_a,e_a).

**Exercício 81)** $<\alpha, m_a, e_b>$ (alpha,m_a,e_b).

**Exercício 82)** $<\alpha, m_b, e_a>$ (alpha,m_b,e_a).

**Exercício 83)** $<\alpha, m_b, e_b>$ (alpha,m_b,e_b).

**Exercício 84)** $<\alpha, m_b, e_c>$ (alpha,m_b,e_c).

**Exercício 85)** $\triangle$ $<\alpha, m_a, R>$ (alpha,m_a,R).

**Exercício 86)** $\triangle$ $<\alpha, m_b, R>$ (alpha,m_b,R).

**Exercício 87)** $\triangle$ $<\alpha, m_a, r>$ (alpha,m_a,r).

**Exercício 88)** $<\alpha, m_b, r>$ (alpha,m_b,r).

**Exercício 89)** $\triangle$ $<\alpha, m_a, r_a>$ (alpha,m_a,r_a).

**Exercício 90)** $\triangle$ $<\alpha, m_a, r_b>$ (alpha,m_a,r_b).

**Exercício 91)** $<\alpha, m_b, r_a>$ (alpha,m_b,r_a).

**Exercício 92)** $<\alpha, m_b, r_b>$ (alpha,m_b,r_b).

**Exercício 93)** $<\alpha, m_b, r_c>$ (alpha,m_b,r_c).

**Exercício 94)** $<\alpha, d_a, d_b>$ (alpha,d_a,d_b).

**Exercício 95)** $<\alpha, d_b, d_c>$ (alpha,d_b,d_c).

**Exercício 96)** $\triangle$ $<\alpha, d_a, e_a>$ (alpha,d_a,e_a).

**Exercício 97)** $<\alpha, d_a, e_b>$ (alpha,d_a,e_b).

**Exercício 98)** $<\alpha, d_b, e_a>$ (alpha,d_b,e_a).

**Exercício 99)** $\triangle$ $<\alpha, d_b, e_b>$ (alpha,d_b,e_b).

**Exercício 100)** $<\alpha, d_b, e_c>$ (alpha,d_b,e_c).

**Exercício 101)** $\triangle$ $<\alpha, d_a, R>$ (alpha,d_a,R).

**Exercício 102)** $<\alpha, d_b, R>$ (alpha,d_b,R).

**Exercício 103)** $\triangle$ $<\alpha, d_a, r>$ (alpha,d_a,r).

**Exercício 104)** $\triangle$ $<\alpha, d_b, r>$ (alpha,d_b,r).

**Exercício 105)** $\triangle$ $<\alpha, d_a, r_a>$ (alpha,d_a,r_a).

**Exercício 106)** $\triangle$ $<\alpha, d_a, r_b>$ (alpha,d_a,r_b).

**Exercício 107)** $<\alpha, d_b, r_a>$ (alpha,d_b,r_a).

**Exercício 108)** $\triangle$ $<\alpha, d_b, r_b>$ (alpha,d_b,r_b).

**Exercício 109)** $<\alpha, d_b, r_c>$ (alpha,d_b,r_c).

**Exercício 110)** $<\alpha, e_a, e_b>$ (alpha,e_a,e_b).

**Exercício 111)** $<\alpha, e_b, e_c>$ (alpha,e_b,e_c).

**Exercício 112)** $\triangle$ $<\alpha, e_a, R>$ (alpha,e_a,R).

**Exercício 113)** $<\alpha, e_b, R>$ (alpha,e_b,R).

**Exercício 114)** $\triangle$ $<\alpha, e_a, r>$ (alpha,e_a,r).

**Exercício 115)** $<\alpha, e_b, r>$ (alpha,e_b,r).

**Exercício 116)** $\triangle$ $<\alpha, e_a, r_a>$ (alpha,e_a,r_a).

**Exercício 117)** $\triangle$ $<\alpha, e_a, r_b>$ (alpha,e_a,r_b).

**Exercício 118)** $\triangle$ $<\alpha, e_b, r_a>$ (alpha,e_b,r_a).

**Exercício 119)** $<\alpha, e_b, r_b>$ (alpha,e_b,r_b).

**Exercício 120)** $\triangle$ $<\alpha, e_b, r_c>$ (alpha,e_b,r_c).

**Exercício 121)** $\triangle$ $<\alpha, R, r>$ (alpha,R,r).

**Exercício 122)** $\triangle$ $<\alpha, R, r_a>$ (alpha,R,r_a).

**Exercício 123)** $\triangle$ $<\alpha, R, r_b>$ (alpha,R,r_b).

**Exercício 124)** $\triangle$ $<\alpha, r, r_a>$ (alpha,r,r_a).

**Exercício 125)** $\triangle$ $<\alpha, r, r_b>$ (alpha,r,r_b).

**Exercício 126)** $\triangle$ $<\alpha, r_a, r_b>$ (alpha,r_a,r_b).

**Exercício 127)** $\triangle$ $<\alpha, r_b, r_c>$ (alpha,r_b,r_c).

**Exercício 128)** $\triangle$ $<a, b, c>$ (a,b,c).

**Exercício 129)** $\triangle$ $<a, b, h_a>$ (a,b,h_a).

**Exercício 130)** $\triangle$ $<a, b, h_c>$ (a,b,h_c).

**Exercício 131)** $\triangle$ $<a, b, m_a>$ (a,b,m_a).

**Exercício 132)** $\triangle$ $<a, b, m_c>$ `(a,b,m_c)`.

**Exercício 133)** $<a, b, d_a>$ `(a,b,d_a)`.

**Exercício 134)** $\triangle$ $<a, b, d_c>$ `(a,b,d_c)`.

**Exercício 135)** $<a, b, e_a>$ `(a,b,e_a)`.

**Exercício 136)** $\triangle$ $<a, b, e_c>$ `(a,b,e_c)`.

**Exercício 137)** $\triangle$ $<a, b, R>$ `(a,b,R)`.

**Exercício 138)** $<a, b, r>$ `(a,b,r)`.

**Exercício 139)** $<a, b, r_a>$ `(a,b,r_a)`.

**Exercício 140)** $<a, b, r_c>$ `(a,b,r_c)`.

**Exercício 141)** $\triangle$ $<a, h_a, h_b>$ `(a,h_a,h_b)`.

**Exercício 142)** $\triangle$ $<a, h_b, h_c>$ `(a,h_b,h_c)`.

**Exercício 143)** $\triangle$ $<a, h_a, m_a>$ `(a,h_a,m_a)`.

**Exercício 144)** $\triangle$ $<a, h_a, m_b>$ `(a,h_a,m_b)`.

**Exercício 145)** $\triangle$ $<a, h_b, m_a>$ `(a,h_b,m_a)`.

**Exercício 146)** $\triangle$ $<a, h_b, m_b>$ `(a,h_b,m_b)`.

**Exercício 147)** $\triangle$ $<a, h_b, m_c>$ `(a,h_b,m_c)`.

**Exercício 148)** $\triangle$ $<a, h_a, d_a>$ `(a,h_a,d_a)`.

**Exercício 149)** $<a, h_a, d_b>$ `(a,h_a,d_b)`.

**Exercício 150)** $<a, h_b, d_a>$ `(a,h_b,d_a)`.

**Exercício 151)** $\triangle$ $<a, h_b, d_b>$ `(a,h_b,d_b)`.

**Exercício 152)** $\triangle$ $<a, h_b, d_c>$ `(a,h_b,d_c)`.

**Exercício 153)** $\triangle$ $<a, h_a, e_a>$ `(a,h_a,e_a)`.

**Exercício 154)** $<a, h_a, e_b>$ `(a,h_a,e_b)`.

**Exercício 155)** $<a, h_b, e_a>$ `(a,h_b,e_a)`.

**Exercício 156)** $\triangle$ $<a, h_b, e_b>$ `(a,h_b,e_b)`.

**Exercício 157)** $\triangle$ $<a, h_b, e_c>$ `(a,h_b,e_c)`.

**Exercício 158)** $\triangle$ $<a, h_a, R>$ `(a,h_a,R)`.

**Exercício 159)** $\triangle$ $<a, h_b, R>$ `(a,h_b,R)`.

**Exercício 160)** $\triangle$ $<a, h_a, r>$ `(a,h_a,r)`.

**Exercício 161)** △ $<a, h_b, r>$ (a,h_b,r).

**Exercício 162)** △ $<a, h_a, r_a>$ (a,h_a,r_a).

**Exercício 163)** △ $<a, h_a, r_b>$ (a,h_a,r_b).

**Exercício 164)** △ $<a, h_b, r_a>$ (a,h_b,r_a).

**Exercício 165)** △ $<a, h_b, r_b>$ (a,h_b,r_b).

**Exercício 166)** △ $<a, h_b, r_c>$ (a,h_b,r_c).

**Exercício 167)** △ $<a, m_a, m_b>$ (a,m_a,m_b).

**Exercício 168)** △ $<a, m_b, m_c>$ (a,m_b,m_c).

**Exercício 169)** △ $<a, m_a, d_a>$ (a,m_a,d_a).

**Exercício 170)** $<a, m_a, d_b>$ (a,m_a,d_b).

**Exercício 171)** $<a, m_b, d_a>$ (a,m_b,d_a).

**Exercício 172)** $<a, m_b, d_b>$ (a,m_b,d_b).

**Exercício 173)** $<a, m_b, d_c>$ (a,m_b,d_c).

**Exercício 174)** △ $<a, m_a, e_a>$ (a,m_a,e_a).

**Exercício 175)** $<a, m_a, e_b>$ (a,m_a,e_b).

**Exercício 176)** $<a, m_b, e_a>$ (a,m_b,e_a).

**Exercício 177)** $<a, m_b, e_b>$ (a,m_b,e_b).

**Exercício 178)** $<a, m_b, e_c>$ (a,m_b,e_c).

**Exercício 179)** △ $<a, m_a, R>$ (a,m_a,R).

**Exercício 180)** △ $<a, m_b, R>$ (a,m_b,R).

**Exercício 181)** $<a, m_a, r>$ (a,m_a,r).

**Exercício 182)** $<a, m_b, r>$ (a,m_b,r).

**Exercício 183)** $<a, m_a, r_a>$ (a,m_a,r_a).

**Exercício 184)** $<a, m_a, r_b>$ (a,m_a,r_b).

**Exercício 185)** $<a, m_b, r_a>$ (a,m_b,r_a).

**Exercício 186)** $<a, m_b, r_b>$ (a,m_b,r_b).

**Exercício 187)** $<a, m_b, r_c>$ (a,m_b,r_c).

**Exercício 188)** $<a, d_a, d_b>$ (a,d_a,d_b).

**Exercício 189)** $<a, d_b, d_c>$ (a,d_b,d_c).

**Exercício 190)** △ $<a,\, d_a,\, e_a>$ (a,d_a,e_a).

**Exercício 191)** $<a,\, d_a,\, e_b>$ (a,d_a,e_b).

**Exercício 192)** $<a,\, d_b,\, e_a>$ (a,d_b,e_a).

**Exercício 193)** △ $<a,\, d_b,\, e_b>$ (a,d_b,e_b).

**Exercício 194)** $<a,\, d_b,\, e_c>$ (a,d_b,e_c).

**Exercício 195)** △ $<a,\, d_a,\, R>$ (a,d_a,R).

**Exercício 196)** $<a,\, d_b,\, R>$ (a,d_b,R).

**Exercício 197)** $<a,\, d_a,\, r>$ (a,d_a,r).

**Exercício 198)** $<a,\, d_b,\, r>$ (a,d_b,r).

**Exercício 199)** $<a,\, d_a,\, r_a>$ (a,d_a,r_a).

**Exercício 200)** $<a,\, d_a,\, r_b>$ (a,d_a,r_b).

**Exercício 201)** $<a,\, d_b,\, r_a>$ (a,d_b,r_a).

**Exercício 202)** $<a,\, d_b,\, r_b>$ (a,d_b,r_b).

**Exercício 203)** $<a,\, d_b,\, r_c>$ (a,d_b,r_c).

**Exercício 204)** $<a,\, e_a,\, e_b>$ (a,e_a,e_b).

**Exercício 205)** $<a,\, e_b,\, e_c>$ (a,e_b,e_c).

**Exercício 206)** △ $<a,\, e_a,\, R>$ (a,e_a,R).

**Exercício 207)** $<a,\, e_b,\, R>$ (a,e_b,R).

**Exercício 208)** $<a,\, e_a,\, r>$ (a,e_a,r).

**Exercício 209)** $<a,\, e_b,\, r>$ (a,e_b,r).

**Exercício 210)** $<a,\, e_a,\, r_a>$ (a,e_a,r_a).

**Exercício 211)** $<a,\, e_a,\, r_b>$ (a,e_a,r_b).

**Exercício 212)** $<a,\, e_b,\, r_a>$ (a,e_b,r_a).

**Exercício 213)** $<a,\, e_b,\, r_b>$ (a,e_b,r_b).

**Exercício 214)** $<a,\, e_b,\, r_c>$ (a,e_b,r_c).

**Exercício 215)** △ $<a,\, R,\, r>$ (a,R,r).

**Exercício 216)** △ $<a,\, R,\, r_a>$ (a,R,r_a).

**Exercício 217)** △ $<a,\, R,\, r_b>$ (a,R,r_b).

**Exercício 218)** △ $<a,\, r,\, r_a>$ (a,r,r_a).

**Exercício 219)** △ $<a, r, r_b>$ `(a,r,r_b).`

**Exercício 220)** △ $<a, r_a, r_b>$ `(a,r_a,r_b).`

**Exercício 221)** △ $<a, r_b, r_c>$ `(a,r_b,r_c).`

**Exercício 222)** △ $<h_a, h_b, h_c>$ `(h_a,h_b,h_c).`

**Exercício 223)** △ $<h_a, h_b, m_a>$ `(h_a,h_b,m_a).`

**Exercício 224)** △ $<h_a, h_b, m_c>$ `(h_a,h_b,m_c).`

**Exercício 225)** $<h_a, h_b, d_a>$ `(h_a,h_b,d_a).`

**Exercício 226)** △ $<h_a, h_b, d_c>$ `(h_a,h_b,d_c).`

**Exercício 227)** $<h_a, h_b, e_a>$ `(h_a,h_b,e_a).`

**Exercício 228)** △ $<h_a, h_b, e_c>$ `(h_a,h_b,e_c).`

**Exercício 229)** $<h_a, h_b, R>$ `(h_a,h_b,R).`

**Exercício 230)** △ $<h_a, h_b, r>$ `(h_a,h_b,r).`

**Exercício 231)** △ $<h_a, h_b, r_a>$ `(h_a,h_b,r_a).`

**Exercício 232)** △ $<h_a, h_b, r_c>$ `(h_a,h_b,r_c).`

**Exercício 233)** △ $<h_a, m_a, m_b>$ `(h_a,m_a,m_b).`

**Exercício 234)** △ $<h_a, m_b, m_c>$ `(h_a,m_b,m_c).`

**Exercício 235)** △ $<h_a, m_a, d_a>$ `(h_a,m_a,d_a).`

**Exercício 236)** $<h_a, m_a, d_b>$ `(h_a,m_a,d_b).`

**Exercício 237)** △ $<h_a, m_b, d_a>$ `(h_a,m_b,d_a).`

**Exercício 238)** $<h_a, m_b, d_b>$ `(h_a,m_b,d_b).`

**Exercício 239)** $<h_a, m_b, d_c>$ `(h_a,m_b,d_c).`

**Exercício 240)** △ $<h_a, m_a, e_a>$ `(h_a,m_a,e_a).`

**Exercício 241)** $<h_a, m_a, e_b>$ `(h_a,m_a,e_b).`

**Exercício 242)** △ $<h_a, m_b, e_a>$ `(h_a,m_b,e_a).`

**Exercício 243)** $<h_a, m_b, e_b>$ `(h_a,m_b,e_b).`

**Exercício 244)** $<h_a, m_b, e_c>$ `(h_a,m_b,e_c).`

**Exercício 245)** △ $<h_a, m_a, R>$ `(h_a,m_a,R).`

**Exercício 246)** $<h_a, m_b, R>$ `(h_a,m_b,R).`

**Exercício 247)** △ $<h_a, m_a, r>$ `(h_a,m_a,r).`

**Exercício 248)** △ $<h_a, m_b, r>$ `(h_a,m_b,r)`.

**Exercício 249)** △ $<h_a, m_a, r_a>$ `(h_a,m_a,r_a)`.

**Exercício 250)** △ $<h_a, m_a, r_b>$ `(h_a,m_a,r_b)`.

**Exercício 251)** △ $<h_a, m_b, r_a>$ `(h_a,m_b,r_a)`.

**Exercício 252)** △ $<h_a, m_b, r_b>$ `(h_a,m_b,r_b)`.

**Exercício 253)** △ $<h_a, m_b, r_c>$ `(h_a,m_b,r_c)`.

**Exercício 254)** $<h_a, d_a, d_b>$ `(h_a,d_a,d_b)`.

**Exercício 255)** $<h_a, d_b, d_c>$ `(h_a,d_b,d_c)`.

**Exercício 256)** ▲ $<h_a, d_a, e_a>$ `(h_a,d_a,e_a)`.

**Exercício 257)** $<h_a, d_a, e_b>$ `(h_a,d_a,e_b)`.

**Exercício 258)** $<h_a, d_b, e_a>$ `(h_a,d_b,e_a)`.

**Exercício 259)** $<h_a, d_b, e_b>$ `(h_a,d_b,e_b)`.

**Exercício 260)** $<h_a, d_b, e_c>$ `(h_a,d_b,e_c)`.

**Exercício 261)** △ $<h_a, d_a, R>$ `(h_a,d_a,R)`.

**Exercício 262)** $<h_a, d_b, R>$ `(h_a,d_b,R)`.

**Exercício 263)** △ $<h_a, d_a, r>$ `(h_a,d_a,r)`.

**Exercício 264)** $<h_a, d_b, r>$ `(h_a,d_b,r)`.

**Exercício 265)** △ $<h_a, d_a, r_a>$ `(h_a,d_a,r_a)`.

**Exercício 266)** △ $<h_a, d_a, r_b>$ `(h_a,d_a,r_b)`.

**Exercício 267)** $<h_a, d_b, r_a>$ `(h_a,d_b,r_a)`.

**Exercício 268)** $<h_a, d_b, r_b>$ `(h_a,d_b,r_b)`.

**Exercício 269)** $<h_a, d_b, r_c>$ `(h_a,d_b,r_c)`.

**Exercício 270)** $<h_a, e_a, e_b>$ `(h_a,e_a,e_b)`.

**Exercício 271)** $<h_a, e_b, e_c>$ `(h_a,e_b,e_c)`.

**Exercício 272)** △ $<h_a, e_a, R>$ `(h_a,e_a,R)`.

**Exercício 273)** $<h_a, e_b, R>$ `(h_a,e_b,R)`.

**Exercício 274)** △ $<h_a, e_a, r>$ `(h_a,e_a,r)`.

**Exercício 275)** $<h_a, e_b, r>$ `(h_a,e_b,r)`.

**Exercício 276)** △ $<h_a, e_a, r_a>$ `(h_a,e_a,r_a)`.

**Exercício 277)** △ $< h_a, e_a, r_b >$ (h_a,e_a,r_b).

**Exercício 278)** $< h_a, e_b, r_a >$ (h_a,e_b,r_a).

**Exercício 279)** $< h_a, e_b, r_b >$ (h_a,e_b,r_b).

**Exercício 280)** $< h_a, e_b, r_c >$ (h_a,e_b,r_c).

**Exercício 281)** △ $< h_a, R, r >$ (h_a,R,r).

**Exercício 282)** △ $< h_a, R, r_a >$ (h_a,R,r_a).

**Exercício 283)** △ $< h_a, R, r_b >$ (h_a,R,r_b).

**Exercício 284)** ▲ $< h_a, r, r_a >$ (h_a,r,r_a).

**Exercício 285)** △ $< h_a, r, r_b >$ (h_a,r,r_b).

**Exercício 286)** △ $< h_a, r_a, r_b >$ (h_a,r_a,r_b).

**Exercício 287)** ▲ $< h_a, r_b, r_c >$ (h_a,r_b,r_c).

**Exercício 288)** △ $< m_a, m_b, m_c >$ (m_a,m_b,m_c).

**Exercício 289)** $< m_a, m_b, d_a >$ (m_a,m_b,d_a).

**Exercício 290)** $< m_a, m_b, d_c >$ (m_a,m_b,d_c).

**Exercício 291)** $< m_a, m_b, e_a >$ (m_a,m_b,e_a).

**Exercício 292)** $< m_a, m_b, e_c >$ (m_a,m_b,e_c).

**Exercício 293)** $< m_a, m_b, R >$ (m_a,m_b,R).

**Exercício 294)** $< m_a, m_b, r >$ (m_a,m_b,r).

**Exercício 295)** $< m_a, m_b, r_a >$ (m_a,m_b,r_a).

**Exercício 296)** $< m_a, m_b, r_c >$ (m_a,m_b,r_c).

**Exercício 297)** $< m_a, d_a, d_b >$ (m_a,d_a,d_b).

**Exercício 298)** $< m_a, d_b, d_c >$ (m_a,d_b,d_c).

**Exercício 299)** △ $< m_a, d_a, e_a >$ (m_a,d_a,e_a).

**Exercício 300)** $< m_a, d_a, e_b >$ (m_a,d_a,e_b).

**Exercício 301)** $< m_a, d_b, e_a >$ (m_a,d_b,e_a).

**Exercício 302)** △ $< m_a, d_b, e_b >$ (m_a,d_b,e_b).

**Exercício 303)** $< m_a, d_b, e_c >$ (m_a,d_b,e_c).

**Exercício 304)** △ $< m_a, d_a, R >$ (m_a,d_a,R).

**Exercício 305)** $< m_a, d_b, R >$ (m_a,d_b,R).

**Exercício 306)** $<m_a, d_a, r>$ `(m_a,d_a,r).`

**Exercício 307)** $<m_a, d_b, r>$ `(m_a,d_b,r).`

**Exercício 308)** $<m_a, d_a, r_a>$ `(m_a,d_a,r_a).`

**Exercício 309)** $<m_a, d_a, r_b>$ `(m_a,d_a,r_b).`

**Exercício 310)** $<m_a, d_b, r_a>$ `(m_a,d_b,r_a).`

**Exercício 311)** $<m_a, d_b, r_b>$ `(m_a,d_b,r_b).`

**Exercício 312)** $<m_a, d_b, r_c>$ `(m_a,d_b,r_c).`

**Exercício 313)** $<m_a, e_a, e_b>$ `(m_a,e_a,e_b).`

**Exercício 314)** $<m_a, e_b, e_c>$ `(m_a,e_b,e_c).`

**Exercício 315)** $\triangle$ $<m_a, e_a, R>$ `(m_a,e_a,R).`

**Exercício 316)** $<m_a, e_b, R>$ `(m_a,e_b,R).`

**Exercício 317)** $<m_a, e_a, r>$ `(m_a,e_a,r).`

**Exercício 318)** $<m_a, e_b, r>$ `(m_a,e_b,r).`

**Exercício 319)** $<m_a, e_a, r_a>$ `(m_a,e_a,r_a).`

**Exercício 320)** $<m_a, e_a, r_b>$ `(m_a,e_a,r_b).`

**Exercício 321)** $<m_a, e_b, r_a>$ `(m_a,e_b,r_a).`

**Exercício 322)** $<m_a, e_b, r_b>$ `(m_a,e_b,r_b).`

**Exercício 323)** $<m_a, e_b, r_c>$ `(m_a,e_b,r_c).`

**Exercício 324)** $<m_a, R, r>$ `(m_a,R,r).`

**Exercício 325)** $<m_a, R, r_a>$ `(m_a,R,r_a).`

**Exercício 326)** $<m_a, R, r_b>$ `(m_a,R,r_b).`

**Exercício 327)** $\triangle$ $<m_a, r, r_a>$ `(m_a,r,r_a).`

**Exercício 328)** $\triangle$ $<m_a, r, r_b>$ `(m_a,r,r_b).`

**Exercício 329)** $\triangle$ $<m_a, r_a, r_b>$ `(m_a,r_a,r_b).`

**Exercício 330)** $\triangle$ $<m_a, r_b, r_c>$ `(m_a,r_b,r_c).`

**Exercício 331)** $<d_a, d_b, d_c>$ `(d_a,d_b,d_c).`

**Exercício 332)** $<d_a, d_b, e_a>$ `(d_a,d_b,e_a).`

**Exercício 333)** $<d_a, d_b, e_c>$ `(d_a,d_b,e_c).`

**Exercício 334)** $<d_a, d_b, R>$ `(d_a,d_b,R).`

**Exercício 335)** $<d_a, d_b, r>$ (d_a,d_b,r).

**Exercício 336)** $<d_a, d_b, r_a>$ (d_a,d_b,r_a).

**Exercício 337)** $<d_a, d_b, r_c>$ (d_a,d_b,r_c).

**Exercício 338)** $<d_a, e_a, e_b>$ (d_a,e_a,e_b).

**Exercício 339)** $<d_a, e_b, e_c>$ (d_a,e_b,e_c).

**Exercício 340)** △ $<d_a, e_a, R>$ (d_a,e_a,R).

**Exercício 341)** $<d_a, e_b, R>$ (d_a,e_b,R).

**Exercício 342)** △ $<d_a, e_a, r>$ (d_a,e_a,r).

**Exercício 343)** $<d_a, e_b, r>$ (d_a,e_b,r).

**Exercício 344)** △ $<d_a, e_a, r_a>$ (d_a,e_a,r_a).

**Exercício 345)** △ $<d_a, e_a, r_b>$ (d_a,e_a,r_b).

**Exercício 346)** $<d_a, e_b, r_a>$ (d_a,e_b,r_a).

**Exercício 347)** $<d_a, e_b, r_b>$ (d_a,e_b,r_b).

**Exercício 348)** $<d_a, e_b, r_c>$ (d_a,e_b,r_c).

**Exercício 349)** $<d_a, R, r>$ (d_a,R,r).

**Exercício 350)** $<d_a, R, r_a>$ (d_a,R,r_a).

**Exercício 351)** $<d_a, R, r_b>$ (d_a,R,r_b).

**Exercício 352)** △ $<d_a, r, r_a>$ (d_a,r,r_a).

**Exercício 353)** $<d_a, r, r_b>$ (d_a,r,r_b).

**Exercício 354)** $<d_a, r_a, r_b>$ (d_a,r_a,r_b).

**Exercício 355)** △ $<d_a, r_b, r_c>$ (d_a,r_b,r_c).

**Exercício 356)** $<e_a, e_b, e_c>$ (e_a,e_b,e_c).

**Exercício 357)** $<e_a, e_b, R>$ (e_a,e_b,R).

**Exercício 358)** $<e_a, e_b, r>$ (e_a,e_b,r).

**Exercício 359)** $<e_a, e_b, r_a>$ (e_a,e_b,r_a).

**Exercício 360)** $<e_a, e_b, r_c>$ (e_a,e_b,r_c).

**Exercício 361)** $<e_a, R, r>$ (e_a,R,r).

**Exercício 362)** $<e_a, R, r_a>$ (e_a,R,r_a).

**Exercício 363)** $<e_a, R, r_b>$ (e_a,R,r_b).

**Exercício 364)** $\triangle$ $<e_a, r, r_a>$ `(e_a,r,r_a)`.

**Exercício 365)** $<e_a, r, r_b>$ `(e_a,r,r_b)`.

**Exercício 366)** $<e_a, r_a, r_b>$ `(e_a,r_a,r_b)`.

**Exercício 367)** $\triangle$ $<e_a, r_b, r_c>$ `(e_a,r_b,r_c)`.

**Exercício 368)** $\triangle$ $<R, r, r_a>$ `(R,r,r_a)`.

**Exercício 369)** $\triangle$ $<R, r_a, r_b>$ `(R,r_a,r_b)`.

**Exercício 370)** $\triangle$ $<r, r_a, r_b>$ `(r,r_a,r_b)`.

**Exercício 371)** $\triangle$ $<r_a, r_b, r_c>$ `(r_a,r_b,r_c)`.

# CAPÍTULO 4

# CONSTRUÇÕES E SOLUÇÕES ALGÉBRICAS

**Exercício 201)** $\langle a, d_b, r_a \rangle$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left[1 - \left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right] ac = d_b^2 \tag{4.1}$$

$$\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(b+c-a)} = r_a^2 \tag{4.2}$$

Com a equação (4.1) obtém-se

$$\frac{(ac - d_b^2)(a+c)^2}{ac} = b^2 \tag{4.3}$$

E com a equação (4.2), obtém-se

$$(c-a)b^2 - (a+c)c^2 + (a^2 - 4r_a^2)c + (a^2 + 4r_a^2)a = [b^2 - (a+c)^2 + 4r_a^2]b \tag{4.4}$$

Substituindo o valor de $b^2$ dado por (4.3) em (4.4), resulta

$$\frac{(ac - d_b^2)(a+c)^2}{ac} = \\ = \left[\frac{(c-a)(ac - d_b^2)(a+c)^2 - a[(a+c)c^2 - (a^2 - 4r_a^2)c - (a^2 + 4r_a^2)a]c}{(ac - d_b^2)(a+c)^2 + a[4r_a^2 - (a+c)^2]c}\right]^2 \tag{4.5}$$

Como $<a, d_b, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.5) com um programa qualquer para obter $c$.

Se a equação (4.5) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$ e $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (4.5). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.3), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

