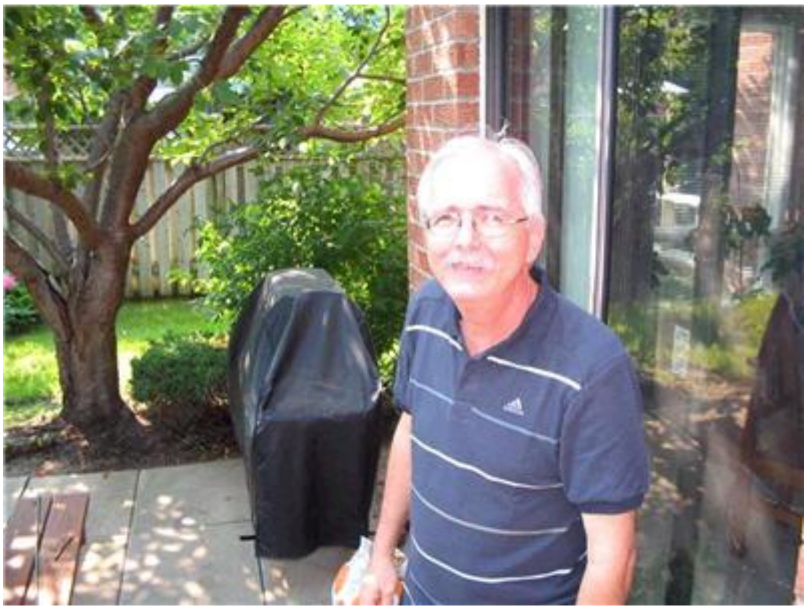


Manual de Construção de Triângulos

Todos os volumes disponibilizados ao público estão em

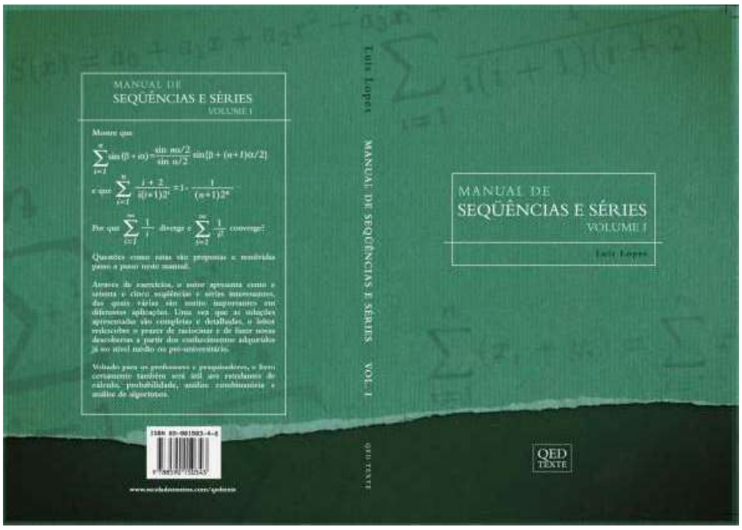
http://www.escolademestres.com/blogs/questoesresolvidas/matematica/306-construcoes-geometricas-de-triangulosversao-eletonica

Caso você goste do trabalho, há um link na mesma página para que você possa fazer uma contribuição para projeto através do Paypal.

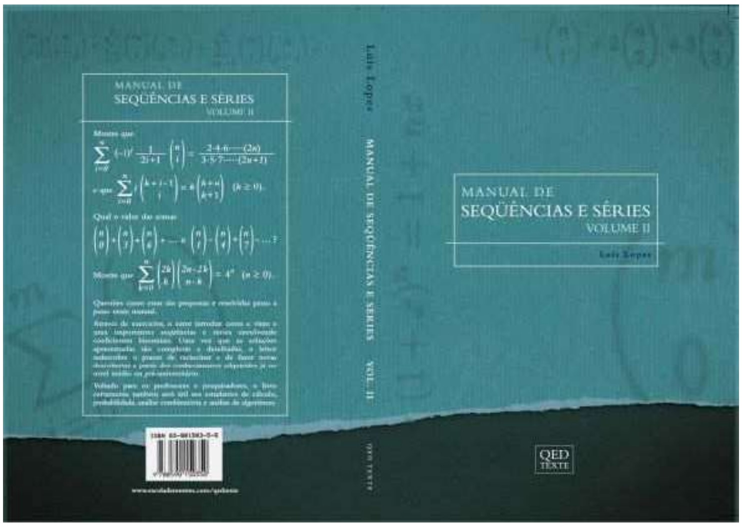
http://www.escolademestres.com/qedtexte

Tópicos abordados são os seguintes:

Seqüências e Séries -
Volume 1



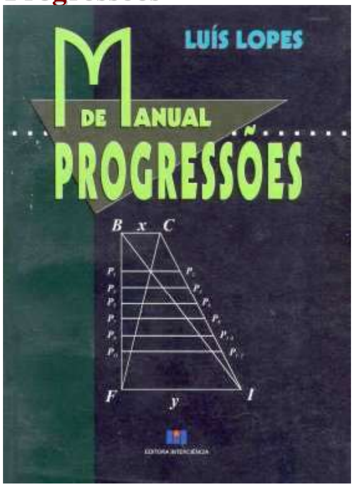
Volume 2



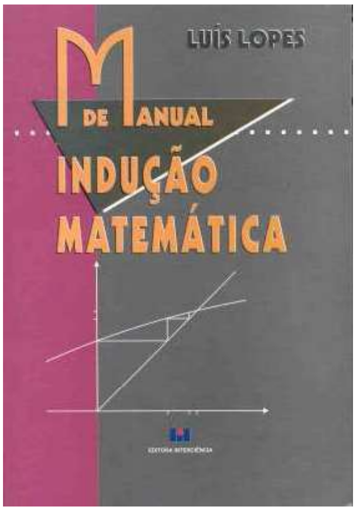
Coleção de Matemática do Prof Luís Lopes