**Exercício 202)** $<a, d_b, r_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.6}$$

$$\frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c} = d_b \implies \cos\frac{\beta}{2} = \frac{(a+c)d_b}{2ac} \tag{4.7}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{r_b}{p} \implies \frac{\sqrt{1-\cos^2\frac{\beta}{2}}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{2r_b}{a+b+c} \tag{4.8}$$

Com a equação (4.8) obtém-se

$$b = \frac{2r_b\cos\frac{\beta}{2}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\beta}{2}}} - (a+c) \tag{4.9}$$

Podemos escrever (4.6) como

$$(a+c)^2 - 2ac(1+\cos\beta) = b^2$$

Como $1+\cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2}$, e com (4.7) e (4.9), a equação acima torna-se

$$\begin{aligned} &4a^2 r_b(a+c)c^2\sqrt{(2ac)^2-(a+c)^2d_b^2} = \\ &= 4a^2r_b^2d_b(a+c)c^2 + ad_b(a+c)[(2ac)^2-(a+c)^2d_b^2]c \end{aligned} \tag{4.10}$$

Como $<a, d_b, r_b>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.10) com um programa qualquer para obter $c$.

Se a equação (4.10) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$ e $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (4.10). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.7) e (4.9), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $< a, b, c >$ satisfaz todas as condições do problema.

**Exercício 203)** $< a, d_b, r_c >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left[1 - \left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right] ac = d_b^2 \tag{4.11}$$

$$\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)}{4(a+b-c)} = r_c^2 \tag{4.12}$$

Com a equação (4.11) obtém-se

$$\frac{(ac - d_b^2)(a+c)^2}{ac} = b^2 \tag{4.13}$$

E com a equação (4.12), obtém-se

$$c^3 + ac^2 + (a-c)b^2 + (4r_c^2 - a^2)c - (a^2 + 4r_c^2)a = [b^2 - (c+a)^2 + 4r_c^2]b \tag{4.14}$$

Substituindo o valor de $b^2$ dado por (4.13) em (4.14), resulta

$$\frac{(ac - d_b^2)(a+c)^2}{ac} = \\ = \left[\frac{a[(a+c)c^2 - (a^2 - 4r_c^2)c - (a^2 + 4r_c^2)a]c - (c-a)(ac - d_b^2)(a+c)^2}{(ac - d_b^2)(a+c)^2 + a[4r_c^2 - (a+c)^2]c}\right]^2 \tag{4.15}$$

Como $< a, d_b, r_c >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.15) com um programa qualquer para obter $c$.

Se a equação (4.15) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $d_b = \frac{40\sqrt{3}}{13}\,\text{cm}$ e $r_c = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (4.15). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.13), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $< a, b, c >$ satisfaz todas as condições do problema.

**Exercício 204)** $<a, e_a, e_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left[\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 - 1\right]bc = e_a^2 \tag{4.16}$$

$$\left[\left(\frac{b}{a-c}\right)^2 - 1\right]ac = e_b^2 \tag{4.17}$$

Com a equação (4.17) obtém-se

$$\frac{(ac+e_b^2)(c-a)^2}{ac} = b^2 \tag{4.18}$$

E com a equação (4.16), obtém-se

$$c[a^2 - b^2 - c^2 + 2e_a^2]b = e_a^2c^2 + (e_a^2 - 2c^2)b^2 \tag{4.19}$$

Substituindo o valor de $b^2$ dado por (4.18) em (4.19), resulta

$$\frac{c}{a}(ac+e_b^2)(c-a)^2 = \left[\frac{ae_a^2c^3 + e_a^2(ac+e_b^2)(c-a)^2 - 2(ac+e_b^2)(c-a)^2c^2}{ac^3 + (ac+e_b^2)(c-a)^2 - a(a^2+2e_a^2)c}\right]^2 \tag{4.20}$$

Como $<a, e_a, e_b>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.20) com um programa qualquer para obter $c$.

Se a equação (4.20) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $e_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$ e $e_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$.

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (4.20). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.18), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

**Exercício 205)** $<a, e_b, e_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left[\left(\frac{b}{a-c}\right)^2 - 1\right]ac = e_b^2 \tag{4.21}$$

$$\left[\left(\frac{c}{a-b}\right)^2 - 1\right]ab = e_c^2 \tag{4.22}$$

Com a equação (4.21) obtém-se

$$\frac{(ac+e_b^2)(c-a)^2}{ac} = b^2 \tag{4.23}$$

E com a equação (4.22), obtém-se

$$[c^2 - a^2 - b^2 + 2e_c^2]b = \left(\frac{e_c^2 - 2a^2}{a}\right)b^2 + ae_c^2 \tag{4.24}$$

Substituindo o valor de $b^2$ dado por (4.23) em (4.24), resulta

$$\frac{a}{c}(ac+e_b^2)(c-a)^2 = \left[\frac{[e_c^2 - 2a^2](ac+e_b^2)(c-a)^2 + a^3e_c^2c}{2a^2c^2 - [(c-a)e_b]^2 - 2a(a^2-e_c^2)c}\right]^2 \tag{4.25}$$

Como $<a, e_b, e_c>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.25) com um programa qualquer para obter $c$.

Se a equação (4.25) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $e_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$ e $e_c = 5\sqrt{21}\,\text{cm}$.

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (4.25). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.23), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

**Exercício 206)** $<a, e_a, R>$

Método do problema já resolvido

Como $<a, R, \alpha>$ formam um datum ($\sin\alpha = \frac{a}{2R}$), podemos construir o(s) ângulo(s) do vértice **A** ($\alpha$ e $180^\circ - \alpha$). Conhecemos então $<\alpha, a, e_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 33).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

**Exercício 207)** $<a, e_b, R>$

Método do problema já resolvido

Como $<a, R, \alpha>$ formam um datum ($\sin\alpha = \frac{a}{2R}$), podemos construir o(s) ângulo(s) do vértice **A** ($\alpha$ e $180^\circ - \alpha$). Conhecemos então $<\alpha, a, e_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 34).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

**Exercício 208)** $<a, e_a, r>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{4.26}$$

$$\frac{2bc\sin\frac{\alpha}{2}}{|b-c|} = e_a \implies (b-c)^2 = \left(\frac{2bc\sin\frac{\alpha}{2}}{e_a}\right)^2 \tag{4.27}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a} \implies \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2r}{b+c-a} \tag{4.28}$$

Com a equação (4.28) obtém-se

$$b + c = a + \frac{2r\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{4.29}$$

Podemos escrever (4.26) como

$$(b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) = a^2$$

Como $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, e com (4.27), a equação acima torna-se

$$(bc)^2 + e_a^2(bc) - \left(\frac{ae_a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = 0 \implies$$

$$\implies bc = \frac{e_a\sqrt{e_a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + a^2} - e_a^2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{4.30}$$

Podemos escrever (4.26) também como

$$(b+c)^2 = a^2 + 2bc(1+\cos\alpha)$$

Como $1+\cos\alpha = 2(1-\sin^2\frac{\alpha}{2})$, e com (4.29) e (4.30), resulta

$$e_a(1-x^2)(\sqrt{e_a^2x^2+a^2} - e_a x)x = 2r[ax\sqrt{1-x^2} + r(1-x^2)], \tag{†}$$

onde $x = \sin\frac{\alpha}{2}$.

Como $<a, e_a, r>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (†) com um programa qualquer para obter $x$.

Se a equação (†) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $e_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$ e $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

Pode-se constatar que $x = \frac{\sqrt{21}}{14}$ é uma raiz de (†), após o que obtêm-se $b = 7\,\text{cm}$ e $c = 8\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

**Exercício 209)** $< a, e_b, r >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left[\left(\frac{b}{c-a}\right)^2 - 1\right]ac = e_b^2 \tag{4.31}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}} = r \tag{4.32}$$

Com a equação (4.31) obtém-se

$$\frac{(ac+e_b^2)(c-a)^2}{ac} = b^2 \tag{4.33}$$

E com a equação (4.32), obtém-se

$$c^3 - ac^2 - (a+c)b^2 + (4r^2 - a^2)c + (a^2 + 4r^2)a = [(c-a)^2 - b^2 - 4r^2]b \tag{4.34}$$

Substituindo o valor de $b^2$ dado por (4.33) em (4.34), resulta

$$\begin{aligned} &\frac{(ac+e_b^2)(c-a)^2}{ac} = \\ &= \left[\frac{1}{[(c-a)e_b]^2 + 4ar^2c}\Big\{[a^3c + (ac+e_b^2)(c-a)^2]c - ac^4 - a^4c + \right. \\ &\left. + [(ac+e_b^2)(c-a)^2 + ac^3]a - 4ar^2(a+c)c\Big\}\right]^2 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Como $< a, e_b, r >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.35) com um programa qualquer para obter $c$.

Se a equação (4.35) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $e_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$ e $r = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (4.35). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.33), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $< a, b, c >$ satisfaz todas as condições do problema.

**Exercício 210)** $<a, e_a, r_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{4.36}$$

$$\frac{2bc\sin\frac{\alpha}{2}}{|b-c|} = e_a \implies (b-c)^2 = \left(\frac{2bc\sin\frac{\alpha}{2}}{e_a}\right)^2 \tag{4.37}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r_a}{p} \implies \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2r_a}{a+b+c} \tag{4.38}$$

Com a equação (4.38) obtém-se

$$b + c = \frac{2r_a\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - a \tag{4.39}$$

Podemos escrever (4.36) como

$$(b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) = a^2$$

Como $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, e com (4.37), a equação acima torna-se

$$(bc)^2 + e_a^2(bc) - \left(\frac{ae_a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = 0 \implies$$

$$\implies bc = \frac{e_a\sqrt{e_a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + a^2} - e_a^2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{4.40}$$

Podemos escrever (4.36) também como

$$(b+c)^2 = a^2 + 2bc(1+\cos\alpha)$$

Como $1 + \cos\alpha = 2(1-\sin^2\frac{\alpha}{2})$, e com (4.39) e (4.40), resulta

$$e_a(1-x^2)(\sqrt{e_a^2x^2+a^2} - e_ax)x + 2r_a[ax\sqrt{1-x^2} - r_a(1-x^2)] = 0, \tag{†}$$

onde $x = \sin\frac{\alpha}{2}$.

Como $<a, e_a, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (†) com um programa qualquer para obter $x$.

Se a equação (†) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $e_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$ e $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Pode-se constatar que $x = \frac{\sqrt{21}}{14}$ é uma raiz de (†), após o que obtêm-se $b = 7\,\text{cm}$ e $c = 8\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

**Exercício 211)** $<a, e_a, r_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left[\left(\frac{a}{c-b}\right)^2 - 1\right]bc = e_a^2 \tag{4.41}$$

$$\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)}{4(a-b+c)} = r_b^2 \tag{4.42}$$

Escrevemos (4.41) e (4.42) como

$$b^3 + \left(\frac{e_a^2}{c} - 2c\right)b^2 + (c^2 - a^2 - 2e_a^2)b + e_a^2 c = 0 \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} b^3 + (a+c)b^2 - [(c-a)^2 + 4r_b^2]b - (c-a)c^2 + \\ + (a^2 - 4r_b^2)c - (a^2 + 4r_b^2)a = 0 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Como $<a, e_a, r_b>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.43)–(4.44), obtendo assim os lados $b$ e $c$ do triângulo.

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $e_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$ e $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, um programa qualquer nos fornece $b = 7\,\text{cm}$ e $c = 8\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

**Exercício 212)** $<a, e_b, r_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left[\left(\frac{b}{c-a}\right)^2 - 1\right]ac = e_b^2 \tag{4.45}$$

$$\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(b+c-a)} = r_a^2 \tag{4.46}$$

Com a equação (4.45) obtém-se

$$\frac{(ac + e_b^2)(c-a)^2}{ac} = b^2 \tag{4.47}$$

E com a equação (4.46), obtém-se

$$c^3 + ac^2 + (a-c)b^2 + (4r_a^2 - a^2)c - (a^2 + 4r_a^2)a = [(c+a)^2 - b^2 - 4r_a^2]b \tag{4.48}$$

Substituindo o valor de $b^2$ dado por (4.47) em (4.48), resulta

$$\frac{(ac+e_b^2)(c-a)^2}{ac} = \\ = \Big[\frac{ac^4-(c-a)[ac+e_b^2](c-a)^2+a[ac^2+(4r_a^2-a^2)c-(a^2+4r_a^2)a]c}{(ac+e_b^2)(c-a)^2-a[(a+c)^2+4r_a^2]c}\Big]^2 \tag{4.49}$$

Como $<a, e_b, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.49) com um programa qualquer para obter $c$.

Se a equação (4.49) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $e_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$ e $r_a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (4.49). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.47), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

**Exercício 213)** $<a, e_b, r_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\Big[\Big(\frac{b}{c-a}\Big)^2-1\Big]ac = e_b^2 \tag{4.50}$$

$$\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)}{4(a-b+c)} = r_b^2 \tag{4.51}$$

Com a equação (4.50) obtém-se

$$\frac{(ac+e_b^2)(c-a)^2}{ac} = b^2 \tag{4.52}$$

E com a equação (4.51), obtém-se

$$c^3-ac^2-(a+c)b^2+(4r_b^2-a^2)c+(a^2+4r_b^2)a = [b^2-(c-a)^2+4r_b^2]b \tag{4.53}$$

Substituindo o valor de $b^2$ dado por (4.52) em (4.53), resulta

$$\frac{(ac+e_b^2)(c-a)^2}{ac} = \\ = \Big[\frac{ac^4-(a+c)[ac+e_b^2](c-a)^2-a[ac^2-(4r_b^2-a^2)c-(a^2+4r_b^2)a]c}{[(c-a)e_b]^2+4ar_b^2c}\Big]^2 \tag{4.54}$$

Como $<a, e_b, r_b>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.54) com um programa qualquer para obter $c$.

Se a equação (4.54) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $e_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$ e $r_b = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (4.54). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.52), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

**Exercício 214)** $<a, e_b, r_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left[\left(\frac{b}{c-a}\right)^2 - 1\right]ac = e_b^2 \tag{4.55}$$

$$\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)}{4(a+b-c)} = r_c^2 \tag{4.56}$$

Com a equação (4.55) obtém-se

$$\frac{(ac+e_b^2)(c-a)^2}{ac} = b^2 \tag{4.57}$$

E com a equação (4.56), obtém-se

$$c^3 + ac^2 + (a-c)b^2 + (4r_c^2 - a^2)c - (a^2 + 4r_c^2)a = [b^2 - (c+a)^2 + 4r_c^2]b \tag{4.58}$$

Substituindo o valor de $b^2$ dado por (4.57) em (4.58), resulta

$$\frac{(ac+e_b^2)(c-a)^2}{ac} =$$
$$= \left[\frac{ac^4 - (c-a)[ac+e_b^2](c-a)^2 + a[ac^2 + (4r_c^2 - a^2)c - (a^2+4r_c^2)a]c}{(ac+e_b^2)(c-a)^2 - a(a+c)^2c + 4ar_c^2c}\right]^2 \tag{4.59}$$

Como $<a, e_b, r_c>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.59) com um programa qualquer para obter $c$.

Se a equação (4.59) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $a = 5\,\text{cm}$, $e_b = \frac{40}{3}\,\text{cm}$ e $r_c = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Pode-se constatar que $c = 8$ é uma raiz de (4.59). Logo, $c = 8\,\text{cm}$ e, com (4.57), $b = 7\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que o triângulo cujos lados são $<a, b, c>$ satisfaz todas as condições do problema.

**Exercício 215)** $<a, R, r>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $<a, R, \alpha>$ formam um datum, podemos construir o(s) ângulo(s) do vértice **A** ($\alpha$ e $180° - \alpha$). Conhecemos então $<\alpha, a, r>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 40).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle \mathbf{BC}I$ (figura auxiliar).

Com auxílio do teorema 2.18 (ver o Capítulo 2 em [6]) e a figura 4.147 (ver a página 67), constatamos que o ponto $I$ possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale $r$;

ii) sua distância $\ell$ ao ponto $O$ vale $\ell = \sqrt{R(R - 2r)}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.147, na página 67):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o ponto $O$ e traçar o círculo circunscrito $\Gamma$. Obter o ponto $D$ (interseção "inferior" do círculo $\Gamma$ com a mediatriz do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando $r$ desta;

iv) traçar o arco $\phi = (O, \ell)$ e obter o ponto $I$ ($I = \mathfrak{a}' \cap \phi$);

v) traçar a reta $\mathfrak{d}_a = (D, I)$ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \mathfrak{d}_a \cap \Gamma$).

**Observação:** para obter $\ell$, fazemos a construção auxiliar mostrada na figura 4.148 (ver a página 68), com $\mathscr{C}\mathscr{A} = R$ e $\mathscr{C}\mathscr{B} = R - 2r$; logo,

$$\mathscr{C}\mathscr{D} = \sqrt{R(R-2r)} = \ell$$

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{BC}I$ (figura auxiliar). Uma análise da figura 4.149 (ver a página 69) nos mostrará que o ponto $I$ possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale $r$;

ii) pertence ao círculo $\phi = (D, D\mathbf{B})$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.149, na página 69):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o ponto $O$ ($O'$) e traçar o círculo circunscrito $\Gamma$ ($\Gamma'$). Obter o ponto $D$ ($D'$) (interseção "inferior" do círculo $\Gamma$ ($\Gamma'$) com a mediatriz do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando $r$ desta;

iv) traçar o arco $\phi = (D, D\mathbf{B})$ ($\phi' = (D', D'\mathbf{C})$) e obter os pontos $I$ ($I = \mathfrak{a}' \cap \phi$) e $I'$ ($I' = \mathfrak{a}' \cap \phi'$);

v) traçar as retas $\mathfrak{d}_a = (D, I)$ e $\mathfrak{d}'_a = (D', I')$ e obter os pontos $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{d}_a \cap \Gamma$) e $\mathbf{A'}$ ($\mathbf{A'} = \mathfrak{d}'_a \cap \Gamma'$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

**Exercício 216)** $\langle a, R, r_a \rangle$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $\langle a, R, \alpha \rangle$ formam um datum, podemos construir o(s) ângulo(s) do vértice $\mathbf{A}$ ($\alpha$ e $180° - \alpha$). Conhecemos então $\langle \alpha, a, r_a \rangle$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 42).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle \mathbf{BC}I_a$ (figura auxiliar).

Com auxílio do teorema 2.19 (ver o Capítulo 2 em [6]) e a figura 4.150 (ver a página 70), constatamos que o ponto $I_a$ possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale $r_a$;

ii) sua distância $\ell$ ao ponto $O$ vale $\ell = \sqrt{R(R+2r_a)}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.150, na página 70):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o ponto $O$ e traçar o círculo circunscrito $\Gamma$. Obter o ponto $D$ (interseção "inferior" do círculo $\Gamma$ com a mediatriz do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando $r_a$ desta;

iv) traçar o arco $\phi = (O, \ell)$ e obter o ponto $I_a$ ($I_a = \mathfrak{a}' \cap \phi$);

v) traçar a reta $\mathfrak{d}_a = (D, I_a)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{d}_a \cap \Gamma$).

**Observação:** para obter $\ell$, fazemos a construção auxiliar mostrada na figura 4.148 (ver a página 68), com $\mathscr{CA} = R$ e $\mathscr{CB} = R + 2r_a$; logo,

$$\mathscr{CD} = \sqrt{R(R+2r_a)} = \ell$$

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle \mathbf{BC}I_a$ (figura auxiliar).

Uma análise da figura 4.151 (ver a página 71) nos mostrará que o ponto $I_a$ possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale $r_a$;

ii) pertence ao círculo $\phi = (D, D\mathbf{B})$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.151, na página 71):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o ponto $O$ e traçar o círculo circunscrito $\Gamma$. Obter o ponto $D$ (interseção "inferior" do círculo $\Gamma$ com a mediatriz do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando $r_a$ desta;

iv) traçar o círculo $\phi = (D, D\mathbf{B})$ e obter o ponto $I_a$ ($I_a = \mathfrak{a}' \cap \phi$);

v) traçar a reta $\mathfrak{d}_a = (D, I_a)$ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \mathfrak{d}_a \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

**Observação:** para obter duas soluções, considere, por exemplo, a seguinte aplicação numérica: $a = 19{,}9\,\text{cm}$, $R = 10\,\text{cm}$ e $r_a = 22{,}2\,\text{cm}$. Reproduzindo com as fórmulas da geometria analítica as etapas da construção acima, obtêm-se os $\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$, cujos comprimentos dos lados são mostrados abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$b_1 = 12{,}177862\,6\,\text{cm} \quad \text{e} \quad c_1 = 17{,}001983\,1\,\text{cm}$$
$$b_2 = \phantom{1}0{,}411723\,4\,\text{cm} \quad \text{e} \quad c_2 = 19{,}854662\,0\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os triângulos cujos lados são $<a, b_1, c_1>$ e $<a, b_2, c_2>$ satisfazem todas as condições do problema.

**Exercício 217)** $\quad <a, R, r_b>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $<a, R, \alpha>$ formam um datum, podemos construir o(s) ângulo(s) do vértice **A** ($\alpha$ e $180^\circ - \alpha$). Conhecemos então $<\alpha, a, r_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 43).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{BC}I_b$ (figura auxiliar).

Com auxílio do teorema 2.19 (ver o Capítulo 2 em [6]) e a figura 4.152 (ver a página 72), constatamos que o ponto $I_b$ possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale $r_b$;

ii) sua distância $\ell$ ao ponto $O$ vale $\ell = \sqrt{R(R + 2r_b)}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.152, na página 72):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o ponto $O$ e traçar o círculo circunscrito $\Gamma$. Obter o ponto $E$ (interseção “superior” do círculo $\Gamma$ com a mediatriz do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando $r_b$ desta;

iv) traçar o arco $\phi = (O, \ell)$ e obter o ponto $I_b$ ($I_b = \mathfrak{a}' \cap \phi$);

v) traçar a reta $\mathfrak{e}_a = (E, I_b)$ e obter o ponto **A** ($\mathbf{A} = \mathfrak{e}_a \cap \Gamma$).

**Observação:** para obter $\ell$, fazemos a construção auxiliar mostrada na figura 4.148 (ver a página 68), com $\mathscr{C}\mathscr{A} = R$ e $\mathscr{C}\mathscr{B} = R + 2r_b$; logo,

$$\mathscr{C}\mathscr{D} = \sqrt{R(R + 2r_b)} = \ell$$

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\, \mathbf{BC}I_b$ (figura auxiliar).

Uma análise da figura 4.153 (ver a página 73) nos mostrará que o ponto $I_b$ possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale $r_b$;

ii) pertence ao círculo $\phi = (E, E\mathbf{C})$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.153, na página 73):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar os pontos **B** e **C** tais que $\mathbf{BC} = a$;

ii) construir o ponto $O$ ($O'$) e traçar o círculo circunscrito $\Gamma$ ($\Gamma'$). Obter o ponto $E$ ($E'$) (interseção “superior” do círculo $\Gamma$ ($\Gamma'$) com a mediatriz do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando $r_b$ desta;

iv) traçar o arco $\phi = (E, E\mathbf{C})$ $(\phi' = (E', E'\mathbf{C}))$ e obter os pontos $I_b$ $(I_b = \mathfrak{a}' \cap \phi)$ e $I_b'$ $(I_b' = \mathfrak{a}' \cap \phi')$;

v) traçar as retas $\mathfrak{e}_a = (E, I_b)$ e $\mathfrak{e}_a' = (E', I_b')$ e obter os pontos $\mathbf{A}$ $(\mathbf{A} = \mathfrak{e}_a \cap \Gamma)$ e $\mathbf{A'}$ $(\mathbf{A'} = \mathfrak{e}_a' \cap \Gamma')$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC}$) soluções.

**Exercício 218)** $<a, r, r_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<r, r_a, h_a>$ formam um datum, conhecemos $h_a$. Conhecemos então $<a, h_a, r>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 160).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

**Exercício 219)** $<a, r, r_b>$

Método do problema já resolvido

Como $<r, r_b, h_b>$ formam um datum, conhecemos $h_b$. Conhecemos então $<a, h_b, r>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 161).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

**Exercício 220)** $<a, r_a, r_b>$

Método do problema já resolvido

Como $<r_a, r_b, h_c>$ formam um datum, conhecemos $h_c$. Conhecemos então $<a, h_c, r_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 164).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

**Exercício 221)** $<a, r_b, r_c>$

Método do problema já resolvido

Como $<r_b, r_c, h_a>$ formam um datum, conhecemos $h_a$; e como $<a, r_b{+}r_c, R>$ também formam um datum, conhecemos $R$. Conhecemos então $<a, h_a, R>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 158).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

**Exercício 222)** $<h_a, h_b, h_c>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

O exercício 569 de [3] pede para expressar os ângulos de um triângulo em função das alturas. Seguindo então [3], escrevemos

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Como todos os termos são do segundo grau, pode-se substituir $a$, $b$ e $c$ por quantidades proporcionais. Ora, $ah_a = bh_b = ch_c$ ou

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} - \frac{1}{h_a^2}}{\frac{2}{h_b h_c}} = \frac{1}{2} h_b h_c \Big(\frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} - \frac{1}{h_a^2}\Big) \\ &= \frac{1}{2h_a}\Big(\frac{h_a h_b}{h_c} + \frac{h_a h_c}{h_b} - \frac{h_b h_c}{h_a}\Big)\end{aligned}$$

Analogamente, obtêm-se $\cos\beta$ e $\cos\gamma$:

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \frac{1}{2h_b}\Big(\frac{h_b h_c}{h_a} + \frac{h_a h_b}{h_c} - \frac{h_a h_c}{h_b}\Big) \\ \cos\gamma &= \frac{1}{2h_c}\Big(\frac{h_b h_c}{h_a} + \frac{h_a h_c}{h_b} - \frac{h_a h_b}{h_c}\Big)\end{aligned}$$

Conhecemos assim $<\alpha, \beta, h_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 4).

**Observação:** do mesmo modo, mostra-se que

$$\Big(\frac{1}{h_a}\Big)^2 = \Big(\frac{1}{h_b}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{h_c}\Big)^2 - 2\frac{1}{h_b}\frac{1}{h_c}\cos\alpha$$

ou seja: *em todo triângulo, o quadrado do inverso de uma altura é igual à soma dos quadrados dos inversos das outras duas menos o duplo produto dos inversos dessas duas alturas pelo cosseno do ângulo formado pelos lados a que elas se referem.*

Segundo procedimento – Método das figuras semelhantes

Podemos escrever

$$ah_a = bh_b = ch_c \quad (= 2S)$$

Ou, dividindo por $h_a h_b$,

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\ell},$$

onde $\ell = h_a h_b / h_c$. Portanto, podemos facilmente construir o segmento $\ell$ como quarta proporcional entre as três alturas ($\frac{h_c}{h_a} = \frac{h_b}{\ell}$).

O $\triangle\,\mathbf{ABC}$ é semelhante ao $\triangle\,\mathbf{A}\mathrm{B'C'}$ (terceiro caso de semelhança de triângulos) com $\mathrm{B'C'} = h_b$, $\mathbf{A}\mathrm{C'} = h_a$ e $\mathbf{A}\mathrm{B'} = \ell$. Logo, podemos desenhar *a forma* ($\triangle\,\mathbf{A}\mathrm{B'C'}$) do triângulo procurado (ver o exercício 128).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.3):

i) construir o $\triangle\,\mathbf{A}\mathrm{B'C'}$ e obter a reta $\mathfrak{a}'$, a reta $\mathfrak{h}_a$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{h}_a \perp \mathfrak{a}'$) e o ponto $H'_a$ ($H'_a = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{h}_a$);

ii) traçar o arco $\phi = (\mathbf{A}, h_a)$ e obter o ponto $H_a$ ($H_a = \mathfrak{h}_a \cap \phi$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}$ ($H_a \in \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{a}'$) e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

**Observações:**

i) a solução deste problema depende da construção do $\triangle\,\mathbf{A}\mathrm{B'C'}$. Assim, deve-se ter:

$$h_a + h_b > \ell > h_a - h_b$$
$$h_a + h_b > \tfrac{h_a h_b}{h_c} > h_a - h_b$$
$$\tfrac{1}{h_b} + \tfrac{1}{h_a} > \tfrac{1}{h_c} > \tfrac{1}{h_b} - \tfrac{1}{h_a}$$

ii) uma solução muito conhecida para este problema (ver [7], [8] e [9]) é a seguinte:

1) construir o $\triangle\,\mathrm{A'B'C'}$ com lados $a' = h_a$, $b' = h_b$ e $c' = h_c$;

2) obter as alturas $h'_a$, $h'_b$ e $h'_c$ do $\triangle\,\mathrm{A'B'C'}$;

3) o $\triangle\,\mathbf{ABC}$ é semelhante ao triângulo $\triangle\,\mathbf{A}\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ cujos lados são os comprimentos $h_a'$, $h_b'$ e $h_c'$.

Esta solução tem o inconveniente de nem sempre permitir a construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$, ainda que os dados permitam uma.

Exemplo: se $h_a = 156\,\mathrm{mm}$, $h_b = 65\,\mathrm{mm}$ e $h_c = 60\,\mathrm{mm}$, não poderemos construir o $\triangle\,\mathrm{A'B'C'}$ (pois $h_a > h_b + h_c$) mas o $\triangle\,\mathbf{ABC}$ existe porque $\ell = 169\,\mathrm{mm}$ e $h_a + h_b > \ell > h_a - h_b$.

iii) veremos no exercício 371 que

$$a = \frac{r_a(r_b + r_c)}{\sqrt{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}}$$

Por outro lado, ao final do teorema 2.8 em [6] encontramos os seguintes resultados:

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$$
$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}$$
$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$$

Assim, podemos expressar os lados $< a, b, c >$ em função das alturas $< h_a, h_b, h_c >$:

$$a = \frac{2h_a h_b^2 h_c^2}{\sqrt{\mathcal{H}}}$$
$$b = \frac{2h_b h_a^2 h_c^2}{\sqrt{\mathcal{H}}}$$
$$c = \frac{2h_c h_a^2 h_b^2}{\sqrt{\mathcal{H}}}$$

onde

$$\mathcal{H} = (h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a)(-h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a)\cdot$$
$$\cdot(h_a h_b - h_b h_c + h_c h_a)(h_a h_b + h_b h_c - h_c h_a)$$

**Exercício 223)** $<h_a, h_b, m_a>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle \mathbf{A}M_a\mathcal{M}_a$ (figura auxiliar), onde $\mathcal{M}_a$ é a projeção do ponto $M_a$ na reta $\mathfrak{b}$. Uma análise da figura 4.154 (ver a página 74) nos mostrará que o ponto $\mathcal{M}_a$ possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $M_a$ vale $\frac{h_b}{2}$;

ii) um observador colocado em $\mathcal{M}_a$ enxerga o segmento $\overline{\mathbf{A}M_a}$ segundo um ângulo reto ($\mathcal{M}_a$ pertence ao arco capaz—$\phi_1$— do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{A}M_a}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.154, na página 74):

i) construir o $\triangle \mathbf{A}H_aM_a$;

ii) construir o círculo $\phi_1$ de diâmetro $\overline{\mathbf{A}M_a}$;

iii) traçar o círculo $\phi_2 = (M_a, \frac{h_b}{2})$ e obter o ponto $\mathcal{M}_a$ ($\mathcal{M}_a = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) se $\mathfrak{a} = (H_a, M_a)$ é a reta definida pelos pontos $H_a$ e $M_a$ e $\mathfrak{b} = (\mathbf{A}, \mathcal{M}_a)$ é a reta definida pelos pontos $\mathbf{A}$ e $\mathcal{M}_a$, então $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$;

v) traçar o círculo $\phi_3 = (M_a, M_a\mathbf{C})$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \phi_3$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle \mathbf{ABC}$ e $\triangle \mathbf{AB'C'}$) soluções.

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Uma análise da figura 3.1 em [6] nos mostrará que o problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle \mathrm{C'C'_{a''}A'}$ (figura auxiliar) e os pontos $\mathrm{A'_{b'}}$ e $\mathbf{B}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.155, na página 75):

i) colocar o ponto $\mathrm{B'}$ numa reta $\mathfrak{m}'_a$ qualquer e construir o triângulo retângulo $\triangle \mathrm{C'C'_{a''}A'}$ tal que $\mathrm{C'C'_{a''}} = 2h_a$ e $\mathrm{C'A'} = 2m_a$; traçar a reta $\mathfrak{a}'' = (\mathrm{C'_{a''}}, \mathrm{A'})$ e construir a reta $\mathfrak{a}$ ($\mathrm{B'} \in \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{a}''$);

ii) traçar o arco $\phi_2 = (\mathrm{A}', h_b)$ e obter o ponto $\mathrm{A}'_{b'}$ ($\mathrm{A}'_{b'} = \phi_1 \cap \phi_2$); traçar a reta $\mathfrak{b}' = (\mathrm{A}'_{b'}, \mathrm{C}')$ e obter o ponto **B** ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}'$);

iii) construir o ponto **A**, simétrico de A′ em relação a **B**;

iv) construir a reta $\mathfrak{b}$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b} \parallel \mathfrak{b}'$) e obter o ponto **C** ($\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{ABC}$) soluções.

**Exercício 224)** $< h_a, h_b, m_c >$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\, M_c \mathcal{M}_c \mathbb{M}_c$ (figura auxiliar), onde $\mathcal{M}_c$ e $\mathbb{M}_c$ são as projeções do ponto $M_c$ nas retas $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$, respectivamente. Uma análise da figura 4.156 (ver a página 76) nos mostrará que o ponto $\mathcal{M}_c$ ($\mathbb{M}_c$) possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $M_c$ vale $\frac{h_a}{2}$ ($\frac{h_b}{2}$);

ii) um observador colocado em $\mathcal{M}_c$ ($\mathbb{M}_c$) enxerga o segmento $\overline{\mathbf{C}M_c}$ segundo um ângulo reto ($\mathcal{M}_c$ ($\mathbb{M}_c$) pertence ao arco capaz—$\phi_1$—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{C}M_c}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.156, na página 76):

i) numa reta $\mathfrak{m}_c$ qualquer colocar os pontos **C** e $M_c$ tais que $\mathbf{C}M_c = m_c$;

ii) construir o círculo $\phi_1$ de diâmetro $\overline{\mathbf{C}M_c}$;

iii) traçar o círculo $\phi_2 = (M_c, \frac{h_a}{2})$ e obter o ponto $\mathcal{M}_c$ ($\mathcal{M}_c = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar o círculo $\phi_3 = (M_c, \frac{h_b}{2})$ e obter o ponto $\mathbb{M}_c$ ($\mathbb{M}_c = \phi_1 \cap \phi_3$);

v) traçar a reta $\mathfrak{b}'$ paralela à reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, \mathbb{M}_c)$ e distando $h_b$ desta;

vi) se $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, \mathcal{M}_c)$ é a reta definida pelos pontos **C** e $\mathcal{M}_c$, então $\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}'$;

vii) traçar o círculo $\phi_4 = (M_c, M_c\mathbf{B})$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \phi_4$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'B'C}$) soluções.

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Uma análise da figura 3.1 em [6] nos mostrará que o problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathrm{C'C'_a}\mathbf{C}$ (figura auxiliar) e os pontos $\mathrm{C}_{b'}$ e $\mathbf{B}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.157, na página 77):

i) colocar o ponto $M_c$ numa reta $\mathfrak{m}_c$ qualquer e construir o triângulo retângulo $\triangle\,\mathrm{C'C'_a}\mathbf{C}$ tal que $\mathrm{C'C'_a} = h_a$ e $\mathrm{C'}\mathbf{C} = 2m_c$; traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathrm{C'_a}, \mathbf{C})$;

ii) traçar o círculo $\phi_2 = (\mathbf{C}, h_b)$ e obter o ponto $\mathrm{C}_{b'}$ ($\mathrm{C}_{b'} = \phi_1 \cap \phi_2$); traçar a reta $\mathfrak{b}' = (\mathrm{C}_{b'}, \mathrm{C'})$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}'$);

iii) construir o ponto $\mathbf{A}$, simétrico de $\mathbf{B}$ em relação a $M_c$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{ABC}$) soluções.

**Exercício 225)** $<h_a, h_b, d_a>$

Método algébrico

Começamos notando que se $h_a = d_a \implies b = c \implies h_b = h_c$; portanto, conhecemos as três alturas e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 222). Assim, na análise que seguirá, suporemos que $h_a \neq d_a \implies b \neq c$.

Como $<h_a, d_a, e_a>$ formam um datum, conhecemos $e_a$. E agora escrevemos o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c} = d_a \tag{4.60}$$

$$\frac{2bc\sin\frac{\alpha}{2}}{|b-c|} = e_a \tag{4.61}$$

Com (4.60) e (4.61) e sabendo que $b \sin\alpha = h_c$ e $c \sin\alpha = h_b$, obtêm-se

$$\sin\tfrac{\alpha}{2} = \frac{h_b h_c}{(h_b + h_c)d_a} \tag{4.62}$$

$$\cos\tfrac{\alpha}{2} = \frac{h_b h_c}{|h_b - h_c|e_a} \tag{4.63}$$

Como $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$, obtém-se com (4.62) e (4.63)

$$\left[d_a^2 + e_a^2 - \left(\frac{d_a e_a}{h_b}\right)^2\right]h_c^4 + 2h_b(d_a^2 - e_a^2)h_c^3 + \left[h_b^2(d_a^2 + e_a^2) + 2(d_a e_a)^2\right]h_c^2 - (h_b d_a e_a)^2 = 0 \tag{4.64}$$

Como $< h_b, d_a, e_a >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.64) com um programa qualquer para obter $h_c$.

Se a equação (4.64) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $h_a = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$, $h_b = \frac{20\sqrt{3}}{7}\,\text{cm}$ e $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores para $h_a$ e $d_a$ obtém-se $e_a = 8\sqrt{21}\,\text{cm}$ e a equação (4.64) torna-se

$$\frac{98}{75}h_c^4 + \frac{65\sqrt{3}}{9}h_c^3 - 164h_c^2 + 1600 = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se duas raízes positivas, as quais são mostradas abaixo (com seis algarismos decimais exatos):

$$h_c = 4{,}330127\,0\,\text{cm} \implies a_1 = 5\,\text{cm},\ b_1 = 7\,\text{cm},\ c_1 = 8\,\text{cm}$$
$$h_c' = 5{,}793555\,1\,\text{cm}.$$

Com $h_c'$ obtêm-se $a_2$, $b_2$ e $c_2$ (com seis algarismos decimais exatos):

$$a_2 = 5{,}908794\,3\,\text{cm} \qquad b_2 = 8{,}272311\,9\,\text{cm} \qquad c_2 = 7{,}066011\,6\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os triângulos cujos lados são $< a_1, b_1, c_1 >$ e $< a_2, b_2, c_2 >$ satisfazem todas as condições do problema.

**Exercício 226)** $< h_a, h_b, d_c >$

Primeiro procedimento – Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a \sin\gamma = h_b \tag{4.65}$$

$$b \sin\gamma = h_a \tag{4.66}$$

$$\frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b} = d_c \tag{4.67}$$

Com o sistema (4.65)–(4.67) e como $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ obtém-se

$$d_c \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{h_a h_b}{h_a + h_b}$$

Podemos então construir o ângulo $\frac{\gamma}{2}$, e em seguida o ângulo $\gamma$, após o que a construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$ é facilmente efetuada.

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Seja $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ a reta definida pelos pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$. Supondo o problema já resolvido (ver a figura 4.158, na página 78), podemos construir o ponto $P_1$ tal que $P_1 \in \mathfrak{a}$ e $\mathbf{C}P_1 = \mathbf{CA}$. Então $\overline{\mathbf{C}D_c} \parallel \overline{P_1\mathbf{A}}$ e podemos escrever:

$$\frac{P_1\mathbf{A}}{\mathbf{C}D_c} = \frac{\mathbf{B}P_1}{\mathbf{BC}} \tag{4.68}$$

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{A}H_aP_1$ (figura auxiliar). Uma análise da figura 4.158 nos mostrará que $\measuredangle\mathbf{A}H_aP_1 = 90°$, $\mathbf{A}H_a = h_a$ e, como será mostrado na continuação,

$$\frac{h_b}{h_a + h_b} = \frac{d_c}{P_1\mathbf{A}} \tag{4.69}$$

e o segmento $\ell = P_1\mathbf{A}$ pode ser construído como a quarta proporcional entre os segmentos $h_b$, $h_a + h_b$ e $d_c$.