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Progressões



Indução Matemática



This file was produced on September 10, 2015.
Montreal, CA and Rio de Janeiro, BR.
Work in progress.
Do not print. Spare the planet.
Contributions of all kinds are welcome.
Consider new constructions and insights,
algebraic developments and numerical solution,
discussion to existence and number of solutions,
references, etc.

Este arquivo foi criado em 10 de setembro de 2015. Montreal, CA e Rio de Janeiro, BR.
Trabalho em desenvolvimento.
Não imprima. Evite desperdícios.
Colaborações de qualquer natureza são solicitadas.

Conteúdo

Lista de Figuras

CAPÍTULO 3

EXERCÍCIOS

O enunciado de todos os exercícios começa por: construir um triângulo $\triangle$ **ABC** sendo dados ...

Exercício 1) ▲ $<\alpha,\ \beta,\ \gamma>$ `(alpha,beta,gamma)`.

Exercício 2) △ $<\alpha,\ \beta,\ a>$ `(alpha,beta,a)`.

Exercício 3) △ $<\alpha,\ \beta,\ c>$ `(alpha,beta,c)`.

Exercício 4) △ $<\alpha,\ \beta,\ h_a>$ `(alpha,beta,h_a)`.

Exercício 5) △ $<\alpha,\ \beta,\ h_c>$ `(alpha,beta,h_c)`.

Exercício 6) △ $<\alpha,\ \beta,\ m_a>$ `(alpha,beta,m_a)`.

Exercício 7) △ $<\alpha,\ \beta,\ m_c>$ `(alpha,beta,m_c)`.

Exercício 8) △ $<\alpha,\ \beta,\ d_a>$ `(alpha,beta,d_a)`.

Exercício 9) △ $<\alpha,\ \beta,\ d_c>$ `(alpha,beta,d_c)`.

Exercício 10) △ $<\alpha,\ \beta,\ e_a>$ `(alpha,beta,e_a)`.

Exercício 11) △ $<\alpha,\ \beta,\ e_c>$ `(alpha,beta,e_c)`.

Exercício 12) △ $<\alpha,\ \beta,\ R>$ `(alpha,beta,R)`.

Exercício 13) △ $<\alpha,\ \beta,\ r>$ `(alpha,beta,r)`.

Exercício 14) △ $<\alpha,\ \beta,\ r_a>$ `(alpha,beta,r_a)`.

Exercício 15) △ $<\alpha,\ \beta,\ r_c>$ `(alpha,beta,r_c)`.

Exercício 16) △ $<\alpha,\, a,\, b>$ `(alpha,a,b).`

Exercício 17) △ $<\alpha,\, b,\, c>$ `(alpha,b,c).`

Exercício 18) △ $<\alpha,\, a,\, h_a>$ `(alpha,a,h_a).`

Exercício 19) △ $<\alpha,\, a,\, h_b>$ `(alpha,a,h_b).`

Exercício 20) △ $<\alpha,\, b,\, h_a>$ `(alpha,b,h_a).`

Exercício 21) △ $<\alpha,\, b,\, h_b>$ `(alpha,b,h_b).`

Exercício 22) ▲ $<\alpha,\, b,\, h_c>$ `(alpha,b,h_c).`

Exercício 23) △ $<\alpha,\, a,\, m_a>$ `(alpha,a,m_a).`

Exercício 24) △ $<\alpha,\, a,\, m_b>$ `(alpha,a,m_b).`

Exercício 25) △ $<\alpha,\, b,\, m_a>$ `(alpha,b,m_a).`

Exercício 26) △ $<\alpha,\, b,\, m_b>$ `(alpha,b,m_b).`

Exercício 27) △ $<\alpha,\, b,\, m_c>$ `(alpha,b,m_c).`

Exercício 28) △ $<\alpha,\, a,\, d_a>$ `(alpha,a,d_a).`

Exercício 29) $<\alpha,\, a,\, d_b>$ `(alpha,a,d_b).`

Exercício 30) △ $<\alpha,\, b,\, d_a>$ `(alpha,b,d_a).`

Exercício 31) $<\alpha,\, b,\, d_b>$ `(alpha,b,d_b).`

Exercício 32) △ $<\alpha,\, b,\, d_c>$ `(alpha,b,d_c).`

Exercício 33) △ $<\alpha,\, a,\, e_a>$ `(alpha,a,e_a).`

Exercício 34) $<\alpha,\, a,\, e_b>$ `(alpha,a,e_b).`

Exercício 35) △ $<\alpha,\, b,\, e_a>$ `(alpha,b,e_a).`

Exercício 36) $<\alpha,\, b,\, e_b>$ `(alpha,b,e_b).`

Exercício 37) △ $<\alpha,\, b,\, e_c>$ `(alpha,b,e_c).`

Exercício 38) ▲ $<\alpha,\, a,\, R>$ `(alpha,a,R).`

Exercício 39) △ $<\alpha,\, b,\, R>$ `(alpha,b,R).`

Exercício 40) △ $<\alpha,\, a,\, r>$ `(alpha,a,r).`

Exercício 41) △ $<\alpha,\, b,\, r>$ `(alpha,b,r).`

Exercício 42) △ $<\alpha,\, a,\, r_a>$ `(alpha,a,r_a).`

Exercício 43) △ $<\alpha,\, a,\, r_b>$ `(alpha,a,r_b).`

Exercício 44) △ $<\alpha,\, b,\, r_a>$ `(alpha,b,r_a).`

Exercício 45) $\triangle$ $<\alpha, b, r_b>$ `(alpha,b,r_b).`

Exercício 46) $\triangle$ $<\alpha, b, r_c>$ `(alpha,b,r_c).`

Exercício 47) $\triangle$ $<\alpha, h_a, h_b>$ `(alpha,h_a,h_b).`

Exercício 48) $\triangle$ $<\alpha, h_b, h_c>$ `(alpha,h_b,h_c).`

Exercício 49) $\triangle$ $<\alpha, h_a, m_a>$ `(alpha,h_a,m_a).`

Exercício 50) $\triangle$ $<\alpha, h_a, m_b>$ `(alpha,h_a,m_b).`

Exercício 51) $\triangle$ $<\alpha, h_b, m_a>$ `(alpha,h_b,m_a).`

Exercício 52) $\triangle$ $<\alpha, h_b, m_b>$ `(alpha,h_b,m_b).`

Exercício 53) $\triangle$ $<\alpha, h_b, m_c>$ `(alpha,h_b,m_c).`

Exercício 54) $\triangle$ $<\alpha, h_a, d_a>$ `(alpha,h_a,d_a).`

Exercício 55) $<\alpha, h_a, d_b>$ `(alpha,h_a,d_b).`

Exercício 56) $\triangle$ $<\alpha, h_b, d_a>$ `(alpha,h_b,d_a).`

Exercício 57) $\triangle$ $<\alpha, h_b, d_b>$ `(alpha,h_b,d_b).`

Exercício 58) $<\alpha, h_b, d_c>$ `(alpha,h_b,d_c).`

Exercício 59) $\triangle$ $<\alpha, h_a, e_a>$ `(alpha,h_a,e_a).`

Exercício 60) $<\alpha, h_a, e_b>$ `(alpha,h_a,e_b).`

Exercício 61) $\triangle$ $<\alpha, h_b, e_a>$ `(alpha,h_b,e_a).`

Exercício 62) $\triangle$ $<\alpha, h_b, e_b>$ `(alpha,h_b,e_b).`

Exercício 63) $<\alpha, h_b, e_c>$ `(alpha,h_b,e_c).`

Exercício 64) $\triangle$ $<\alpha, h_a, R>$ `(alpha,h_a,R).`

Exercício 65) $\triangle$ $<\alpha, h_b, R>$ `(alpha,h_b,R).`

Exercício 66) $\triangle$ $<\alpha, h_a, r>$ `(alpha,h_a,r).`

Exercício 67) $\triangle$ $<\alpha, h_b, r>$ `(alpha,h_b,r).`

Exercício 68) $\triangle$ $<\alpha, h_a, r_a>$ `(alpha,h_a,r_a).`

Exercício 69) $\triangle$ $<\alpha, h_a, r_b>$ `(alpha,h_a,r_b).`

Exercício 70) $\triangle$ $<\alpha, h_b, r_a>$ `(alpha,h_b,r_a).`

Exercício 71) $\triangle$ $<\alpha, h_b, r_b>$ `(alpha,h_b,r_b).`

Exercício 72) $\triangle$ $<\alpha, h_b, r_c>$ `(alpha,h_b,r_c).`

Exercício 73) $\triangle$ $<\alpha, m_a, m_b>$ `(alpha,m_a,m_b).`

Exercício 74) $\triangle$ $<\alpha, m_b, m_c>$ `(alpha,m_b,m_c)`.

Exercício 75) $\triangle$ $<\alpha, m_a, d_a>$ `(alpha,m_a,d_a)`.

Exercício 76) $<\alpha, m_a, d_b>$ `(alpha,m_a,d_b)`.

Exercício 77) $<\alpha, m_b, d_a>$ `(alpha,m_b,d_a)`.

Exercício 78) $<\alpha, m_b, d_b>$ `(alpha,m_b,d_b)`.

Exercício 79) $<\alpha, m_b, d_c>$ `(alpha,m_b,d_c)`.

Exercício 80) $\triangle$ $<\alpha, m_a, e_a>$ `(alpha,m_a,e_a)`.

Exercício 81) $<\alpha, m_a, e_b>$ `(alpha,m_a,e_b)`.

Exercício 82) $<\alpha, m_b, e_a>$ `(alpha,m_b,e_a)`.

Exercício 83) $<\alpha, m_b, e_b>$ `(alpha,m_b,e_b)`.

Exercício 84) $<\alpha, m_b, e_c>$ `(alpha,m_b,e_c)`.

Exercício 85) $\triangle$ $<\alpha, m_a, R>$ `(alpha,m_a,R)`.

Exercício 86) $\triangle$ $<\alpha, m_b, R>$ `(alpha,m_b,R)`.

Exercício 87) $\triangle$ $<\alpha, m_a, r>$ `(alpha,m_a,r)`.