Para provar o resultado dado pela equação (4.69), traçamos as retas $\mathfrak{b}'$ ($P_1 \in \mathfrak{b}'$ e $\mathfrak{b}' \parallel \mathfrak{b}$) e $\mathfrak{h}_b'$ ($\mathbf{C} \in \mathfrak{h}_b'$ e $\mathfrak{h}_b' \parallel \mathfrak{h}_b$). Se $P_2 = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{h}_b$ e $P_3 = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{h}_b'$, então $\triangle\,\mathbf{C}P_1P_3 \equiv \triangle\,\mathbf{AC}H_a$ e $\mathbf{A}H_a = \mathbf{C}P_3 = H_bP_2 = h_a$. Tem-se também a seguinte relação (teorema sobre feixe de paralelas):

$$\frac{\mathbf{B}P_1}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{B}P_2}{\mathbf{B}H_b} = \frac{h_b + h_a}{h_b} \tag{4.70}$$

Portanto, $\frac{P_1\mathbf{A}}{d_c} = \frac{h_a+h_b}{h_b} \implies \frac{h_b}{h_a+h_b} = \frac{d_c}{\ell}$ ∎

Daí a construção que segue (ver a figura 4.158, na página 78):

i) construir a quarta proporcional (segmento $\ell$) entre os segmentos $h_b$, $h_a + h_b$ e $d_c$;

ii) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto $H_a$; construir a reta $\mathfrak{h}_a$ ($H_a \in \mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{h}_a \perp \mathfrak{a}$); construir os pontos $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{h}_a$ e $H_a\mathbf{A} = h_a$) e $P_1$ ($P_1 \in \mathfrak{a}$ e $\mathbf{A}P_1 = \ell$);

iii) construir a mediatriz (reta $\mathfrak{r}$) do segmento $\overline{\mathbf{A}P_1}$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{r}$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{b}''$ paralela à reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{A}, \mathbf{C})$ e distando $h_b$ desta e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}''$).

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{AC}D_c$ (figura auxiliar). Podemos escrever (ver o teorema 2.2 em [6]):

$$\frac{D_c\mathbf{A}}{D_c\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{CA}}{\mathbf{CB}} = \frac{b}{a}$$

E também $ah_a = bh_b$. Ou

$$\frac{D_c\mathbf{A}}{D_c\mathbf{B}} = \frac{h_a}{h_b}$$

Uma análise da figura 4.159 (ver a página 79) nos mostrará que o ponto $D_c$ possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{C}$ vale $d_c$;

ii) pertence à reta $\mathfrak{a}''$. A reta $\mathfrak{a}''$ é paralela à reta $\mathfrak{a}$ e passa pelo ponto $P_4$, projeção do ponto $\mathbf{C}$ na reta $(P_1, P_3)$ na razão $(P_1, \mathbf{C}, P_2)$ (teorema sobre feixe de paralelas).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.159, na página 79):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto $\mathbf{C}$ e construir a reta $\mathfrak{r}$ ($\mathbf{C} \in \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{a}$);

ii) construir os pontos $P_1 \in \mathfrak{r}$ e $P_2 \in \mathfrak{r}$ em semiplanos opostos relativamente à reta $\mathfrak{a}$ tais que $\mathbf{C}P_1 = h_a$ e $\mathbf{C}P_2 = h_b$; traçar a reta $\mathfrak{a}'$ ($P_1 \in \mathfrak{a}'$ e $\mathfrak{a}' \parallel \mathfrak{a}$);

iii) traçar o círculo $\phi = (\mathbf{C}, d_c)$ e obter o ponto $P_3$ ($P_3 = \mathfrak{a} \cap \phi$); traçar a reta $\mathfrak{s} = (P_1, P_3)$;

iv) traçar a reta $\mathfrak{t} = (P_2, P_3)$; construir a reta $\mathfrak{t}'$ ($\mathbf{C} \in \mathfrak{t}'$ e $\mathfrak{t}' \parallel \mathfrak{t}$) e obter o ponto $P_4$ ($P_4 = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{t}'$);

v) traçar a reta $\mathfrak{a}''$ ($P_4 \in \mathfrak{a}''$ e $\mathfrak{a}'' \parallel \mathfrak{a}$) e obter o ponto $D_c$ ($D_c = \mathfrak{a}'' \cap \phi$);

vi) construir a reta $\mathfrak{b}$, transformada de $\mathfrak{a}$ pela reflexão em torno da reta $\mathfrak{d}_c = (\mathbf{C}, D_c)$ e obter $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}$); traçar a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{A}, D_c)$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

**Exercício 227)** $\langle h_a, h_b, e_a \rangle$

Método do problema já resolvido

Como $\langle h_a, e_a, d_a \rangle$ formam um datum, conhecemos $\langle h_a, h_b, d_a \rangle$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 225).

**Exercício 228)** $\langle h_a, h_b, e_c \rangle$

Primeiro procedimento – Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a \sin\gamma = h_b \tag{4.71}$$

$$b \sin\gamma = h_a \tag{4.72}$$

$$\frac{2ab \sin\frac{\gamma}{2}}{|b-a|} = e_c \tag{4.73}$$

Com o sistema (4.71)–(4.73) e como $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ obtém-se

$$e_c \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{h_a h_b}{|h_a - h_b|}$$

Podemos então construir o ângulo $\frac{\gamma}{2}$, e em seguida o ângulo $\gamma$, após o que a construção do $\triangle\,\mathbf{ABC}$ é facilmente efetuada.

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Seja $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ a reta definida pelos pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$. Supondo o problema já resolvido (ver a figura 4.160, na página 80), podemos construir o ponto $P_1$ tal que $P_1 \in \mathfrak{a}$ e $\mathbf{C}P_1 = \mathbf{CA}$. Então $\overline{\mathbf{C}E_c} \parallel \overline{P_1\mathbf{A}}$ e podemos escrever:

$$\frac{P_1\mathbf{A}}{\mathbf{C}E_c} = \frac{\mathbf{B}P_1}{\mathbf{BC}} \tag{4.74}$$

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{A}H_aP_1$ (figura auxiliar). Uma análise da figura 4.160 nos mostrará que $\measuredangle\mathbf{A}H_aP_1 = 90°$, $\mathbf{A}H_a = h_a$ e, como será mostrado na continuação,

$$\frac{h_b}{e_c} = \frac{h_b - h_a}{P_1\mathbf{A}} \tag{4.75}$$

e o segmento $\ell = P_1\mathbf{A}$ pode ser construído como a quarta proporcional entre os segmentos $h_b$, $e_c$ e $h_b - h_a$.

Para provar o resultado dado pela equação (4.75), traçamos as retas $\mathfrak{b}'$ ($P_1 \in \mathfrak{b}'$ e $\mathfrak{b}' \parallel \mathfrak{b}$) e $\mathfrak{h}_b'$ ($\mathbf{C} \in \mathfrak{h}_b'$ e $\mathfrak{h}_b' \parallel \mathfrak{h}_b$). Se $P_2 = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{h}_b$ e $P_3 = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{h}_b'$, então $\triangle\, \mathbf{C}P_1P_3 \equiv \triangle\, \mathbf{AC}H_a$ e $\mathbf{A}H_a = \mathbf{C}P_3 = H_bP_2 = h_a$. Tem-se também a seguinte relação (teorema sobre feixe de paralelas):

$$\frac{\mathbf{B}P_1}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{B}P_2}{\mathbf{B}H_b} = \frac{h_b - h_a}{h_b} \tag{4.76}$$

Portanto, $\frac{P_1\mathbf{A}}{e_c} = \frac{h_b - h_a}{h_b} \implies \frac{h_b}{e_c} = \frac{h_b - h_a}{\ell}$ ∎

Daí a construção que segue (ver a figura 4.160, na página 80):

i) construir a quarta proporcional (segmento $\ell$) entre os segmentos $h_b$, $e_c$ e $h_b - h_a$;

ii) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto $H_a$; construir a reta $\mathfrak{h}_a$ ($H_a \in \mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{h}_a \perp \mathfrak{a}$); construir os pontos $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{h}_a$ e $H_a\mathbf{A} = h_a$) e $P_1$ ($P_1 \in \mathfrak{a}$ e $\mathbf{A}P_1 = \ell$);

iii) construir a mediatriz (reta $\mathfrak{r}$) do segmento $\overline{\mathbf{A}P_1}$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{r}$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{b}''$ paralela à reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{A}, \mathbf{C})$ e distando $h_b$ desta e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}''$).

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\, \mathbf{AC}E_c$ (figura auxiliar). Podemos escrever (ver o teorema 2.2 em [6]):

$$\frac{E_c\mathbf{A}}{E_c\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{CA}}{\mathbf{CB}} = \frac{b}{a}$$

E também $ah_a = bh_b$. Ou

$$\frac{E_c\mathbf{A}}{E_c\mathbf{B}} = \frac{h_a}{h_b}$$

Uma análise da figura 4.161 (ver a página 81) nos mostrará que o ponto $E_c$ possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{C}$ vale $e_c$;

ii) pertence à reta $\mathfrak{a}''$. A reta $\mathfrak{a}''$ é paralela à reta $\mathfrak{a}$ e passa pelo ponto $P_4$, projeção do ponto $\mathbf{C}$ na reta $(P_1, P_3)$ na razão $(P_1, P_2, \mathbf{C})$ (teorema sobre feixe de paralelas).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.161, na página 81):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto $\mathbf{C}$ e construir a reta $\mathfrak{r}$ ($\mathbf{C} \in \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{a}$);

ii) construir os pontos $P_1 \in \mathfrak{r}$ e $P_2 \in \mathfrak{r}$ em um mesmo semiplano relativamente à reta $\mathfrak{a}$ tais que $\mathbf{C}P_1 = h_a$ e $\mathbf{C}P_2 = h_b$; traçar a reta $\mathfrak{a}'$ ($P_1 \in \mathfrak{a}'$ e $\mathfrak{a}' \parallel \mathfrak{a}$);

iii) traçar o círculo $\phi = (\mathbf{C}, e_c)$ e obter o ponto $P_3$ ($P_3 = \mathfrak{a} \cap \phi$); traçar a reta $\mathfrak{s} = (P_1, P_3)$;

iv) traçar a reta $\mathfrak{t} = (P_2, P_3)$; construir a reta $\mathfrak{t}'$ ($\mathbf{C} \in \mathfrak{t}'$ e $\mathfrak{t}' \parallel \mathfrak{t}$) e obter o ponto $P_4$ ($P_4 = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{t}'$); traçar a reta $\mathfrak{a}''$ ($P_4 \in \mathfrak{a}''$ e $\mathfrak{a}'' \parallel \mathfrak{a}$) e obter o ponto $E_c$ ($E_c = \mathfrak{a}'' \cap \phi$);

v) construir a reta $\mathfrak{b}$, transformada de $\mathfrak{a}$ pela reflexão em torno da reta $\mathfrak{e}_c = (\mathbf{C}, E_c)$ e obter $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}$); traçar a reta $\mathfrak{c} = (\mathbf{A}, E_c)$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

**Exercício 229)** $< h_a, h_b, R >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2S = ah_a = bh_b \implies b = \frac{ah_a}{h_b} \tag{4.77}$$

$$2S = \frac{abc}{2R} = bh_b \implies c = \frac{2Rh_b}{a} \tag{4.78}$$

$$a = 2R\sin\alpha \implies \cos\alpha = \pm\frac{1}{2R}\sqrt{4R^2 - a^2} \tag{4.79}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \implies \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{4.80}$$

Com o sistema (4.77)–(4.80), obtemos

$$\left[1 - \left(\frac{h_a}{h_b}\right)^2\right]^2 t^4 + 4h_a^2 t^3 - 8R^2(h_a^2 + h_b^2)t^2 + (2Rh_b)^4 = 0 \tag{4.81}$$

onde $a = \sqrt{t}$.

Como $<h_a, h_b, R>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.81) com um programa qualquer para obter $t$.

Se a equação (4.81) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $h_a = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$, $h_b = \frac{20\sqrt{3}}{7}$ cm e $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm.

Com estes valores, a equação (4.81) torna-se

$$\frac{576}{625}t^4 + 192t^3 - 9472t^2 + 2560000 = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se (com seis algarismos decimais exatos):

$$t_1 = 25 \implies a_1 = 5\,\text{cm} \implies b_1 = 7\,\text{cm} \quad \text{e} \quad c_1 = 8\,\text{cm}$$

$$t_2 = 30{,}597982843261 \implies a_2 = 5{,}531544\,3\,\text{cm} \implies$$

$$b_2 = \frac{7a_2}{5} = 7{,}744162\,1\,\text{cm} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{40}{a_2} = 7{,}231253\,6\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $<a_1, b_1, c_1>$ e $<a_2, b_2, c_2>$ satisfazem todas as condições do problema.

A regra de Descartes (número de variações nos sinais dos coeficientes) nos diz que a equação (4.81) terá 2 ou 0 raízes positivas. Logo,

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

**Exercício 230)** $<h_a, h_b, r>$

Método do problema já resolvido

Sabemos, pelo teorema 2.8 em [6], que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

Podemos assim calcular (e mesmo construir) a altura $h_c$. Conhecemos então $<h_a, h_b, h_c>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 222).

Para construir $h_c$, começamos construindo o segmento $\ell$ tal que

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} \implies \ell = \frac{h_a h_b}{h_a + h_b}$$

ou seja, $\ell$ é a quarta proporcional entre os segmentos $<h_a + h_b, h_a, h_b>$.

Em seguida, fazemos

$$\frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} - \frac{1}{\ell} \implies h_c = \frac{\ell r}{\ell - r}$$

ou seja, $h_c$ é a quarta proporcional entre os segmentos $< \ell - r, \ell, r >$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

**Exercício 231)** $< h_a, h_b, r_a >$

Método do problema já resolvido

Como $< h_a, r_a, r >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, h_b, r >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 230).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

**Exercício 232)** $< h_a, h_b, r_c >$

Método do problema já resolvido

Como $< h_a, r_c, r_b >$ formam um datum, conhecemos $r_b$. E como $< h_b, r_b, r >$ também formam um datum, conhecemos $r$. Conhecemos então $< h_a, h_b, r >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 230).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

**Exercício 233)** $< h_a, m_a, m_b >$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

Seja $\mathcal{M}_b$ a projeção do ponto $M_b$ sobre a reta $\mathfrak{a}$ (reta que contém os pontos $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$). Seguindo as ideias do primeiro procedimento do exercício 167, considere as retas $\mathfrak{m}_a = (\mathbf{A}, M_a)$ e $\mathfrak{m}'_a$ ($M_b \in \mathfrak{m}'_a$ e $\mathfrak{m}'_a \parallel \mathfrak{m}_a$). O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\, \mathbf{B} M_b \mathcal{M}_b$ e o(s) ponto(s) $\mathcal{M}_a$, onde $\mathcal{M}_a = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}'_a$. Uma análise da figura 4.162 (ver a página 82) nos mostrará que o $\triangle\, \mathbf{B} M_b \mathcal{M}_b$ é de fácil construção e que o ponto $\mathcal{M}_a$ possui duas propriedades:

i) pertence à reta $\mathfrak{a}$;

ii) sua distância ao ponto $M_b$ vale $\frac{1}{2} m_a$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.162, na página 82):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto $\mathcal{M}_b$ e construir o $\triangle\,\mathbf{B}M_b\mathcal{M}_b$ ($\measuredangle \mathbf{B}\mathcal{M}_b M_b = 90°$, $\mathcal{M}_b M_b = \frac{h_a}{2}$ e $M_b\mathbf{B} = m_b$);

ii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando $h_a$ desta;

iii) traçar o arco $\phi = (M_b, \frac{1}{2}m_a)$ e obter o ponto $\mathcal{M}_a$ ($\mathcal{M}_a = \mathfrak{a} \cap \phi$);

iv) dividir o segmento $\overline{\mathbf{B}\mathcal{M}_a}$ em três partes iguais e obter o ponto $M_a$ ($M_a \in \mathfrak{a}$ e $\mathbf{B}M_a = 2M_a\mathcal{M}_a$);

v) obter o ponto $\mathbf{C}$ como simétrico do ponto $\mathbf{B}$ em relação a $M_a$;

vi) traçar a reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, M_b)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}'$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC'}$) soluções.

**Observação:** pode-se mostrar que o lugar geométrico do ponto $O$ (circuncentro do $\triangle\,\mathbf{ABC}$) quando o vértice $\mathbf{B}$ percorre a reta $\mathfrak{a}$ mantendo o comprimento da mediana $\overline{\mathbf{B}M_b}$ constante e igual a $m_b$ é a parábola

$$\left(x - \frac{\sqrt{(2m_b)^2 - h_a^2}}{8}\right)^2 = \frac{9h_a}{4}\left(y - \frac{(3h_a)^2 - (2m_b)^2}{16h_a}\right) \tag{4.82}$$

ou $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

Para provar o resultado dado pela equação (4.82), considere a figura 4.162. Pode-se colocar o $\triangle\,\mathbf{ABC}$ num sistema de coordenadas cartesianas retangulares onde o ponto $H_a$ é a origem e a reta $\mathfrak{h}_a$, o eixo $y$. Assim, a reta $\mathfrak{a}$ é o eixo $x$ e as coordenadas dos pontos a seguir tomam os seguintes valores (usando a notação $h_a = 2h$ e $\ell_1^2 = m_b^2 - h^2$): $H_a = (0, 0)$, $\mathbf{A} = (0, 2h)$, $\mathbf{B} = (2x_\mathbf{B}, 0)$, $\mathcal{M}_b = (2x_\mathbf{B} + \ell_1, 0)$, $M_b = (2x_\mathbf{B} + \ell_1, h)$ e $M_c = (x_\mathbf{B}, h)$.

O circuncentro encontra-se na interseção das mediatrizes (retas $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{s}$, respectivamente) dos segmentos $\overline{\mathbf{AB}}$ e $\overline{\mathbf{AC}}$. Assim, $O = (x_\odot, y_\odot) = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{s}$. As equações de $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{s}$ são:

$$\mathfrak{r}:\ y = \frac{x_\mathbf{B}}{h}x - \frac{x_\mathbf{B}^2}{h} + h \tag{4.83}$$

$$\mathfrak{s}:\ y = \frac{2x_\mathbf{B} + \ell_1}{h}x - \frac{(2x_\mathbf{B} + \ell_1)^2}{h} + h \tag{4.84}$$

Igualando as equações (4.83) e (4.84), obtemos:

$$x_\odot = 3x_\mathbf{B} + \ell_1 \tag{4.85}$$

$$y_\odot = \frac{x_\mathbf{B}}{h}(2x_\mathbf{B} + \ell_1) + h \tag{4.86}$$

Substituindo o valor de $x_{\mathbf{B}}$ ($x_{\mathbf{B}} = (x_{\odot} - \ell_1)/3$) dado por (4.85) em (4.86), resulta:

$$y_{\odot} = \frac{2}{9h}x_{\odot}^2 - \frac{\ell_1}{9h}x_{\odot} + h - \frac{\ell_1^2}{9h} \tag{4.87}$$

Vemos assim que o ponto $O$ descreve uma parábola. Para caracterizar tal parábola (ver [1]), é conveniente escrevê-la na forma (emprega-se agora a notação padrão das parábolas na geometria analítica) $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$. Deste modo o vértice $\mathscr{V}$ da parábola situa-se no ponto $(x_0, y_0)$, o foco $\mathscr{F}$ no ponto $(x_0, y_0 + \frac{p}{2})$ e a diretriz $\mathfrak{d}$ é a reta horizontal (paralela ao eixo $x$) de equação $y = y_0 - \frac{p}{2}$ (a distância $p$ entre $\mathscr{F}$ e $\mathfrak{d}$ é chamada de *parâmetro da parábola*).

Igualando os coeficientes nas duas representações da parábola, obtêm-se:

$$p = \frac{9h}{4} = \frac{9h_a}{8}$$

$$x_0 = \frac{\ell_1}{4} = \frac{\sqrt{(2m_b)^2 - h_a^2}}{8} \qquad y_0 = \frac{(3h_a)^2 - (2m_b)^2}{16h_a} \qquad \blacksquare$$

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{A}H_aM_a$ e o ponto $G$ (baricentro do triângulo). Uma análise da figura 4.163 (ver a página 83) nos mostrará que o ponto $G$ possui duas propriedades:

i) pertence à reta $\mathfrak{m}_a = (\mathbf{A}, M_a)$;

ii) sua distância ao ponto $\mathbf{A}$ vale $\frac{1}{3}2m_a$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.163, na página 83):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto $H_a$ e construir o $\triangle\,H_a\mathbf{A}M_a$, obtendo a reta $\mathfrak{m}_a$;

ii) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{A}, \frac{1}{3}2m_a)$ e obter o ponto $G$ ($G = \mathfrak{m}_a \cap \phi_1$);

iii) traçar o arco $\phi_2 = (G, \frac{1}{3}2m_b)$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \phi_2$);

iv) traçar o arco $\phi_3 = (M_a, M_a\mathbf{B})$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \phi_3$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{AB'C'}$) soluções.

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

Uma análise da figura 3.1 em [6] nos mostrará que o problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathrm{A}'_a\mathrm{A}'\mathbf{C}$ (figura auxiliar) e o ponto $\mathrm{B}'$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.164, na página 84):

i) colocar o ponto $P$ numa reta $\mathfrak{m}'_b$ qualquer e construir o triângulo retângulo $\triangle\,\mathrm{A}'_a\mathrm{A}'\mathbf{C}$ tal que $\mathrm{A}'\mathrm{A}'_a = h_a$ e $\mathrm{A}'\mathbf{C} = 2m_b$; traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathrm{A}'_a, \mathbf{C})$;

ii) traçar o círculo $\phi_2 = (\mathrm{A}', m_a)$ e obter o ponto $\mathrm{B}'$ ($\mathrm{B}' = \mathfrak{a} \cap \phi_2$); construir o ponto $\mathrm{C}'$, simétrico de $\mathrm{A}'$ em relação a $\mathrm{B}'$;

iii) traçar a reta $\mathfrak{b}' = (\mathrm{C}', P)$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}'$);

iv) construir o ponto $\mathbf{A}$, simétrico de $\mathrm{A}'$ em relação a $\mathbf{B}$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{ABC}$) soluções.

**Exercício 234)** $< h_a, m_b, m_c >$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o ponto $G$ e o $\triangle\,\mathbf{B}M_b\mathcal{M}_b$ (figura auxiliar), onde $\mathcal{M}_b$ é a projeção do ponto $M_b$ sobre a reta $\mathfrak{a}$. Uma análise da figura 4.165 (ver a página 85) nos mostrará que o ponto $\mathcal{M}_b$ possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $M_b$ vale $\frac{h_a}{2}$;

ii) um observador colocado em $\mathcal{M}_b$ enxerga o segmento $\overline{\mathbf{B}M_b}$ segundo um ângulo reto ($\mathcal{M}_b$ pertence ao arco capaz—$\phi_1$—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{B}M_b}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.165, na página 85):

i) numa reta $\mathfrak{m}_b$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$ e $M_b$ tais que $\mathbf{B}M_b = m_b$;

ii) construir o arco $\phi_1$ de diâmetro $\overline{\mathbf{B}M_b}$;

iii) traçar o arco $\phi_2 = (M_b, \frac{h_a}{2})$ e obter o ponto $\mathcal{M}_b$ ($\mathcal{M}_b = \phi_1 \cap \phi_2$);

iv) traçar o arco $\phi_3 = (\mathbf{B}, \frac{1}{3}2m_b)$ e obter o ponto $G$ ($G = \mathfrak{m}_b \cap \phi_3$);

v) traçar o arco $\phi_4 = (G, \frac{1}{3}2m_c)$;

vi) traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, \mathcal{M}_b)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \phi_4$);

vii) traçar a reta $\mathfrak{b} = (\mathbf{C}, M_b)$ e obter o ponto $\mathbf{A}$, simétrico do ponto $\mathbf{C}$ em relação ao ponto $M_b$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{A'BC'}$) soluções.