Exercício 88) $<\alpha, m_b, r>$ `(alpha,m_b,r)`.

Exercício 89) $\triangle$ $<\alpha, m_a, r_a>$ `(alpha,m_a,r_a)`.

Exercício 90) $\triangle$ $<\alpha, m_a, r_b>$ `(alpha,m_a,r_b)`.

Exercício 91) $<\alpha, m_b, r_a>$ `(alpha,m_b,r_a)`.

Exercício 92) $<\alpha, m_b, r_b>$ `(alpha,m_b,r_b)`.

Exercício 93) $<\alpha, m_b, r_c>$ `(alpha,m_b,r_c)`.

Exercício 94) $<\alpha, d_a, d_b>$ `(alpha,d_a,d_b)`.

Exercício 95) $<\alpha, d_b, d_c>$ `(alpha,d_b,d_c)`.

Exercício 96) $\triangle$ $<\alpha, d_a, e_a>$ `(alpha,d_a,e_a)`.

Exercício 97) $<\alpha, d_a, e_b>$ `(alpha,d_a,e_b)`.

Exercício 98) $<\alpha, d_b, e_a>$ `(alpha,d_b,e_a)`.

Exercício 99) $\triangle$ $<\alpha, d_b, e_b>$ `(alpha,d_b,e_b)`.

Exercício 100) $<\alpha, d_b, e_c>$ `(alpha,d_b,e_c)`.

Exercício 101) $\triangle$ $<\alpha, d_a, R>$ `(alpha,d_a,R)`.

Exercício 102) $<\alpha, d_b, R>$ `(alpha,d_b,R)`.

Exercício 103) $\triangle$ $<\alpha, d_a, r>$ `(alpha,d_a,r).`

Exercício 104) $\triangle$ $<\alpha, d_b, r>$ `(alpha,d_b,r).`

Exercício 105) $\triangle$ $<\alpha, d_a, r_a>$ `(alpha,d_a,r_a).`

Exercício 106) $\triangle$ $<\alpha, d_a, r_b>$ `(alpha,d_a,r_b).`

Exercício 107) $<\alpha, d_b, r_a>$ `(alpha,d_b,r_a).`

Exercício 108) $\triangle$ $<\alpha, d_b, r_b>$ `(alpha,d_b,r_b).`

Exercício 109) $<\alpha, d_b, r_c>$ `(alpha,d_b,r_c).`

Exercício 110) $<\alpha, e_a, e_b>$ `(alpha,e_a,e_b).`

Exercício 111) $<\alpha, e_b, e_c>$ `(alpha,e_b,e_c).`

Exercício 112) $\triangle$ $<\alpha, e_a, R>$ `(alpha,e_a,R).`

Exercício 113) $<\alpha, e_b, R>$ `(alpha,e_b,R).`

Exercício 114) $\triangle$ $<\alpha, e_a, r>$ `(alpha,e_a,r).`

Exercício 115) $<\alpha, e_b, r>$ `(alpha,e_b,r).`

Exercício 116) $\triangle$ $<\alpha, e_a, r_a>$ `(alpha,e_a,r_a).`

Exercício 117) $\triangle$ $<\alpha, e_a, r_b>$ `(alpha,e_a,r_b).`

Exercício 118) $\triangle$ $<\alpha, e_b, r_a>$ `(alpha,e_b,r_a).`

Exercício 119) $<\alpha, e_b, r_b>$ `(alpha,e_b,r_b).`

Exercício 120) $\triangle$ $<\alpha, e_b, r_c>$ `(alpha,e_b,r_c).`

Exercício 121) $\triangle$ $<\alpha, R, r>$ `(alpha,R,r).`

Exercício 122) $\triangle$ $<\alpha, R, r_a>$ `(alpha,R,r_a).`

Exercício 123) $\triangle$ $<\alpha, R, r_b>$ `(alpha,R,r_b).`

Exercício 124) $\triangle$ $<\alpha, r, r_a>$ `(alpha,r,r_a).`

Exercício 125) $\triangle$ $<\alpha, r, r_b>$ `(alpha,r,r_b).`

Exercício 126) $\triangle$ $<\alpha, r_a, r_b>$ `(alpha,r_a,r_b).`

Exercício 127) $\triangle$ $<\alpha, r_b, r_c>$ `(alpha,r_b,r_c).`

Exercício 128) $\triangle$ $<a, b, c>$ `(a,b,c).`

Exercício 129) $\triangle$ $<a, b, h_a>$ `(a,b,h_a).`

Exercício 130) $\triangle$ $<a, b, h_c>$ `(a,b,h_c).`

Exercício 131) $\triangle$ $<a, b, m_a>$ `(a,b,m_a).`

Exercício 132) $\triangle$ $<a,\ b,\ m_c>$ (a,b,m_c).

Exercício 133) $<a,\ b,\ d_a>$ (a,b,d_a).

Exercício 134) $\triangle$ $<a,\ b,\ d_c>$ (a,b,d_c).

Exercício 135) $<a,\ b,\ e_a>$ (a,b,e_a).

Exercício 136) $\triangle$ $<a,\ b,\ e_c>$ (a,b,e_c).

Exercício 137) $\triangle$ $<a,\ b,\ R>$ (a,b,R).

Exercício 138) $<a,\ b,\ r>$ (a,b,r).

Exercício 139) $<a,\ b,\ r_a>$ (a,b,r_a).