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Uma análise da figura 3.1 em [6] nos mostrará que o problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,M_c\mathrm{B}'\mathbf{C}$ (figura auxiliar) e o ponto $\mathbf{B}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.166, na página 86):

i) colocar o ponto $M_c$ numa reta $\mathfrak{m}_b''$ qualquer e construir o triângulo retângulo $\triangle\,M_c\mathrm{B}'\mathcal{M}_c$ tal que $M_c\mathrm{B}' = m_b$ e $M_c\mathcal{M}_c = \frac{h_a}{2}$; traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathrm{B}', \mathcal{M}_c)$;

ii) traçar o círculo $\phi_2 = (M_c, m_c)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \phi_2$);

iii) construir o ponto $\mathbf{B} \in \mathfrak{a}$ tal que $\mathbf{BC} = 2\mathbf{B}\mathrm{B}'$;

iv) construir o ponto $\mathbf{A}$, simétrico de $\mathbf{B}$ em relação a $M_c$.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\,\mathbf{ABC}$ e $\triangle\,\mathbf{ABC}$) soluções.

**Exercício 235)** $<h_a, m_a, d_a>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o comprimento $\mathbf{BC} = a$. Como o $\triangle\,\mathbf{A}H_aD_a$ é de fácil construção e os comprimentos $m_a$ e $e_a$ são conhecidos ($<h_a, d_a, e_a>$ formam um datum), podemos obter os pontos $M_a$ e $E_a$. Assim, conhece-se o ponto $M$ também, médio do segmento $\overline{D_aE_a}$.

Sabemos, pelos teoremas 2.2 e 2.3 em [6], que os pontos $<\mathbf{B}, \mathbf{C}>$ e $<D_a, E_a>$ formam um grupo harmônico. Portanto, o comprimento $a$ está determinado pois $(\mathbf{BC}/2)^2 = MM_a^2 - (D_aE_a/2)^2 = (a/2)^2 = \ell^2$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.167, na página 87):

i) colocar o ponto $H_a$ numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer; traçar a reta $\mathfrak{h}_a$ ($H_a \in \mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{h}_a \perp \mathfrak{a}$); construir os pontos $\mathbf{A}$ e $D_a$, obtendo-se o $\triangle H_a \mathbf{A} D_a$;

ii) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{A}, m_a)$ e obter o ponto $M_a$ ($M_a = \mathfrak{a} \cap \phi_1$);

iii) construir a reta $\mathfrak{e}_a$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{e}_a$ e $\mathfrak{e}_a \perp \mathfrak{d}_a = (\mathbf{A}, D_a)$); obter os pontos $E_a$ ($E_a = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{e}_a$) e $M$ ($MD_a = ME_a$);

iv) construir o comprimento $\ell = M_a P$ tal que $\ell^2 = MM_a^2 - MD_a^2$ (cateto $\overline{M_a P}$ e hipotenusa $\overline{MM_a}$ do $\triangle MM_a P$);

v) traçar o círculo $\phi_2 = (M_a, \ell)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \phi_2$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \phi_2$).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

O problema estará resolvido se pudermos construir o ponto $O$ (circuncentro) e o $\triangle \mathbf{A} H_a D_a$. Com auxílio do teorema 2.14 em [6] e a figura 4.168 (ver a página 88), constatamos que o ponto $O$ possui duas propriedades:

i) pertence à mediatriz (reta $\mathfrak{m}$) do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$;

ii) pertence à reta $\mathfrak{h}_a'$, reflexão da reta $\mathfrak{h}_a$ em torno da reta $\mathfrak{d}_a = (\mathbf{A}, D_a)$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.168, na página 88):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto $H_a$ e construir o $\triangle H_a \mathbf{A} D_a$, obtendo as retas $\mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{d}_a$;

ii) traçar o arco $\phi = (\mathbf{A}, m_a)$ e obter o ponto $M_a$ ($M_a = \phi \cap \mathfrak{a}$);

iii) construir a reta $\mathfrak{m}$ ($M_a \in \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{m} \perp \mathfrak{a}$);

iv) construir a reta $\mathfrak{h}_a'$ e obter o ponto $O$ ($O = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}_a'$);

v) construir o círculo $\Gamma = (O, O\mathbf{A})$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

**Observação:** com esta construção, pode-se calcular facilmente o raio $R$ do círculo circunscrito e o comprimento $a$ do lado $\overline{\mathbf{BC}}$. Por ser instrutivo, mostremos como.

Seja $\delta = \measuredangle H_a\mathbf{A}O = \beta - \gamma$. Então $\frac{\delta}{2} = \measuredangle H_a\mathbf{A}D_a = \theta$ e assim $\cos\theta = \frac{h_a}{d_a}$ e $\sin\theta = \sqrt{d_a^2 - h_a^2}/d_a$. Podemos escrever:

$$\begin{aligned} H_aM_a &= R\sin\delta = R\sin 2\theta = \sqrt{m_a^2 - h_a^2} \\ R &= \frac{\sqrt{m_a^2 - h_a^2}}{\sin 2\theta} = \frac{\sqrt{m_a^2 - h_a^2}}{2\sin\theta\cos\theta} \\ R &= \frac{d_a^2\sqrt{m_a^2 - h_a^2}}{2h_a\sqrt{d_a^2 - h_a^2}} \end{aligned}$$

O comprimento $a$ agora é dado por $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2 - OM_a^2$ e $OM_a = h_a - R\cos 2\theta$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} &= R^2 - (h_a^2 - 2h_aR\cos 2\theta + R^2\cos^2 2\theta) \\ &= R^2\sin^2 2\theta - h_a^2 + 2h_aR\cos 2\theta \end{aligned}$$

Como $\cos\theta = h_a/d_a$ e $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, vem: $\cos 2\theta = (2h_a^2 - d_a^2)/d_a^2$. Substituindo $R^2\sin^2 2\theta$ por $m_a^2 - h_a^2$, obtém-se:

$$\frac{a^2}{4} = m_a^2 - 2h_a^2 + \frac{2h_aR}{d_a^2}(2h_a^2 - d_a^2)$$

Finalmente, substituindo $R$ pelo valor recém calculado, desenvolvendo e simplificando, resulta:

$$a^2 = \frac{4\left(\sqrt{m_a^2 - h_a^2} - \sqrt{d_a^2 - h_a^2}\right)\left(\sqrt{m_a^2 - h_a^2}\sqrt{d_a^2 - h_a^2} + h_a^2\right)}{\sqrt{d_a^2 - h_a^2}}$$

**Exercício 236)** $< h_a, m_a, d_b >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$c\sin\beta = h_a \tag{4.88}$$

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.89}$$

$$\frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a + c} = d_b \tag{4.90}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.91}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta \tag{4.92}$$

$$\cos\tfrac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\beta}{2}} \tag{4.93}$$

Com as equações (4.90) e (4.93), obtemos

$$\cos\beta = \frac{[(a+c)d_b]^2 - 2(ac)^2}{2(ac)^2} \tag{4.94}$$

Com as equações (4.88), (4.92) e (4.94), obtemos

$$\left[1 - \left(\frac{[(a+c)d_b]^2 - 2(ac)^2}{2(ac)^2}\right)^2\right]c^2 = h_a^2 \tag{4.95}$$

Com as equações (4.89), (4.91) e (4.94), obtemos

$$a^2 + 4c^2 - \frac{2\{[(a+c)d_b]^2 - 2(ac)^2\}}{ac} = 4m_a^2 \tag{4.96}$$

Como $< h_a, m_a, d_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.95)–(4.96) com um programa qualquer, obtendo assim os lados $a$ e $c$ e em seguida, $b$.

**Exercício 237)** $< h_a, m_b, d_a >$

Primeiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

O problema estará resolvido se pudermos construir o ponto $O$ (circuncentro) e o $\triangle \mathbf{A}H_aD_a$. Com auxílio do teorema 2.14 em [6], da equação (4.82) (ver a página 46) e da figura 4.169 (ver a página 89), constatamos que o ponto $O$ possui duas propriedades:

i) pertence à reta $\mathfrak{h}_a'$, reflexão da reta $\mathfrak{h}_a$ em torno da reta $\mathfrak{d}_a = (\mathbf{A}, D_a)$;

ii) pertence à parábola $\mathcal{P} = (\mathscr{F}, \mathfrak{d})$ com foco $\mathscr{F}$ distante $\frac{\ell_1}{4}$ da reta $\mathfrak{h}_a$ e $p = \frac{9h_a}{8}$ da diretriz. Quanto à diretriz $\mathfrak{d}$, é a reta paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distante $\ell_2 = \frac{m_b^2}{4h_a}$ desta.

Portanto, $O = \mathfrak{h}_a' \cap \mathcal{P}$. A construção com régua e compasso da interseção de uma reta com uma cônica pode ser vista em [2], por exemplo. No caso de a cônica ser uma parábola, em [5] vemos uma construção mais simples e que será reproduzida aqui (ver a figura 4.170, na página 90), após a construção do triângulo.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.169, na página 89):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto $H_a$ e construir o $\triangle H_a\mathbf{A}D_a$, obtendo as retas $\mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{d}_a$. Construir a reta $\mathfrak{h}_a'$;

ii) construir os segmentos $\ell_1 = \sqrt{m_b^2 - \left(\frac{h_a}{2}\right)^2}$ e $\ell_2$ tal que $\frac{4h_a}{m_b} = \frac{m_b}{\ell_2}$, ou seja, $\ell_2$ é a terceira proporcional dos segmentos $4h_a$ e $m_b$.

iii) traçar a reta $\mathfrak{d}$ e construir o foco $\mathscr{F}$. Construir o ponto $O$ ($O = \mathfrak{h}_a' \cap \mathcal{P}$) segundo as etapas da construção auxiliar mostrada na continuação;

iv) construir o círculo $\Gamma = (O, O\mathbf{A})$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle\, \mathbf{ABC}$ e $\triangle\, \mathbf{AB'C'}$) soluções.

A construção dos pontos $O$ e $\mathcal{O}$ (interseções da parábola $\mathcal{P}$ com a reta $\mathfrak{h}_a'$) pode ser efetuada da seguinte maneira (ver a figura 4.170, na página 90):

i) construir o ponto $P_1 = \mathfrak{d} \cap \mathfrak{h}_a'$ e traçar a reta $\mathfrak{r} = (\mathscr{F}, P_1)$;

ii) com um ponto $P_2 \in \mathfrak{h}_a'$ como centro, construir o círculo $\phi = (P_2, P_2P_3)$ tangente à reta $\mathfrak{d}$ ($P_3 \in \mathfrak{d}$ e $\overline{P_2P_3} \perp \mathfrak{d}$);

iii) obter os pontos ($P_4$ e $P_5$) de interseção da reta $\mathfrak{r}$ com o círculo $\phi$; traçar as retas $\mathfrak{s} = (P_2, P_4)$ e $\mathfrak{t} = (P_2, P_5)$;

iv) traçar as retas $\mathfrak{s}'$ ($\mathscr{F} \in \mathfrak{s}'$ e $\mathfrak{s}' \parallel \mathfrak{s}$) e $\mathfrak{t}'$ ($\mathscr{F} \in \mathfrak{t}'$ e $\mathfrak{t}' \parallel \mathfrak{t}$) e obter os pontos $O = \mathfrak{s}' \cap \mathfrak{h}_a'$ e $\mathcal{O} = \mathfrak{t}' \cap \mathfrak{h}_a'$.

Para justificar a construção do ponto $O$ (analogamente, a do ponto $\mathcal{O}$), construa o ponto $P_6$ ($P_6 \in \mathfrak{d}$ e $\overline{P_2P_3} \parallel \overline{OP_6}$). Então o círculo $(O, OP_6)$ é o homotético do círculo $\phi$ pela homotetia de centro $P_1$ e $O\mathscr{F} = OP_6$, ou seja, $O \in \mathcal{P}$.

**Observação:** o ponto $\mathcal{O}'$ é um dos pontos da interseção da parábola $\mathcal{P}$ com a reta $\mathfrak{h}_a''$ e o triângulo que seria construído com tal ponto como circuncentro teria o segmento $\overline{\mathbf{A}D_a'}$ como bissetriz externa.

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Ver a construção de Gilles Boutte em
`<http://g.boutte.free/articles/021212.pdf>` ou em
`<http://www.escolademestres.com/qedtexte>`.

**Exercício 238)** $< h_a, m_b, d_b >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$c \sin\beta = h_a \tag{4.97}$$
$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{4.98}$$
$$ac - \frac{ab^2 c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.99}$$
$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.100}$$
$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta \tag{4.101}$$

Com as equações (4.97) e (4.101), obtemos

$$\cos^2\beta = 1 - \frac{h_a^2}{c^2} = \frac{c^2 - h_a^2}{c^2} \tag{4.102}$$

Com as equações (4.98), (4.100) e (4.102), obtemos

$$(a^2 + c^2 - 4m_b^2)^2 - 4(c^2 - h_a^2)a^2 = 0 \tag{4.103}$$

Com as equações (4.98) e (4.99), obtemos

$$\left[1 - \frac{2(a^2 + c^2) - 4m_b^2}{(a+c)^2}\right] ac - d_b^2 = 0 \tag{4.104}$$

Como $< h_a, m_b, d_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.103)–(4.104) com um programa qualquer, obtendo assim os lados $a$ e $c$ e em seguida, $b$.

**Exercício 239)** $< h_a, m_b, d_c >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$b \sin\gamma = h_a \tag{4.105}$$
$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{4.106}$$
$$\frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b} = d_c \tag{4.107}$$
$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2 \tag{4.108}$$
$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma \tag{4.109}$$
$$\cos\tfrac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}} \tag{4.110}$$

Com as equações (4.107) e (4.110), obtemos

$$\cos\gamma = \frac{[(a+b)d_c]^2 - 2(ab)^2}{2(ab)^2} \tag{4.111}$$

Com as equações (4.105), (4.109) e (4.111), obtemos

$$\left[1 - \left(\frac{[(a+b)d_c]^2 - 2(ab)^2}{2(ab)^2}\right)^2\right]b^2 = h_a^2 \tag{4.112}$$

Com as equações (4.106), (4.108) e (4.111), obtemos

$$4a^2 + b^2 - \frac{2\left\{[(a+b)d_c]^2 - 2(ab)^2\right\}}{ab} = 4m_b^2 \tag{4.113}$$

Como $< h_a, m_b, d_c >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.112)–(4.113) com um programa qualquer, obtendo assim os lados $a$ e $b$ e em seguida, $c$.

**Exercício 240)** $< h_a, m_a, e_a >$

Método do problema já resolvido

Como $< h_a, e_a, d_a >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, m_a, d_a >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 235).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

**Exercício 241)** $< h_a, m_a, e_b >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$c\sin\beta = h_a \tag{4.114}$$

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.115}$$

$$\frac{2ac\sin\frac{\beta}{2}}{|a-c|} = e_b \tag{4.116}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.117}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta \tag{4.118}$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} \tag{4.119}$$

Com as equações (4.116) e (4.119), obtemos

$$\cos\beta = \frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{2(ac)^2} \tag{4.120}$$

Com as equações (4.114), (4.118) e (4.120), obtemos

$$\Big[1-\Big(\frac{2(ac)^2-[(a-c)e_b]^2}{2(ac)^2}\Big)^2\Big]c^2 = h_a^2 \tag{4.121}$$

Com as equações (4.115), (4.117) e (4.120), obtemos

$$a^2+4c^2-\frac{2\big\{2(ac)^2-[(a-c)e_b]^2\big\}}{ac} = 4m_a^2 \tag{4.122}$$

Como $<h_a, m_a, e_b>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.121)–(4.122) com um programa qualquer, obtendo assim os lados $a$ e $c$ e em seguida, $b$.

**Exercício 242)** $<h_a, m_b, e_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<h_a, e_a, d_a>$ formam um datum, conhecemos $<h_a, m_b, d_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 237).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

**Exercício 243)** $<h_a, m_b, e_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$c\sin\beta = h_a \tag{4.123}$$
$$2(a^2+c^2)-b^2 = 4m_b^2 \tag{4.124}$$
$$\frac{2ac\sin\frac{\beta}{2}}{|a-c|} = e_b \tag{4.125}$$
$$a^2+c^2-2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.126}$$
$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta \tag{4.127}$$
$$\sin\tfrac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} \tag{4.128}$$

Com as equações (4.125) e (4.128), obtemos

$$\cos\beta = \frac{2(ac)^2-[(a-c)e_b]^2}{2(ac)^2} \tag{4.129}$$

Com as equações (4.123), (4.127) e (4.129), obtemos

$$\Big[1-\Big(\frac{2(ac)^2-[(a-c)e_b]^2}{2(ac)^2}\Big)^2\Big]c^2 = h_a^2 \tag{4.130}$$

Com as equações (4.124), (4.126) e (4.129), obtemos

$$a^2 + c^2 + \frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{ac} = 4m_b^2 \tag{4.131}$$

Como $< h_a, m_b, e_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.130)–(4.131) com um programa qualquer, obtendo assim os lados $a$ e $c$ e em seguida, $b$.

**Exercício 244)** $< h_a, m_b, e_c >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$b \sin\gamma = h_a \tag{4.132}$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{4.133}$$

$$\frac{2ab \sin\frac{\gamma}{2}}{|a-b|} = e_c \tag{4.134}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2 \tag{4.135}$$

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma \tag{4.136}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}} \tag{4.137}$$

Com as equações (4.134) e (4.137), obtemos

$$\cos\gamma = \frac{2(ab)^2 - [(a-b)e_c]^2}{2(ab)^2} \tag{4.138}$$

Com as equações (4.132), (4.136) e (4.138), obtemos

$$\left[1 - \left(\frac{2(ab)^2 - [(a-b)e_c]^2}{2(ab)^2}\right)^2\right] b^2 = h_a^2 \tag{4.139}$$

Com as equações (4.133), (4.135) e (4.138), obtemos

$$4a^2 + b^2 - \frac{2\{2(ab)^2 - [(a-b)e_c]^2\}}{ab} = 4m_b^2 \tag{4.140}$$

Como $< h_a, m_b, e_c >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.139)–(4.140) com um programa qualquer, obtendo assim os lados $a$ e $b$ e em seguida, $c$.

**Exercício 245)** $< h_a, m_a, R >$

Método da interseção de dois lugares geométricos

O problema estará resolvido se pudermos construir o ponto $O$ e o $\triangle H_a \mathbf{A} M_a$. Uma análise da figura 4.171 (ver a página 91) nos mostrará que o ponto $O$ possui duas propriedades:

i) pertence à mediatriz (reta $\mathfrak{m}$) do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$;

ii) sua distância ao ponto $\mathbf{A}$ vale $R$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.171, na página 91):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto $H_a$ e construir o $\triangle H_a \mathbf{A} M_a$;

ii) construir a reta $\mathfrak{m}$ ($M_a \in \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{m} \perp \mathfrak{a}$);

iii) traçar o arco $\phi = (\mathbf{A}, R)$ e obter o ponto $O$ ($O = \mathfrak{m} \cap \phi$);

iv) construir o círculo $\Gamma = (O, R)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 ($\triangle \mathbf{ABC}$ e $\triangle \mathbf{AB'C'}$) soluções.

**Exercício 246)** $< h_a, m_b, R >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left(S = \frac{ah_a}{2} = \frac{abc}{4R}\right) \quad bc = 2Rh_a \tag{4.141}$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{4.142}$$

$$2R \sin\alpha = a \tag{4.143}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{4.144}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \tag{4.145}$$

Com a equação (4.141), obtemos

$$b = \frac{2Rh_a}{c} \tag{4.146}$$

Com as equações (4.142) e (4.146), obtemos

$$(ac)^2 = 2(m_b c)^2 + 2(Rh_a)^2 - c^4 \tag{4.147}$$

Com as equações (4.141), (4.144) e (4.146), obtemos

$$\cos\alpha = \frac{c^4 - (ac)^2 + (2Rh_a)^2}{4Rh_a c^2} \tag{4.148}$$

Com as equações (4.141), (4.144) e (4.146), obtemos

$$\left[1 - \left(\frac{c^4 - (ac)^2 + (2Rh_a)^2}{4Rh_a c^2}\right)^2\right](2Rc)^2 - (ac)^2 = 0 \tag{4.149}$$

Com as equações (4.147)–(4.149), obtemos

$$\begin{aligned} t^4 - (h_a^2 + 2m_b^2)t^3 + (2h_a^2 m_b^2 + m_b^4 - 2R^2 h_a^2)t^2 + \\ + [2(h_a^2 - m_b^2)(Rh_a)^2]t + (Rh_a)^4 = 0 \end{aligned} \tag{4.150}$$

onde $c = \sqrt{t}$.

Como $< h_a, m_b, R >$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.150) com um programa qualquer para obter $t$.

Se a equação (4.150) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $h_a = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}\,\text{cm}$ e $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$.

Com estes valores, a equação (4.150) torna-se

$$t^4 - \frac{225}{2}t^3 + \frac{41089}{16}t^2 + 24696t + 614656 = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se (com seis algarismos decimais exatos):

$$t_1 = 64 \implies c_1 = 8\,\text{cm} \implies a_1 = 5\,\text{cm} \quad \text{e} \quad b_1 = 7\,\text{cm}$$

$$t_2 = 60{,}080869581759 \implies c_2 = 7{,}751185\,0\,\text{cm} \implies$$

$$b_2 = \frac{56}{c_2} = 7{,}224701\,7\,\text{cm} \quad \text{e} \quad a_2 = 5{,}524245\,5\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $< a_1, b_1, c_1 >$ e $< a_2, b_2, c_2 >$ satisfazem todas as condições do problema.

**Exercício 247)** $< h_a, m_a, r >$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Como $< h_a, r, r_a >$ formam um datum, podemos obter $r_a$. Uma análise da figura 4.172 (ver a página 92) nos mostrará que o problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle H_a \mathbf{A} M_a$ e os pontos $D$ e $O$.

Pelo teorema 2.12 em [6], sabemos que o ponto $D$ possui duas propriedades:

i) pertence à mediatriz (reta $\mathfrak{m}$) do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$;

ii) sua distância ao ponto $M_a$ vale $\frac{r_a - r}{2}$.

Quanto ao ponto $O$, ele possui duas propriedades:

i) pertence à mediatriz (reta $\mathfrak{m}$) do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$;

ii) pertence à mediatriz (reta $\mathfrak{s}$) do segmento $\overline{\mathbf{A}D}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.172, na página 92):

i) construir o raio $r_a$ ($r_a = \frac{r h_a}{h_a - 2r}$);

ii) construir o comprimento $\ell$ tal que $\ell = \frac{r_a - r}{2}$;

iii) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto $H_a$ e construir o $\triangle H_a \mathbf{A} M_a$;

iv) construir a reta $\mathfrak{m}$ ($M_a \in \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{m} \perp \mathfrak{a}$);

v) traçar o arco $\phi = (M_a, \ell)$ e obter o ponto $D$ ($D = \mathfrak{m} \cap \phi$);

vi) construir a reta $\mathfrak{s}$ e obter o ponto $O$ ($O = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{s}$);

vii) construir o círculo $\Gamma = (O, O\mathbf{A})$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

**Exercício 248)** $< h_a, m_b, r >$

Método algébrico

Vamos mostrar que podemos construir o lado $a$. Para tal, considere a figura 4.173 (ver a página 93), onde $\mathcal{M}_b$ é a projeção do ponto $M_b$ na reta $\mathfrak{a}$.

O $\triangle \mathbf{B}M_b\mathcal{M}_b$ pode ser construído pois $\measuredangle \mathbf{B}\mathcal{M}_b M_b = 90°$, $M_b\mathcal{M}_b = \frac{h_a}{2}$ e $\mathbf{B}M_b = m_b$. Portanto, o comprimento

$$\mathbf{B}\mathcal{M}_b = \ell = \sqrt{m_b^2 - \frac{h_a^2}{4}} \tag{4.151}$$

é conhecido.