Exercício 140) $<a,\ b,\ r_c>$ (a,b,r_c).

Exercício 141) $\triangle$ $<a,\ h_a,\ h_b>$ (a,h_a,h_b).

Exercício 142) $\triangle$ $<a,\ h_b,\ h_c>$ (a,h_b,h_c).

Exercício 143) $\triangle$ $<a,\ h_a,\ m_a>$ (a,h_a,m_a).

Exercício 144) $\triangle$ $<a,\ h_a,\ m_b>$ (a,h_a,m_b).

Exercício 145) $\triangle$ $<a,\ h_b,\ m_a>$ (a,h_b,m_a).

Exercício 146) $\triangle$ $<a,\ h_b,\ m_b>$ (a,h_b,m_b).

Exercício 147) $\triangle$ $<a,\ h_b,\ m_c>$ (a,h_b,m_c).

Exercício 148) $\triangle$ $<a,\ h_a,\ d_a>$ (a,h_a,d_a).

Exercício 149) $<a,\ h_a,\ d_b>$ (a,h_a,d_b).

Exercício 150) $<a,\ h_b,\ d_a>$ (a,h_b,d_a).

Exercício 151) $\triangle$ $<a,\ h_b,\ d_b>$ (a,h_b,d_b).

Exercício 152) $\triangle$ $<a,\ h_b,\ d_c>$ (a,h_b,d_c).

Exercício 153) $\triangle$ $<a,\ h_a,\ e_a>$ (a,h_a,e_a).

Exercício 154) $<a,\ h_a,\ e_b>$ (a,h_a,e_b).

Exercício 155) $<a,\ h_b,\ e_a>$ (a,h_b,e_a).

Exercício 156) $\triangle$ $<a,\ h_b,\ e_b>$ (a,h_b,e_b).

Exercício 157) $\triangle$ $<a,\ h_b,\ e_c>$ (a,h_b,e_c).

Exercício 158) $\triangle$ $<a,\ h_a,\ R>$ (a,h_a,R).

Exercício 159) $\triangle$ $<a,\ h_b,\ R>$ (a,h_b,R).

Exercício 160) $\triangle$ $<a,\ h_a,\ r>$ (a,h_a,r).

Exercício 161) $\triangle$ $< a, h_b, r >$ `(a,h_b,r).`

Exercício 162) $\triangle$ $< a, h_a, r_a >$ `(a,h_a,r_a).`

Exercício 163) $\triangle$ $< a, h_a, r_b >$ `(a,h_a,r_b).`

Exercício 164) $\triangle$ $< a, h_b, r_a >$ `(a,h_b,r_a).`

Exercício 165) $\triangle$ $< a, h_b, r_b >$ `(a,h_b,r_b).`

Exercício 166) $\triangle$ $< a, h_b, r_c >$ `(a,h_b,r_c).`

Exercício 167) $\triangle$ $< a, m_a, m_b >$ `(a,m_a,m_b).`

Exercício 168) $\triangle$ $< a, m_b, m_c >$ `(a,m_b,m_c).`

Exercício 169) $\triangle$ $< a, m_a, d_a >$ `(a,m_a,d_a).`

Exercício 170) $< a, m_a, d_b >$ `(a,m_a,d_b).`

Exercício 171) $< a, m_b, d_a >$ `(a,m_b,d_a).`

Exercício 172) $< a, m_b, d_b >$ `(a,m_b,d_b).`

Exercício 173) $< a, m_b, d_c >$ `(a,m_b,d_c).`

Exercício 174) $\triangle$ $< a, m_a, e_a >$ `(a,m_a,e_a).`

Exercício 175) $< a, m_a, e_b >$ `(a,m_a,e_b).`

Exercício 176) $< a, m_b, e_a >$ `(a,m_b,e_a).`

Exercício 177) $< a, m_b, e_b >$ `(a,m_b,e_b).`

Exercício 178) $< a, m_b, e_c >$ `(a,m_b,e_c).`

Exercício 179) $\triangle$ $< a, m_a, R >$ `(a,m_a,R).`

Exercício 180) $\triangle$ $< a, m_b, R >$ `(a,m_b,R).`

Exercício 181) $< a, m_a, r >$ `(a,m_a,r).`

Exercício 182) $< a, m_b, r >$ `(a,m_b,r).`

Exercício 183) $< a, m_a, r_a >$ `(a,m_a,r_a).`

Exercício 184) $< a, m_a, r_b >$ `(a,m_a,r_b).`

Exercício 185) $< a, m_b, r_a >$ `(a,m_b,r_a).`

Exercício 186) $< a, m_b, r_b >$ `(a,m_b,r_b).`

Exercício 187) $< a, m_b, r_c >$ `(a,m_b,r_c).`

Exercício 188) $< a, d_a, d_b >$ `(a,d_a,d_b).`

Exercício 189) $< a, d_b, d_c >$ `(a,d_b,d_c).`

Exercício 190) △ $<a, d_a, e_a>$ `(a,d_a,e_a).`

Exercício 191) $<a, d_a, e_b>$ `(a,d_a,e_b).`

Exercício 192) $<a, d_b, e_a>$ `(a,d_b,e_a).`

Exercício 193) △ $<a, d_b, e_b>$ `(a,d_b,e_b).`

Exercício 194) $<a, d_b, e_c>$ `(a,d_b,e_c).`

Exercício 195) △ $<a, d_a, R>$ `(a,d_a,R).`

Exercício 196) $<a, d_b, R>$ `(a,d_b,R).`

Exercício 197) $<a, d_a, r>$ `(a,d_a,r).`

Exercício 198) $<a, d_b, r>$ `(a,d_b,r).`

Exercício 199) $<a, d_a, r_a>$ `(a,d_a,r_a).`

Exercício 200) $<a, d_a, r_b>$ `(a,d_a,r_b).`

Exercício 201) $<a, d_b, r_a>$ `(a,d_b,r_a).`

Exercício 202) $<a, d_b, r_b>$ `(a,d_b,r_b).`

Exercício 203) $<a, d_b, r_c>$ `(a,d_b,r_c).`

Exercício 204) $<a, e_a, e_b>$ `(a,e_a,e_b).`

Exercício 205) $<a, e_b, e_c>$ `(a,e_b,e_c).`

Exercício 206) △ $<a, e_a, R>$ `(a,e_a,R).`

Exercício 207) $<a, e_b, R>$ `(a,e_b,R).`

Exercício 208) $<a, e_a, r>$ `(a,e_a,r).`

Exercício 209) $<a, e_b, r>$ `(a,e_b,r).`

Exercício 210) $<a, e_a, r_a>$ `(a,e_a,r_a).`

Exercício 211) $<a, e_a, r_b>$ `(a,e_a,r_b).`

Exercício 212) $<a, e_b, r_a>$ `(a,e_b,r_a).`

Exercício 213) $<a, e_b, r_b>$ `(a,e_b,r_b).`

Exercício 214) $<a, e_b, r_c>$ `(a,e_b,r_c).`

Exercício 215) △ $<a, R, r>$ `(a,R,r).`

Exercício 216) △ $<a, R, r_a>$ `(a,R,r_a).`

Exercício 217) △ $<a, R, r_b>$ `(a,R,r_b).`

Exercício 218) △ $<a, r, r_a>$ `(a,r,r_a).`

Exercício 219) △ $< a, r, r_b >$ `(a,r,r_b).`

Exercício 220) △ $< a, r_a, r_b >$ `(a,r_a,r_b).`

Exercício 221) △ $< a, r_b, r_c >$ `(a,r_b,r_c).`

Exercício 222) △ $< h_a, h_b, h_c >$ `(h_a,h_b,h_c).`

Exercício 223) △ $< h_a, h_b, m_a >$ `(h_a,h_b,m_a).`

Exercício 224) △ $< h_a, h_b, m_c >$ `(h_a,h_b,m_c).`

Exercício 225) $< h_a, h_b, d_a >$ `(h_a,h_b,d_a).`

Exercício 226) △ $< h_a, h_b, d_c >$ `(h_a,h_b,d_c).`

Exercício 227) $< h_a, h_b, e_a >$ `(h_a,h_b,e_a).`

Exercício 228) △ $< h_a, h_b, e_c >$ `(h_a,h_b,e_c).`

Exercício 229) $< h_a, h_b, R >$ `(h_a,h_b,R).`

Exercício 230) △ $< h_a, h_b, r >$ `(h_a,h_b,r).`

Exercício 231) △ $< h_a, h_b, r_a >$ `(h_a,h_b,r_a).`

Exercício 232) △ $< h_a, h_b, r_c >$ `(h_a,h_b,r_c).`

Exercício 233) △ $< h_a, m_a, m_b >$ `(h_a,m_a,m_b).`

Exercício 234) △ $< h_a, m_b, m_c >$ `(h_a,m_b,m_c).`