Considerando-se o $\triangle \mathbf{C}M_b\mathcal{M}_b$ tem-se

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{h_a}{2}\right)^2 + (a-\ell)^2 \tag{4.152}$$

Desenvolvendo e substituindo o valor de $\ell^2$ dado por (4.151) em (4.152), resulta:

$$b^2 = 4a^2 - 8\ell a + 4m_b^2 \tag{4.153}$$

Por resultados deduzidos anteriormente, podemos também escrever as equações (4.154) e (4.155):

$$ah_a = (a+b+c)r \tag{4.154}$$
$$4m_b^2 + b^2 = 2a^2 + 2c^2 \tag{4.155}$$

Substituindo o valor de $c = \frac{a(h_a - r) - br}{r}$ dado por (4.154) em (4.155), vem:

$$4m_b^2 + b^2 = 2a^2 + 2\frac{[a(h_a - r) - br]^2}{r^2} \tag{4.156}$$

Desenvolvendo o segundo membro de (4.156), substituindo o valor de $b^2$ dado por (4.153) e isolando $b$, obtém-se:

$$b = \frac{a(h_a^2 - 2h_a r + 4r^2) - 4\ell r^2}{2r(h_a - r)} \tag{4.157}$$

Finalmente, substituindo o valor de $b$ dado por (4.157) em (4.153), desenvolvendo e simplificando, resulta:

$$a^2(4r - h_a)(2r + h_a) - 24\ell r^2 a = 4r^2\left(\frac{r^2 h_a}{2r - h_a} - 4m_b^2\right) \tag{4.158}$$

e o lado $a$ pode ser construído! Assim, conhecemos $< a, h_a, m_b >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 144).

Para mostrar como construir $a$, vamos considerar 3 casos:

i) $4r < h_a$

Ponha

$$u = \frac{24\ell r^2}{(h_a - 4r)(h_a + 2r)}$$

$$v^2 = \frac{4r^2\left(4m_b^2 + \dfrac{h_a r^2}{h_a - 2r}\right)}{(h_a - 4r)(h_a + 2r)}$$

e resolva $a(a+u) = v^2$;

ii) $4r = h_a$

A equação (4.158) torna-se

$$a = \frac{4m_b^2 + \dfrac{h_a r^2}{h_a - 2r}}{6\ell}$$

e $a$ está determinado;

iii) $4r > h_a$

Ponha

$$u = \frac{24\ell r^2}{(4r - h_a)(h_a + 2r)}$$

$$v^2 = \frac{4r^2\left(4m_b^2 + \dfrac{h_a r^2}{h_a - 2r}\right)}{(4r - h_a)(h_a + 2r)}$$

e resolva $a(u-a) = v^2$.

Mostremos como construir os comprimentos do caso iii), deixando a construção dos comprimentos dos outros casos para o leitor.

A construção de $\ell$ é elementar: é um dos catetos do triângulo retângulo de hipotenusa $m_b$ e outro cateto $\frac{h_a}{2}$. Para construir $u$ faça

$$\ell_1 = \frac{2\ell \cdot 3r}{h_a + 2r}$$
$$u = \frac{\ell_1 \cdot 4r}{4r - h_a}$$

E para construir $v$ faça

$$\ell_2 = \frac{r \cdot h_a}{h_a - 2r} \qquad \ell_3 = \sqrt{r \cdot \ell_2}$$
$$\ell_4 = \sqrt{(2m_b)^2 + \ell_3^2}$$
$$\ell_5 = \sqrt{(4r - h_a)(h_a + 2r)}$$
$$v = \frac{2r \cdot \ell_4}{\ell_5}$$

Aplicação numérica: sejam $h_a = 4\,\text{cm}$, $m_b = 5\,\text{cm}$ e $r = 1{,}5\,\text{cm}$.

Com estes valores para os dados estamos no caso iii). Resolvendo $a(u-a) = v^2$ obtemos $a_1 = \sqrt{7}(27\sqrt{3}+15)/14\,\text{cm}$ e $a_2 = \sqrt{7}(27\sqrt{3}-15)/14\,\text{cm}$ e em seguida os outros dois lados dos dois triângulos.

$$b_1 = \frac{\sqrt{7}}{14}\big(30\sqrt{3}+26\big)\,\text{cm} \qquad c_1 = \frac{\sqrt{7}}{14}\big(15\sqrt{3}-1\big)\,\text{cm}$$
$$b_2 = \frac{\sqrt{7}}{14}\big(30\sqrt{3}-26\big)\,\text{cm} \qquad c_2 = \frac{\sqrt{7}}{14}\big(15\sqrt{3}+1\big)\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os triângulos cujos lados são $<a_1, b_1, c_1>$ e $<a_2, b_2, c_2>$ satisfazem todas as condições do problema.

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

**Observação:** esta resolução foi reproduzida de [4] (problema 170), onde podemos ver a seguinte análise de determinação:

$$\begin{array}{rll} h_a > 4r; & m_b \geq \frac{1}{2}h_a & \text{então uma solução} \\ h_a = 4r; & m_b > \frac{1}{2}h_a & \text{então uma solução} \\ 2r < h_a < 4r; & m_b = r\sqrt{\dfrac{2h_a}{h_a - 2r}} & \text{então uma solução} \\ & m_b > r\sqrt{\dfrac{2h_a}{h_a - 2r}} & \text{então duas soluções} \end{array}$$

**Exercício 249)** $<h_a, m_a, r_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<h_a, r_a, r>$ formam um datum, conhecemos $<h_a, m_a, r>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 247).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

**Exercício 250)** $<h_a, m_a, r_b>$

Método da interseção de dois lugares geométricos

Como $<h_a, r_b, r_c>$ formam um datum, podemos obter $r_c$. Uma análise da figura 4.174 (ver a página 94) nos mostrará que o problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle H_a\mathbf{A}M_a$ e os pontos $E$ e $O$.

Pelo teorema 2.13 (ver [6]), sabemos que o ponto $E$ possui duas propriedades:

i) pertence à mediatriz (reta $\mathfrak{m}$) do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$;

ii) sua distância ao ponto $M_a$ vale $\frac{r_b+r_c}{2}$.

Quanto ao ponto $O$, ele possui duas propriedades:

i) pertence à mediatriz (reta $\mathfrak{m}$) do segmento $\overline{\mathbf{BC}}$;

ii) pertence à mediatriz (reta $\mathfrak{s}$) do segmento $\overline{\mathbf{A}E}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.174, na página 94):

i) construir o raio $r_c$ ($r_c = \frac{h_a r_b}{2r_b - h_a}$);

ii) construir o comprimento $\ell$ tal que $\ell = \frac{r_b+r_c}{2}$;

iii) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto $H_a$ e construir o $\triangle H_a\mathbf{A}M_a$;

iv) construir a reta $\mathfrak{m}$ ($M_a \in \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{m} \perp \mathfrak{a}$);

v) traçar o arco $\phi = (M_a, \ell)$ e obter o ponto $E$ ($E = \mathfrak{m} \cap \phi$);

vi) construir a reta $\mathfrak{s}$ e obter o ponto $O$ ($O = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{s}$);

vii) construir o círculo $\Gamma = (O, O\mathbf{A})$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] R. W. Brink. *Analytic Geometry.* D. Appleton-Century Company, 1935.

[2] I. D'Ignazio and E. Suppa. *Il Problema Geometrico dal Compasso al Cabri.* Interlinea editrice, Itália, 2001.

[3] Frère Gabriel Marie (F. G.-M.). *Exercices de Trigonométrie.* Cours de Mathématiques Élémentaires. A. Mame et Fils Éditeurs, Paris, ca 1920.

[4] K. Herterich. *Die Konstruktion von Dreiecken.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1986.

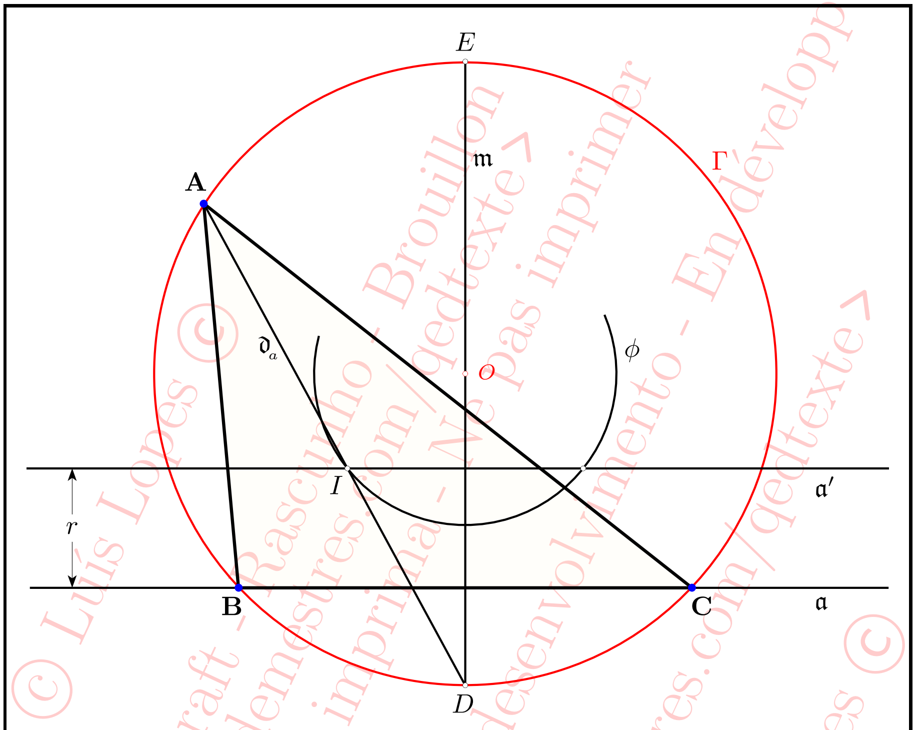
[5] H. P. Hudson. *Ruler and Compass, em Squaring the circle and other monographs.* Chelsea Publishing Company, London, 1953.

[6] L. Lopes. *Manual de Construção de Triângulos*, volume 1. A ser publicado, Rio de Janeiro, 2015.

[7] G. Polya. *Mathematical Discovery*, volume I. John Wiley & Sons, 1962.

[8] A. S. Posamentier and W. Wernick. *Advanced Geometric Constructions.* Dale Seymour Publications, Palo Alto, CA, USA, 1988.

[9] J. C. Putnoki. *Elementos de Geometria & Desenho Geométrico.* Editora Scipione, São Paulo, 1989.




Triângulo dados $<a, R, r>$

**Figura 4.147:** Exercício 215 — Segundo procedimento.

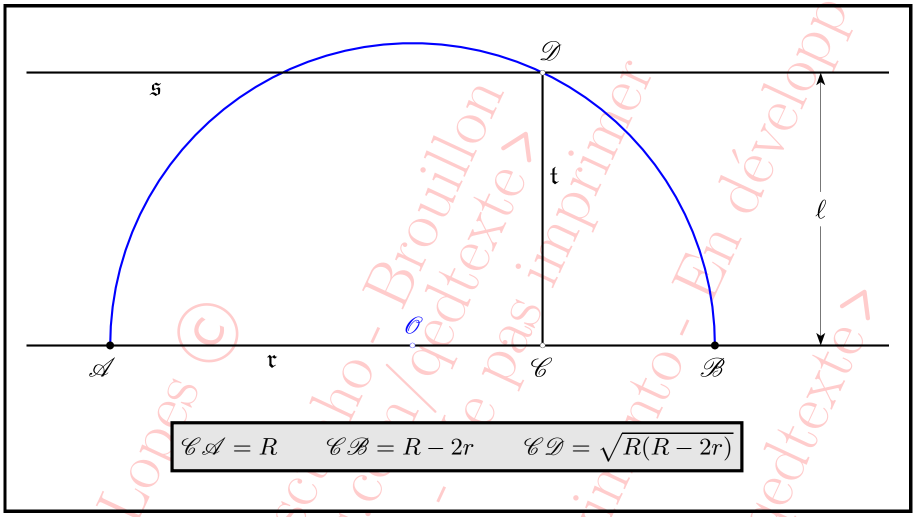
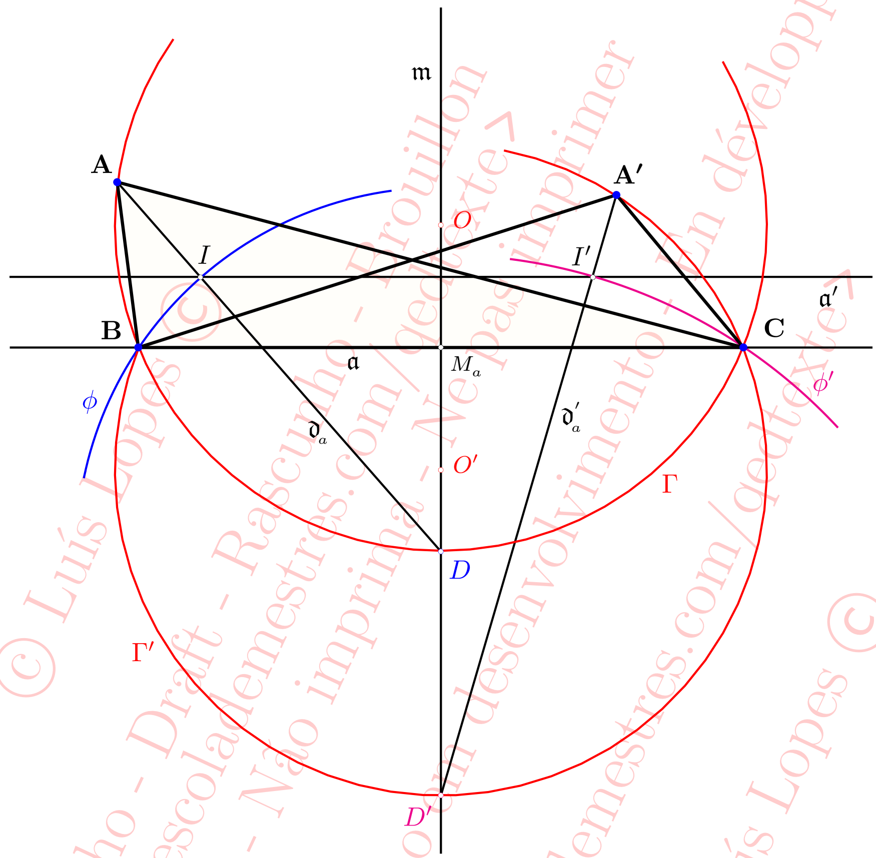
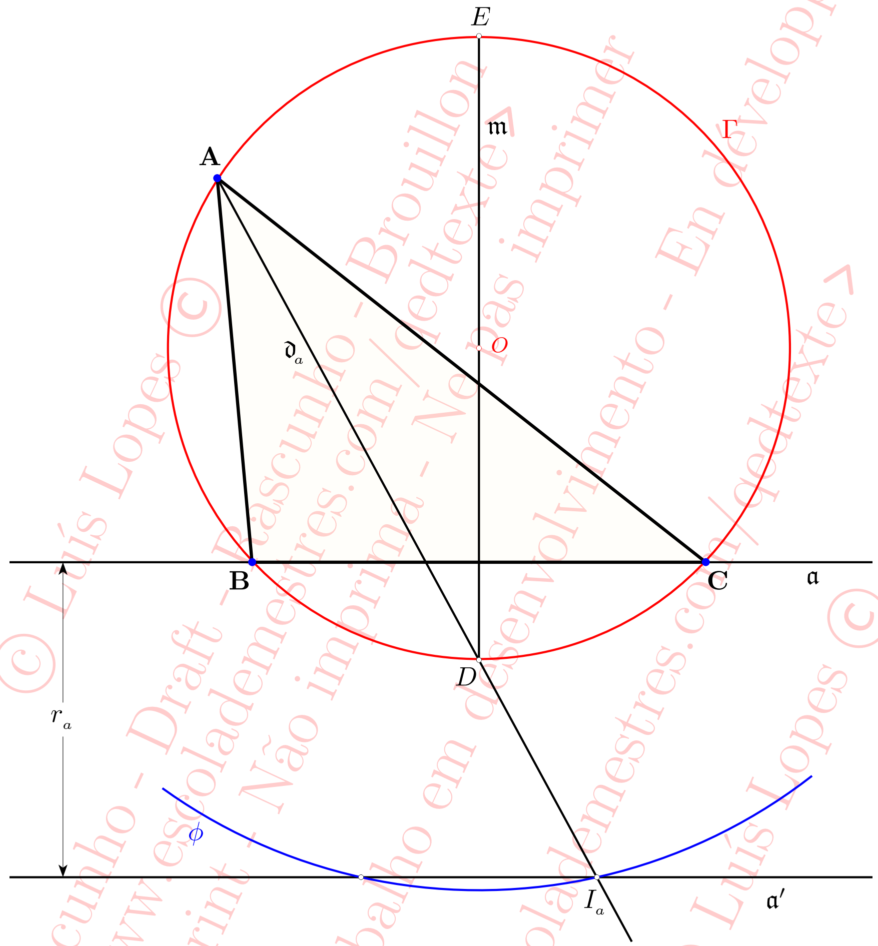



**Figura 4.148:** Construção de $\ell = \sqrt{R(R-2r)} = \mathscr{C}\mathscr{D}$.



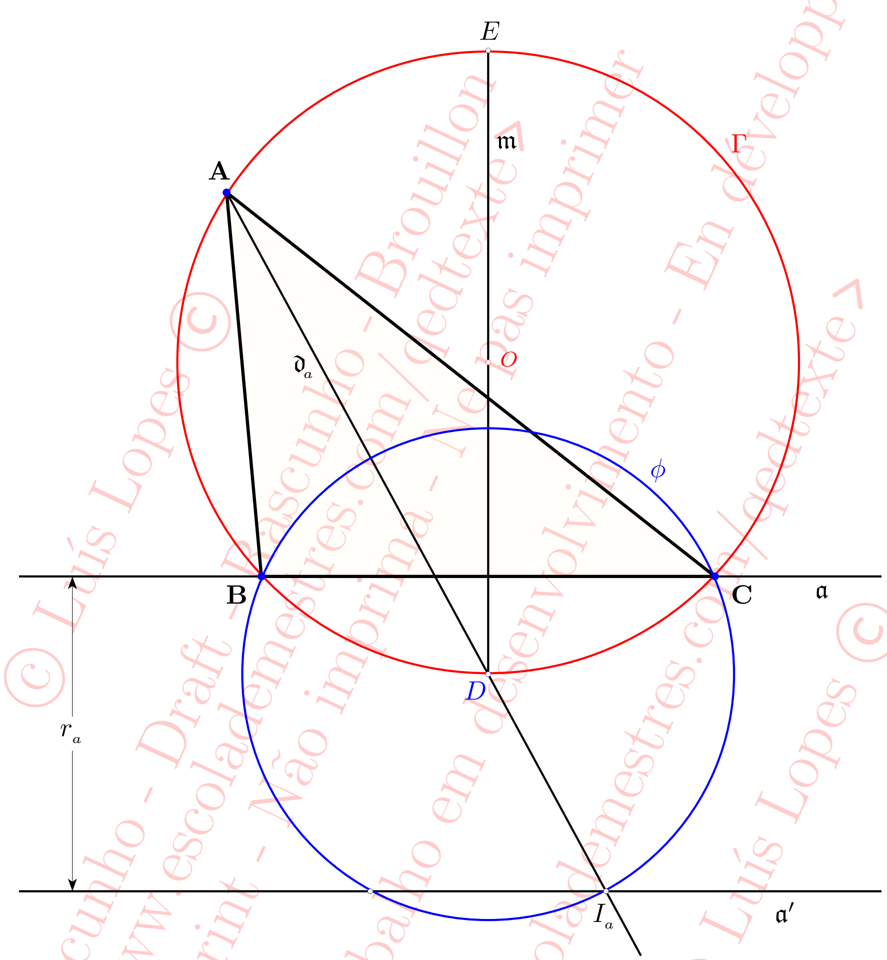

Triângulo dados $< a, R, r >$

**Figura 4.149:** Exercício 215 — Terceiro procedimento.




Triângulo dados $\langle a, R, r_a \rangle$

**Figura 4.150:** Exercício 216 — Segundo procedimento.




Triângulo dados $\langle a, R, r_a \rangle$

**Figura 4.151:** Exercício 216 — Terceiro procedimento.

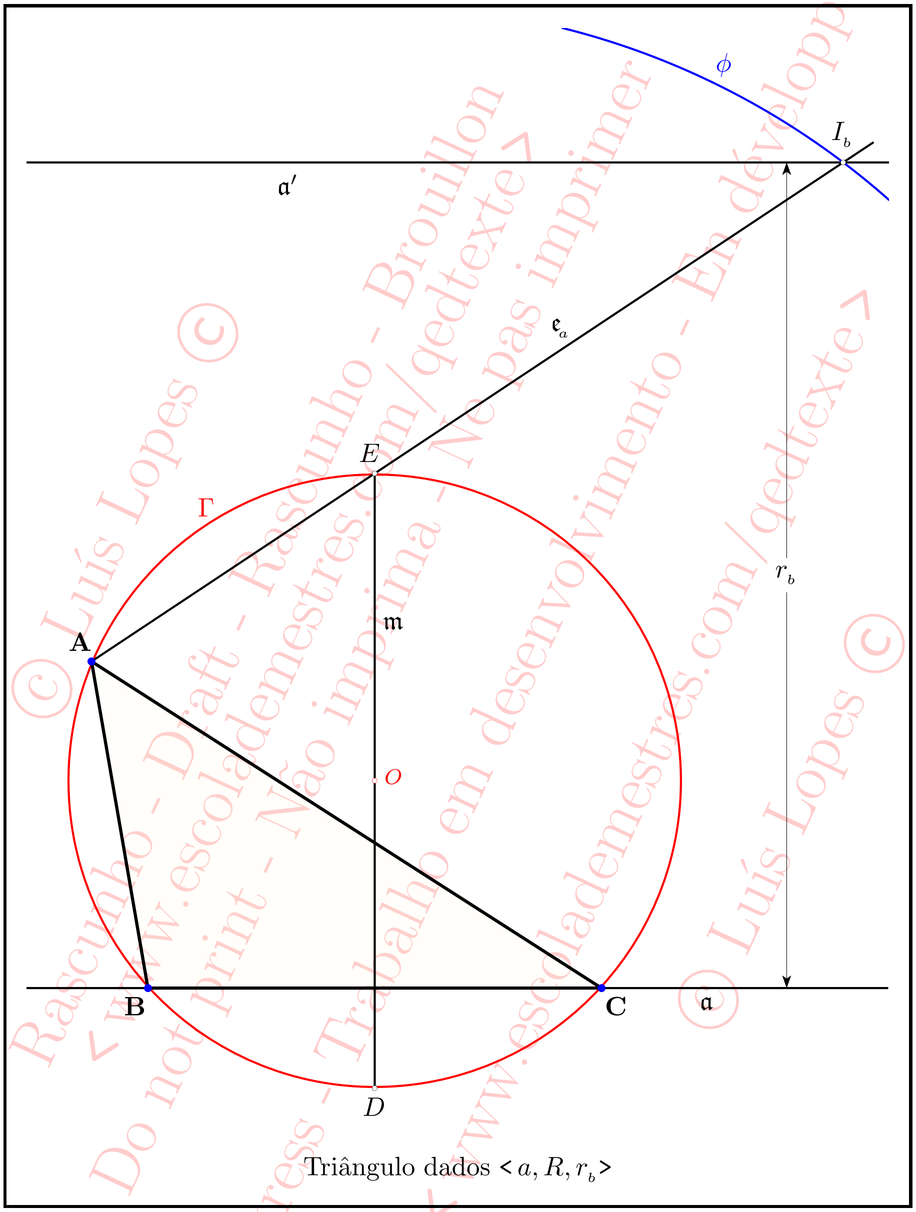
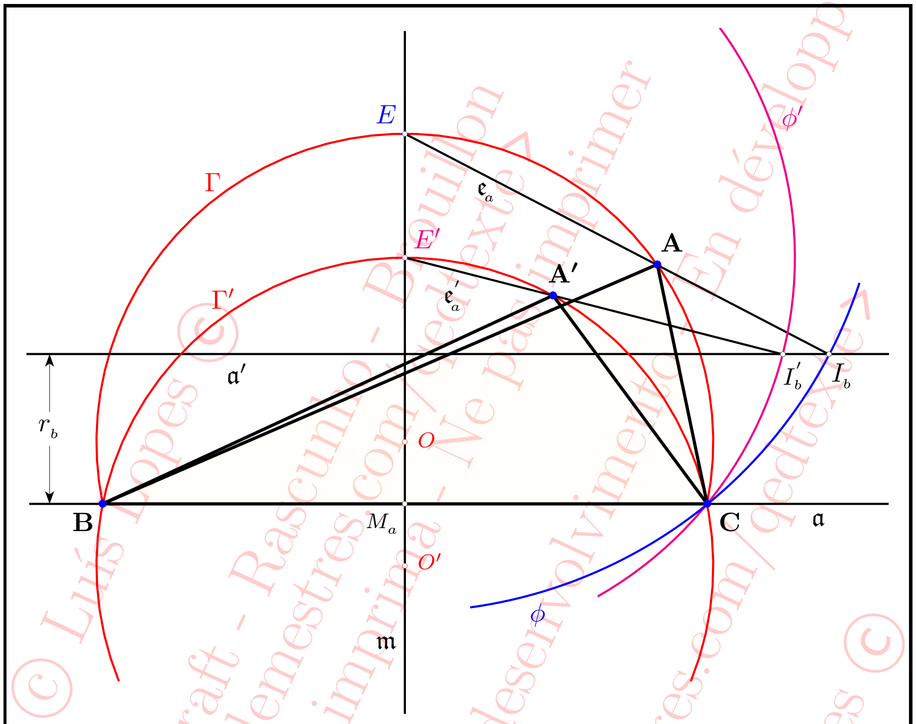