Exercício 235) △ $< h_a, m_a, d_a >$ `(h_a,m_a,d_a).`

Exercício 236) $< h_a, m_a, d_b >$ `(h_a,m_a,d_b).`

Exercício 237) △ $< h_a, m_b, d_a >$ `(h_a,m_b,d_a).`

Exercício 238) $< h_a, m_b, d_b >$ `(h_a,m_b,d_b).`

Exercício 239) $< h_a, m_b, d_c >$ `(h_a,m_b,d_c).`

Exercício 240) △ $< h_a, m_a, e_a >$ `(h_a,m_a,e_a).`

Exercício 241) $< h_a, m_a, e_b >$ `(h_a,m_a,e_b).`

Exercício 242) △ $< h_a, m_b, e_a >$ `(h_a,m_b,e_a).`

Exercício 243) $< h_a, m_b, e_b >$ `(h_a,m_b,e_b).`

Exercício 244) $< h_a, m_b, e_c >$ `(h_a,m_b,e_c).`

Exercício 245) △ $< h_a, m_a, R >$ `(h_a,m_a,R).`

Exercício 246) $< h_a, m_b, R >$ `(h_a,m_b,R).`

Exercício 247) △ $< h_a, m_a, r >$ `(h_a,m_a,r).`

Exercício 248) △ $<h_a, m_b, r>$ `(h_a,m_b,r).`

Exercício 249) △ $<h_a, m_a, r_a>$ `(h_a,m_a,r_a).`

Exercício 250) △ $<h_a, m_a, r_b>$ `(h_a,m_a,r_b).`

Exercício 251) △ $<h_a, m_b, r_a>$ `(h_a,m_b,r_a).`

Exercício 252) △ $<h_a, m_b, r_b>$ `(h_a,m_b,r_b).`

Exercício 253) △ $<h_a, m_b, r_c>$ `(h_a,m_b,r_c).`

Exercício 254) $<h_a, d_a, d_b>$ `(h_a,d_a,d_b).`

Exercício 255) $<h_a, d_b, d_c>$ `(h_a,d_b,d_c).`

Exercício 256) ▲ $<h_a, d_a, e_a>$ `(h_a,d_a,e_a).`

Exercício 257) $<h_a, d_a, e_b>$ `(h_a,d_a,e_b).`

Exercício 258) $<h_a, d_b, e_a>$ `(h_a,d_b,e_a).`

Exercício 259) $<h_a, d_b, e_b>$ `(h_a,d_b,e_b).`

Exercício 260) $<h_a, d_b, e_c>$ `(h_a,d_b,e_c).`

Exercício 261) △ $<h_a, d_a, R>$ `(h_a,d_a,R).`

Exercício 262) $<h_a, d_b, R>$ `(h_a,d_b,R).`

Exercício 263) △ $<h_a, d_a, r>$ `(h_a,d_a,r).`

Exercício 264) $<h_a, d_b, r>$ `(h_a,d_b,r).`

Exercício 265) △ $<h_a, d_a, r_a>$ `(h_a,d_a,r_a).`

Exercício 266) △ $<h_a, d_a, r_b>$ `(h_a,d_a,r_b).`

Exercício 267) $<h_a, d_b, r_a>$ `(h_a,d_b,r_a).`

Exercício 268) $<h_a, d_b, r_b>$ `(h_a,d_b,r_b).`

Exercício 269) $<h_a, d_b, r_c>$ `(h_a,d_b,r_c).`

Exercício 270) $<h_a, e_a, e_b>$ `(h_a,e_a,e_b).`

Exercício 271) $<h_a, e_b, e_c>$ `(h_a,e_b,e_c).`

Exercício 272) △ $<h_a, e_a, R>$ `(h_a,e_a,R).`

Exercício 273) $<h_a, e_b, R>$ `(h_a,e_b,R).`

Exercício 274) △ $<h_a, e_a, r>$ `(h_a,e_a,r).`

Exercício 275) $<h_a, e_b, r>$ `(h_a,e_b,r).`

Exercício 276) △ $<h_a, e_a, r_a>$ `(h_a,e_a,r_a).`

Exercício 277) △ $<h_a, e_a, r_b>$ `(h_a,e_a,r_b).`

Exercício 278) $<h_a, e_b, r_a>$ `(h_a,e_b,r_a).`

Exercício 279) $<h_a, e_b, r_b>$ `(h_a,e_b,r_b).`

Exercício 280) $<h_a, e_b, r_c>$ `(h_a,e_b,r_c).`

Exercício 281) △ $<h_a, R, r>$ `(h_a,R,r).`

Exercício 282) △ $<h_a, R, r_a>$ `(h_a,R,r_a).`

Exercício 283) △ $<h_a, R, r_b>$ `(h_a,R,r_b).`

Exercício 284) ▲ $<h_a, r, r_a>$ `(h_a,r,r_a).`

Exercício 285) △ $<h_a, r, r_b>$ `(h_a,r,r_b).`

Exercício 286) △ $<h_a, r_a, r_b>$ `(h_a,r_a,r_b).`

Exercício 287) ▲ $<h_a, r_b, r_c>$ `(h_a,r_b,r_c).`

Exercício 288) △ $<m_a, m_b, m_c>$ `(m_a,m_b,m_c).`

Exercício 289) $<m_a, m_b, d_a>$ `(m_a,m_b,d_a).`

Exercício 290) $<m_a, m_b, d_c>$ `(m_a,m_b,d_c).`

Exercício 291) $<m_a, m_b, e_a>$ `(m_a,m_b,e_a).`

Exercício 292) $<m_a, m_b, e_c>$ `(m_a,m_b,e_c).`

Exercício 293) $<m_a, m_b, R>$ `(m_a,m_b,R).`

Exercício 294) $<m_a, m_b, r>$ `(m_a,m_b,r).`

Exercício 295) $<m_a, m_b, r_a>$ `(m_a,m_b,r_a).`

Exercício 296) $<m_a, m_b, r_c>$ `(m_a,m_b,r_c).`

Exercício 297) $<m_a, d_a, d_b>$ `(m_a,d_a,d_b).`

Exercício 298) $<m_a, d_b, d_c>$ `(m_a,d_b,d_c).`

Exercício 299) △ $<m_a, d_a, e_a>$ `(m_a,d_a,e_a).`

Exercício 300) $<m_a, d_a, e_b>$ `(m_a,d_a,e_b).`

Exercício 301) $<m_a, d_b, e_a>$ `(m_a,d_b,e_a).`

Exercício 302) △ $<m_a, d_b, e_b>$ `(m_a,d_b,e_b).`

Exercício 303) $<m_a, d_b, e_c>$ `(m_a,d_b,e_c).`

Exercício 304) △ $<m_a, d_a, R>$ `(m_a,d_a,R).`

Exercício 305) $<m_a, d_b, R>$ `(m_a,d_b,R).`

Exercício 306) $< m_a, d_a, r >$ `(m_a,d_a,r)`.

Exercício 307) $< m_a, d_b, r >$ `(m_a,d_b,r)`.

Exercício 308) $< m_a, d_a, r_a >$ `(m_a,d_a,r_a)`.