**Figura 4.152:** Exercício 217 — Segundo procedimento.




Triângulo dados $<a, R, r_b>$

**Figura 4.153:** Exercício 217 — Terceiro procedimento.

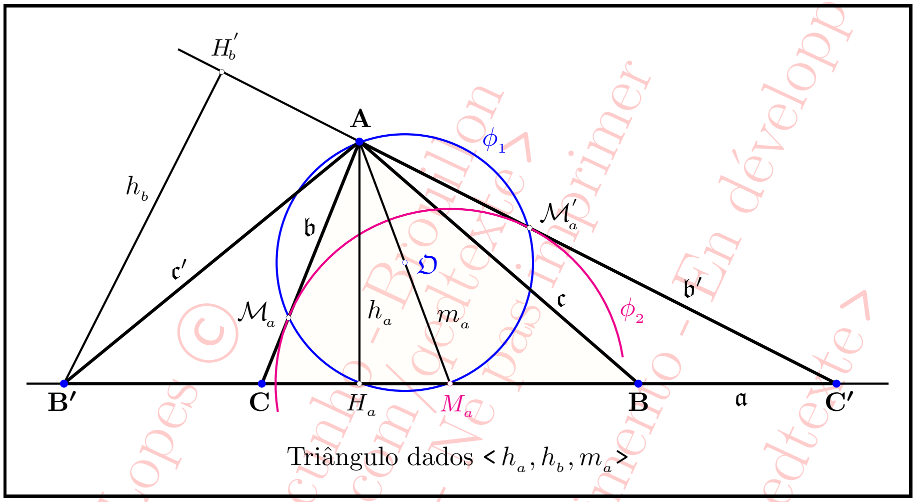



**Figura 4.154:** Exercício 223 — Primeiro procedimento.

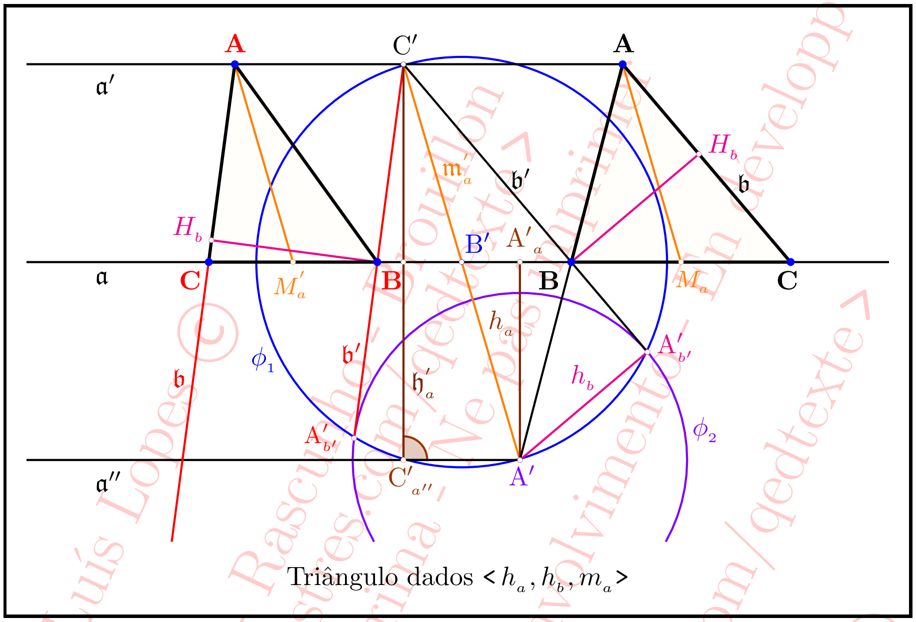



**Figura 4.155:** Exercício 223 — Segundo procedimento.

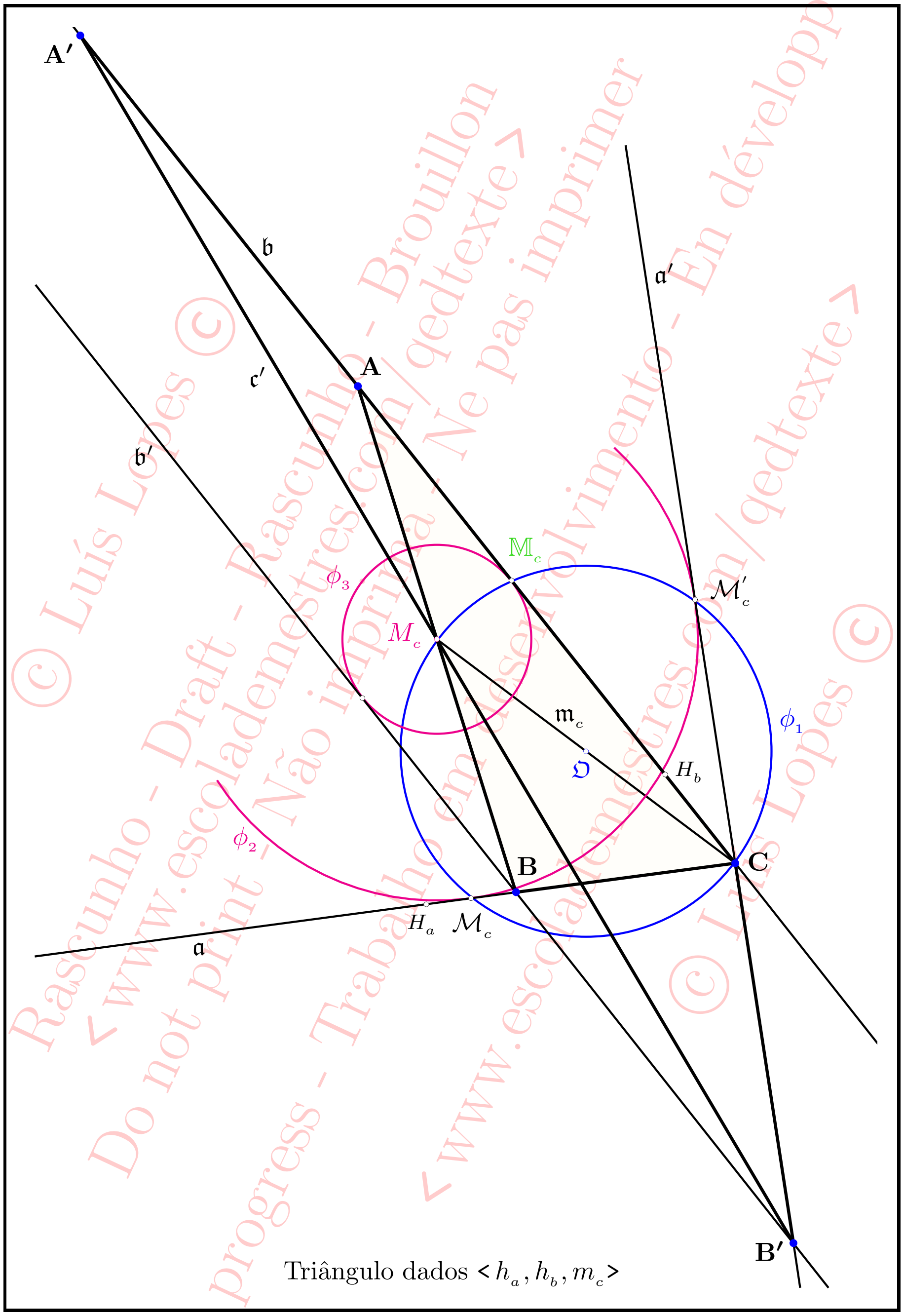



**Figura 4.156:** Exercício 224 — Primeiro procedimento.

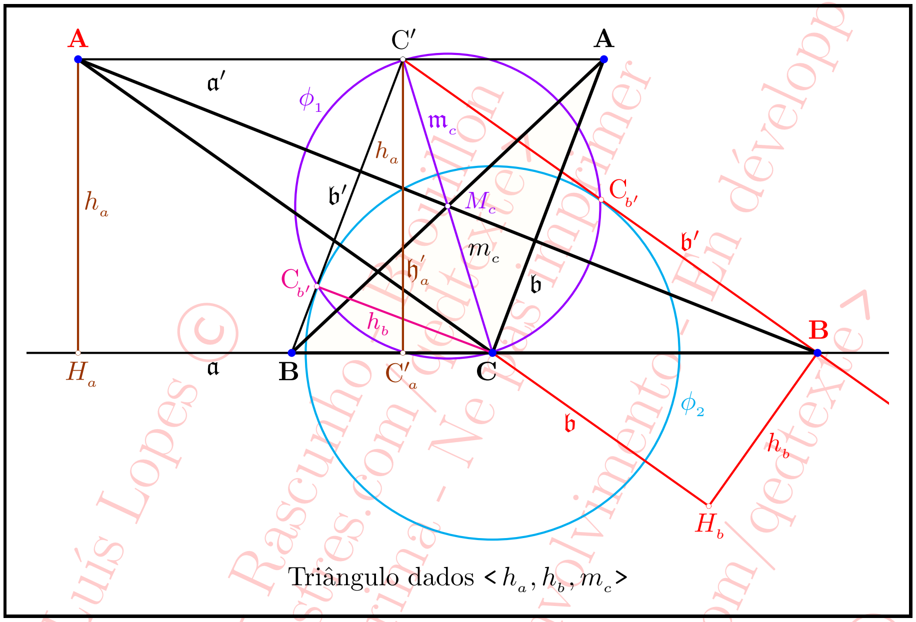



**Figura 4.157:** Exercício 224 — Segundo procedimento.

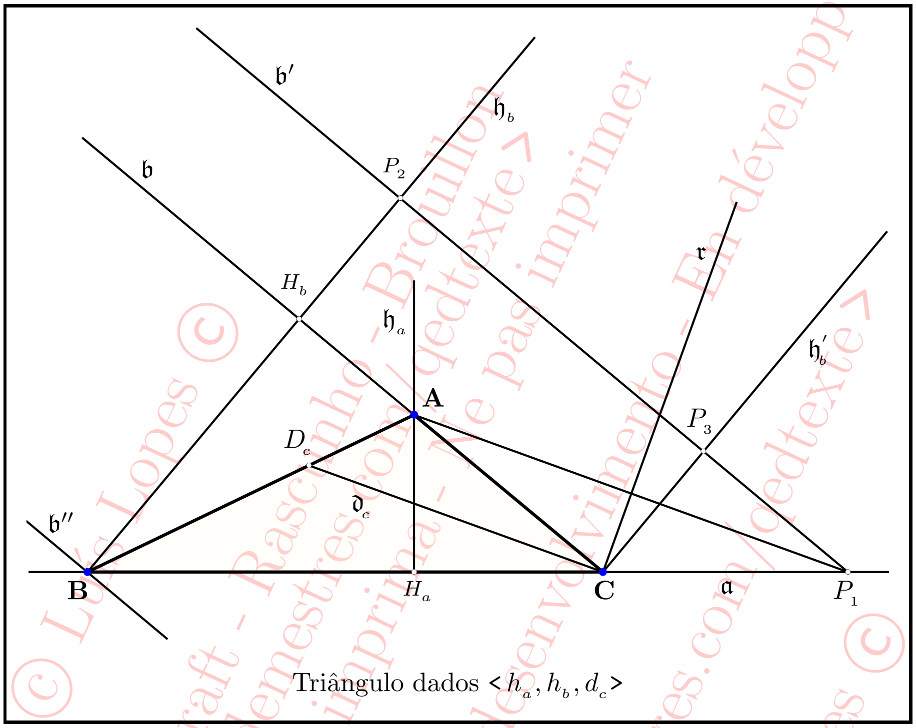
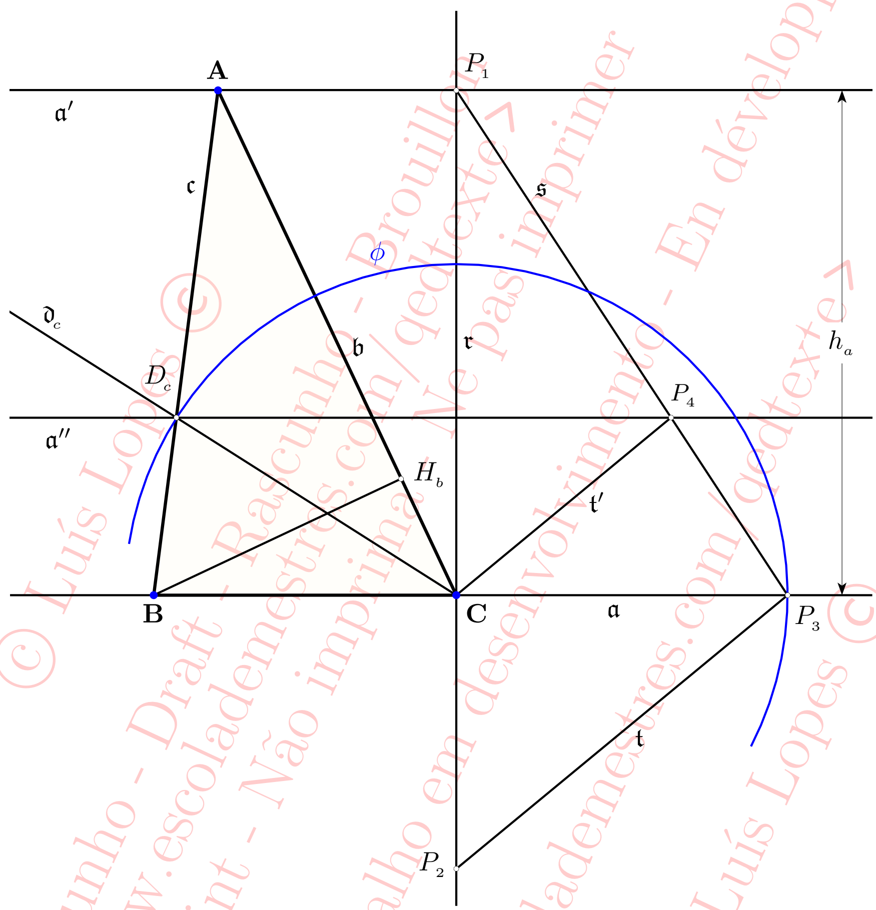
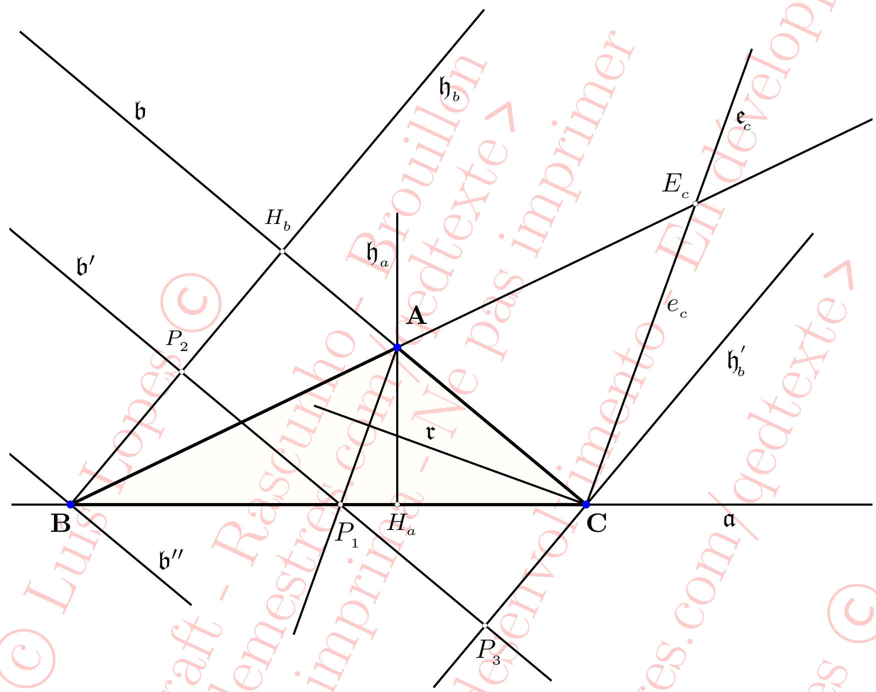



**Figura 4.158:** Exercício 226 — Segundo procedimento.




Triângulo dados $< h_a, h_b, d_c >$

**Figura 4.159:** Exercício 226 — Terceiro procedimento.




Triângulo dados $< h_a, h_b, e_c >$

**Figura 4.160:** Exercício 228 — Segundo procedimento.

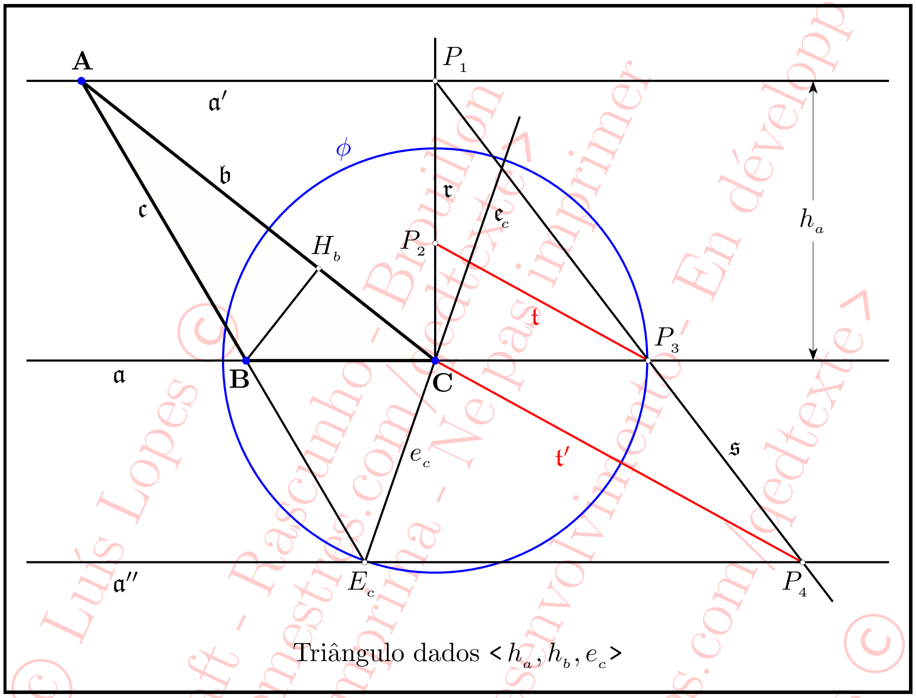



**Figura 4.161:** Exercício 228 — Terceiro procedimento.

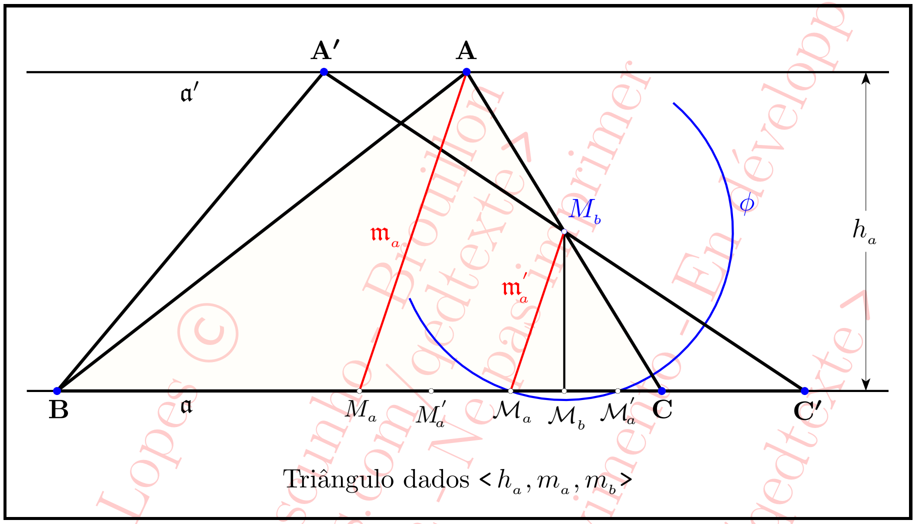



**Figura 4.162:** Exercício 233 — Primeiro procedimento.

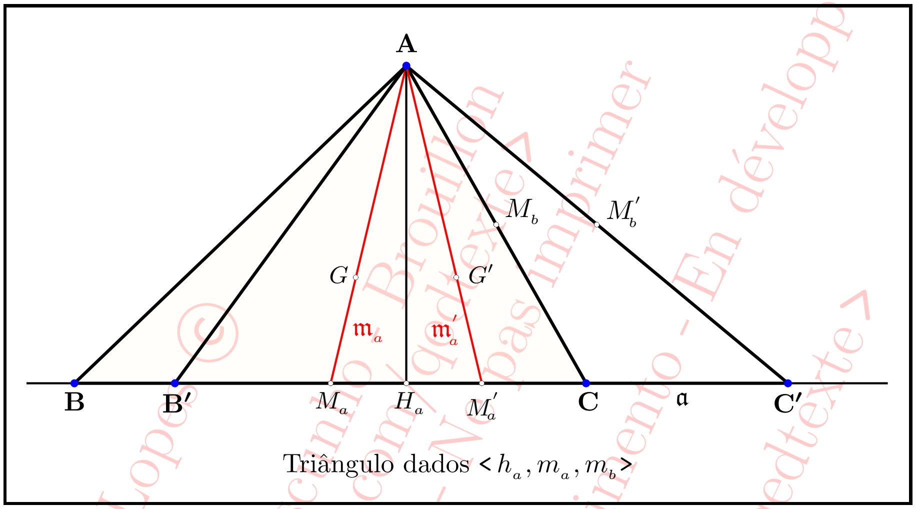
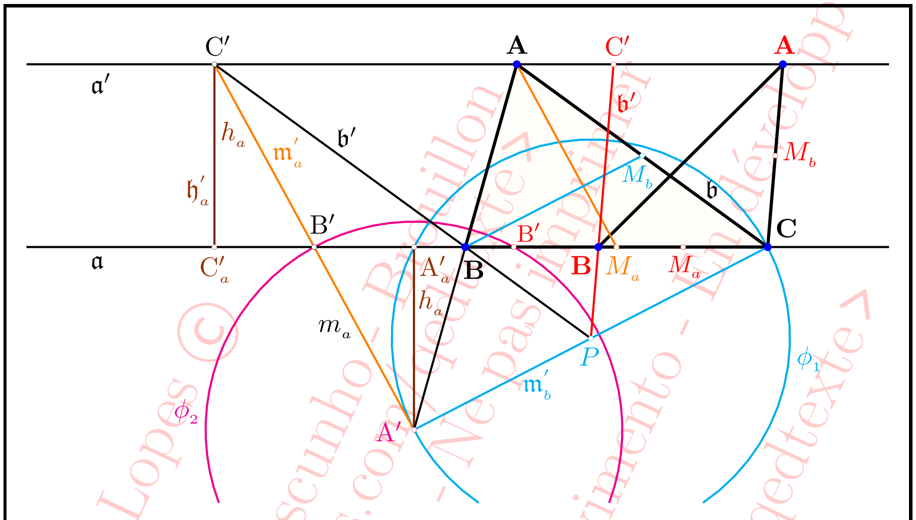



**Figura 4.163:** Exercício 233 — Segundo procedimento.




Triângulo dados $\langle h_a, m_a, m_b \rangle$

**Figura 4.164:** Exercício 233 — Terceiro procedimento.

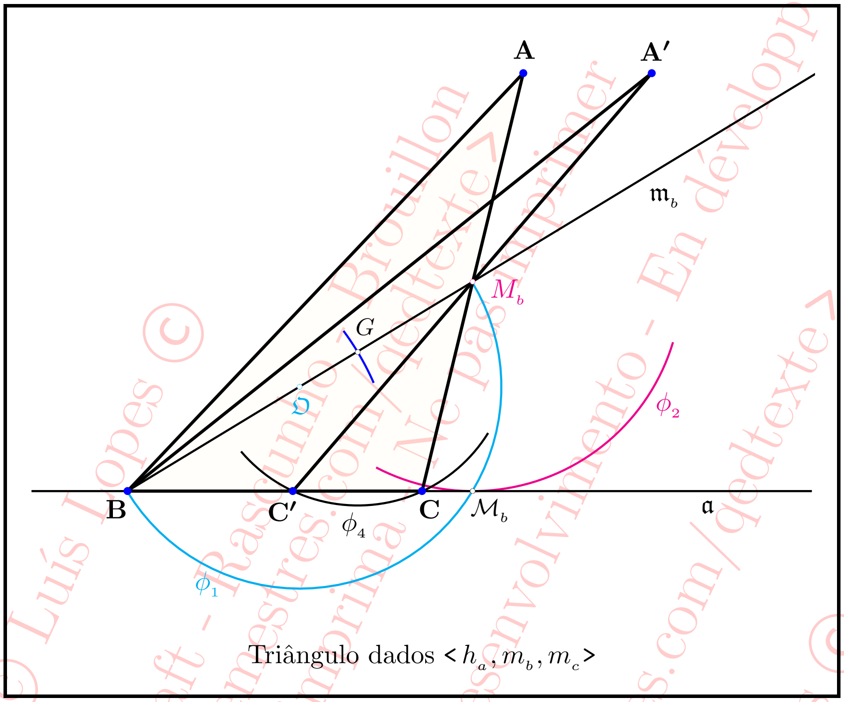



**Figura 4.165:** Exercício 234 — Primeiro procedimento.

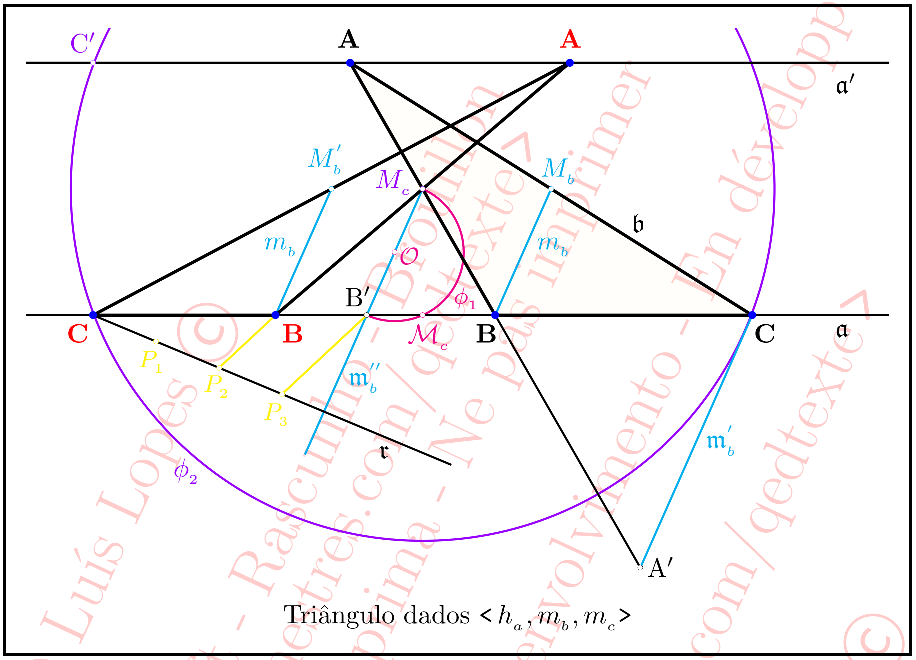



**Figura 4.166:** Exercício 234 — Segundro procedimento.

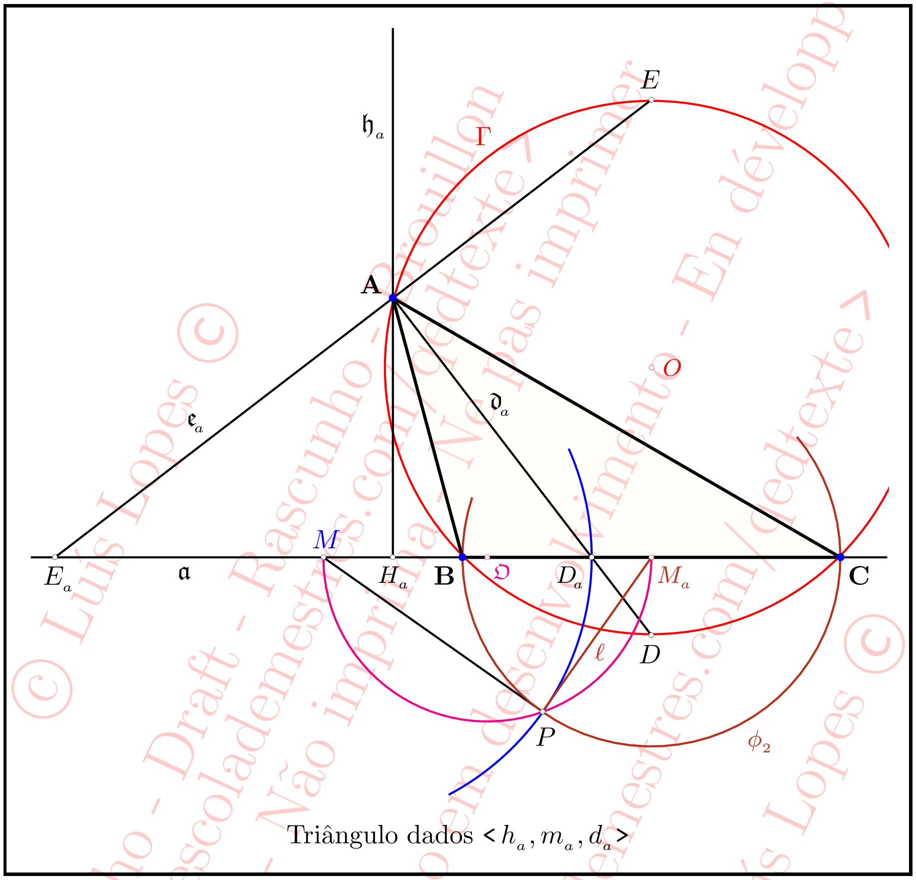
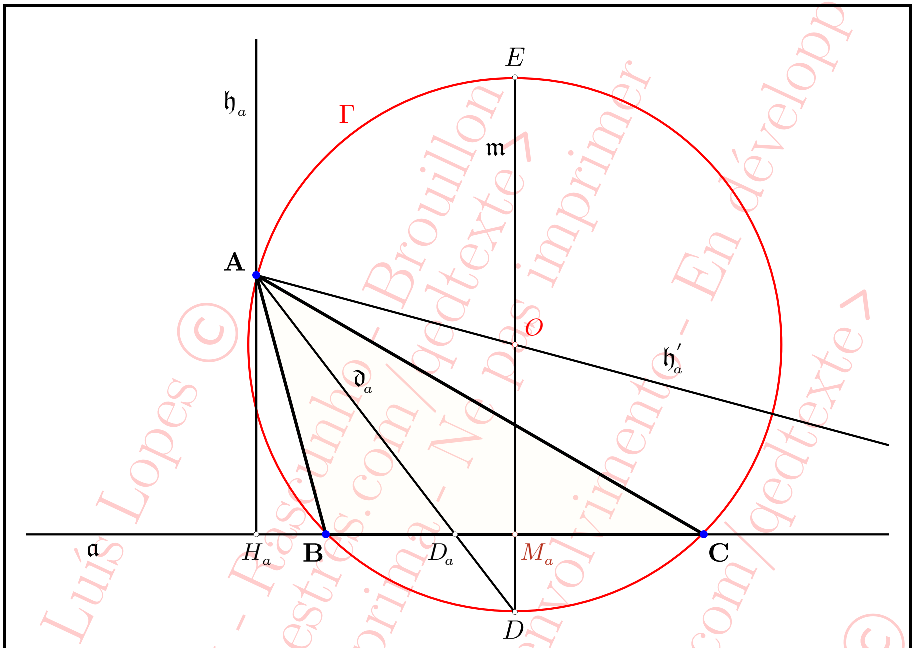



**Figura 4.167:** Exercício 235 — Primeiro procedimento.




Triângulo dados $< h_a, m_a, d_a >$

**Figura 4.168:** Exercício 235 — Segundo procedimento.

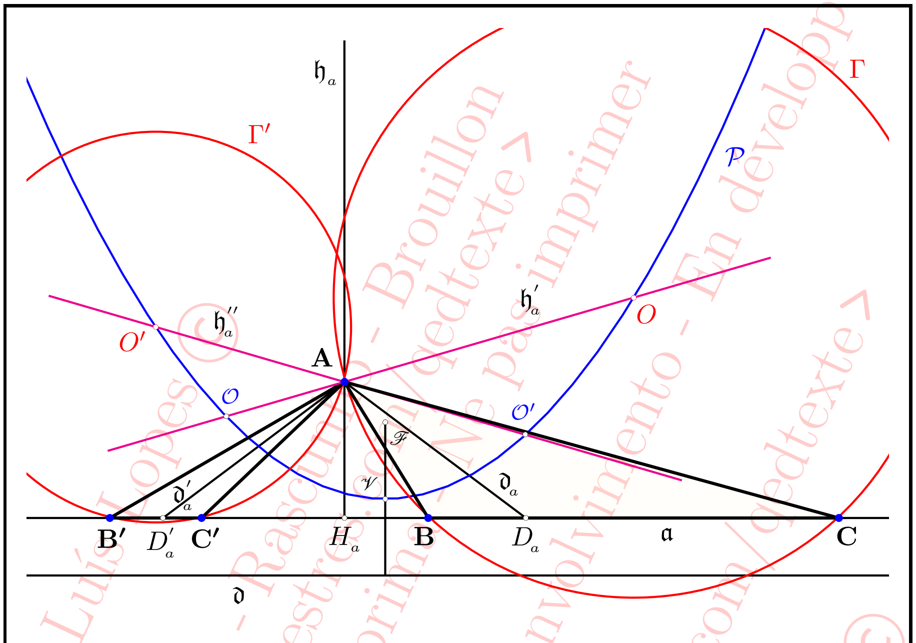



**Figura 4.169:** Exercício 237 — Primeiro procedimento.

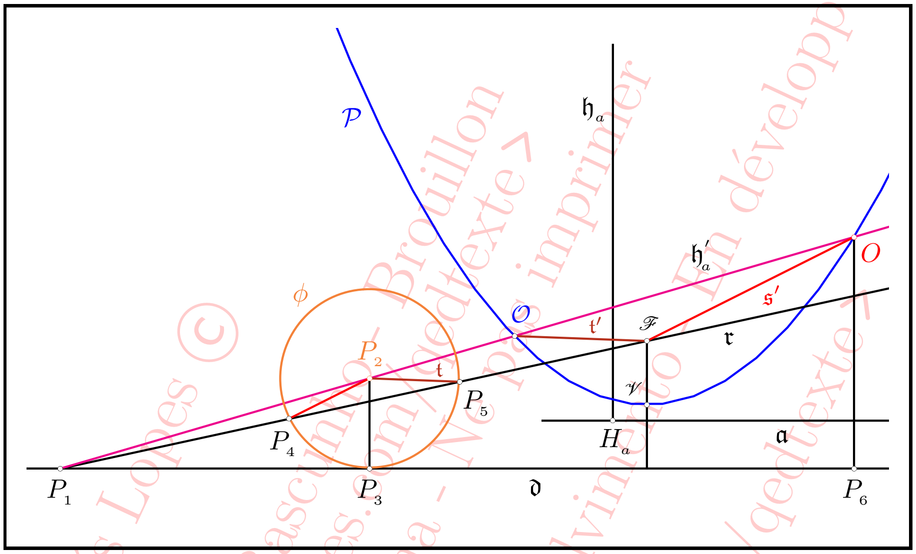
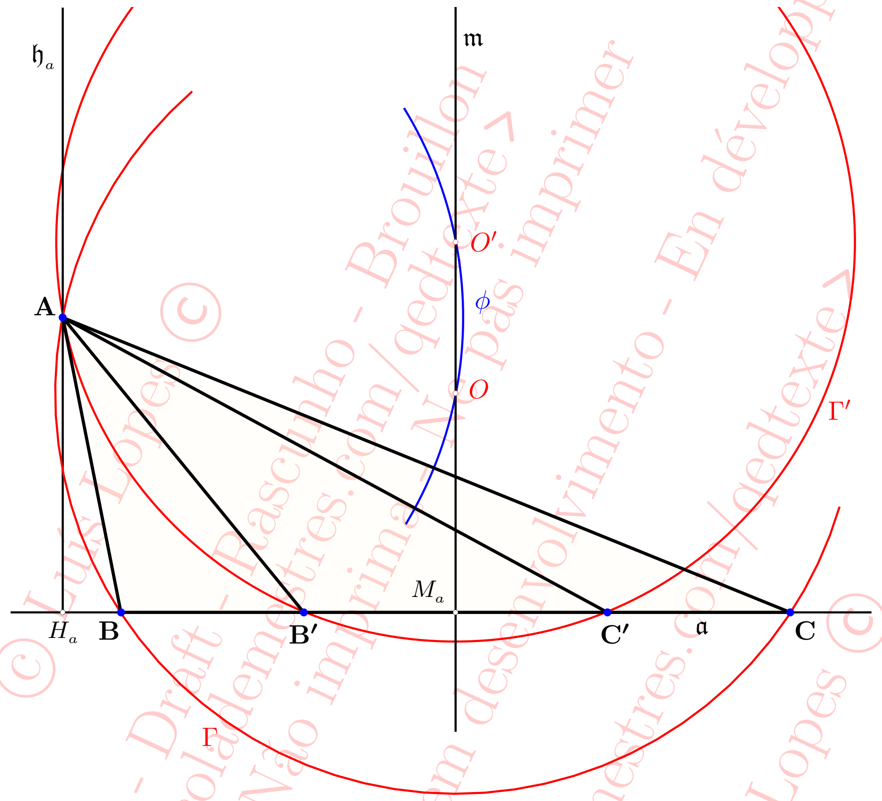



**Figura 4.170:** Interseção de uma parábola com uma reta.




Triângulo dados $<h_a, m_a, R>$

**Figura 4.171:** Exercício 245.

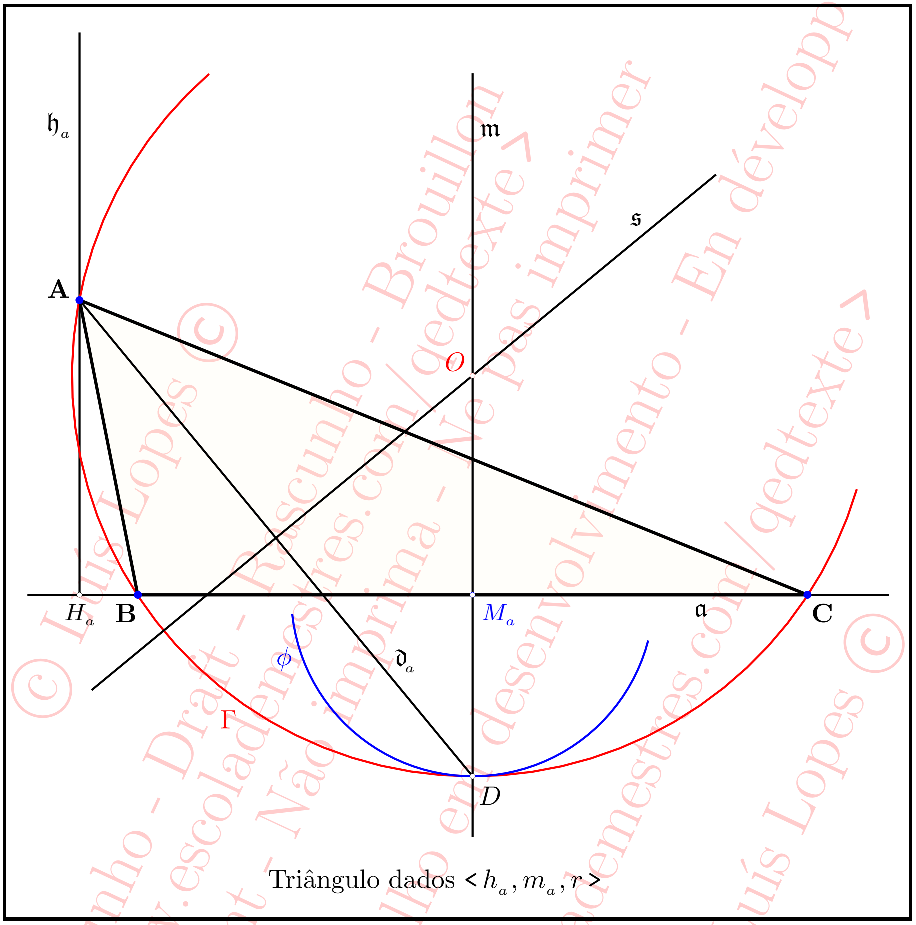
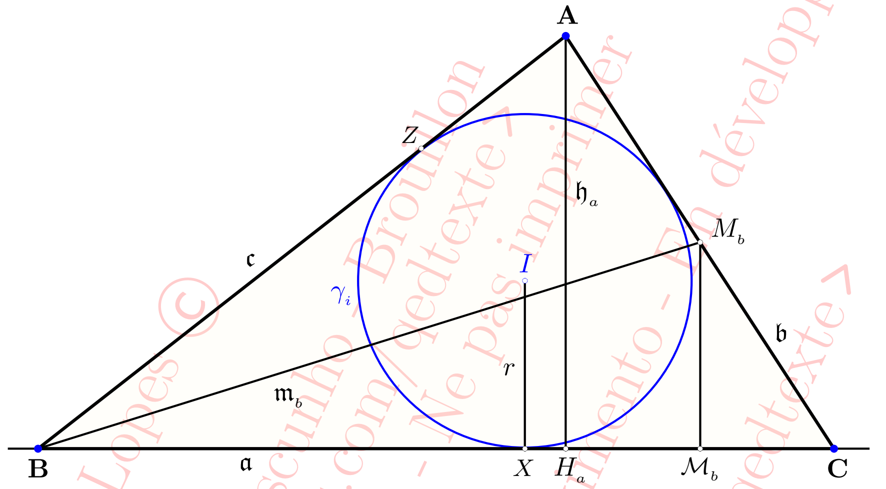



**Figura 4.172:** Exercício 247.




Triângulo dados $< h_a, m_b, r >$

**Figura 4.173:** Exercício 248.

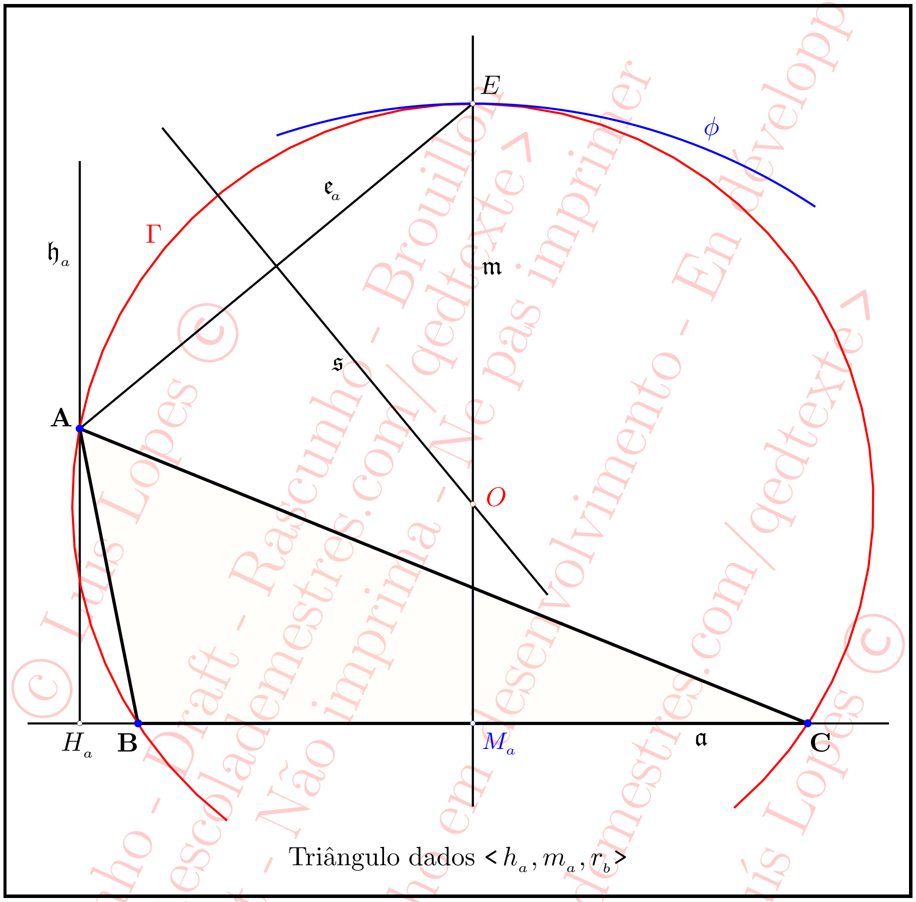



**Figura 4.174:** Exercício 250.