Exercício 309) $< m_a, d_a, r_b >$ `(m_a,d_a,r_b)`.

Exercício 310) $< m_a, d_b, r_a >$ `(m_a,d_b,r_a)`.

Exercício 311) $< m_a, d_b, r_b >$ `(m_a,d_b,r_b)`.

Exercício 312) $< m_a, d_b, r_c >$ `(m_a,d_b,r_c)`.

Exercício 313) $< m_a, e_a, e_b >$ `(m_a,e_a,e_b)`.

Exercício 314) $< m_a, e_b, e_c >$ `(m_a,e_b,e_c)`.

Exercício 315) $\triangle$ $< m_a, e_a, R >$ `(m_a,e_a,R)`.

Exercício 316) $< m_a, e_b, R >$ `(m_a,e_b,R)`.

Exercício 317) $< m_a, e_a, r >$ `(m_a,e_a,r)`.

Exercício 318) $< m_a, e_b, r >$ `(m_a,e_b,r)`.

Exercício 319) $< m_a, e_a, r_a >$ `(m_a,e_a,r_a)`.

Exercício 320) $< m_a, e_a, r_b >$ `(m_a,e_a,r_b)`.

Exercício 321) $< m_a, e_b, r_a >$ `(m_a,e_b,r_a)`.

Exercício 322) $< m_a, e_b, r_b >$ `(m_a,e_b,r_b)`.

Exercício 323) $< m_a, e_b, r_c >$ `(m_a,e_b,r_c)`.

Exercício 324) $< m_a, R, r >$ `(m_a,R,r)`.

Exercício 325) $< m_a, R, r_a >$ `(m_a,R,r_a)`.

Exercício 326) $< m_a, R, r_b >$ `(m_a,R,r_b)`.

Exercício 327) $\triangle$ $< m_a, r, r_a >$ `(m_a,r,r_a)`.

Exercício 328) $\triangle$ $< m_a, r, r_b >$ `(m_a,r,r_b)`.

Exercício 329) $\triangle$ $< m_a, r_a, r_b >$ `(m_a,r_a,r_b)`.

Exercício 330) $\triangle$ $< m_a, r_b, r_c >$ `(m_a,r_b,r_c)`.

Exercício 331) $< d_a, d_b, d_c >$ `(d_a,d_b,d_c)`.

Exercício 332) $< d_a, d_b, e_a >$ `(d_a,d_b,e_a)`.

Exercício 333) $< d_a, d_b, e_c >$ `(d_a,d_b,e_c)`.

Exercício 334) $< d_a, d_b, R >$ `(d_a,d_b,R)`.

Exercício 335) $<d_a, d_b, r>$ (d_a,d_b,r).

Exercício 336) $<d_a, d_b, r_a>$ (d_a,d_b,r_a).

Exercício 337) $<d_a, d_b, r_c>$ (d_a,d_b,r_c).

Exercício 338) $<d_a, e_a, e_b>$ (d_a,e_a,e_b).

Exercício 339) $<d_a, e_b, e_c>$ (d_a,e_b,e_c).

Exercício 340) $\triangle$ $<d_a, e_a, R>$ (d_a,e_a,R).

Exercício 341) $<d_a, e_b, R>$ (d_a,e_b,R).

Exercício 342) $\triangle$ $<d_a, e_a, r>$ (d_a,e_a,r).

Exercício 343) $<d_a, e_b, r>$ (d_a,e_b,r).

Exercício 344) $\triangle$ $<d_a, e_a, r_a>$ (d_a,e_a,r_a).

Exercício 345) $\triangle$ $<d_a, e_a, r_b>$ (d_a,e_a,r_b).

Exercício 346) $<d_a, e_b, r_a>$ (d_a,e_b,r_a).

Exercício 347) $<d_a, e_b, r_b>$ (d_a,e_b,r_b).

Exercício 348) $<d_a, e_b, r_c>$ (d_a,e_b,r_c).

Exercício 349) $<d_a, R, r>$ (d_a,R,r).

Exercício 350) $<d_a, R, r_a>$ (d_a,R,r_a).

Exercício 351) $<d_a, R, r_b>$ (d_a,R,r_b).

Exercício 352) $\triangle$ $<d_a, r, r_a>$ (d_a,r,r_a).

Exercício 353) $<d_a, r, r_b>$ (d_a,r,r_b).

Exercício 354) $<d_a, r_a, r_b>$ (d_a,r_a,r_b).

Exercício 355) $\triangle$ $<d_a, r_b, r_c>$ (d_a,r_b,r_c).

Exercício 356) $<e_a, e_b, e_c>$ (e_a,e_b,e_c).

Exercício 357) $<e_a, e_b, R>$ (e_a,e_b,R).

Exercício 358) $<e_a, e_b, r>$ (e_a,e_b,r).

Exercício 359) $<e_a, e_b, r_a>$ (e_a,e_b,r_a).

Exercício 360) $<e_a, e_b, r_c>$ (e_a,e_b,r_c).

Exercício 361) $<e_a, R, r>$ (e_a,R,r).

Exercício 362) $<e_a, R, r_a>$ (e_a,R,r_a).

Exercício 363) $<e_a, R, r_b>$ (e_a,R,r_b).

Exercício 364) △ $< e_a, r, r_a >$ `(e_a,r,r_a).`

Exercício 365) $< e_a, r, r_b >$ `(e_a,r,r_b).`

Exercício 366) $< e_a, r_a, r_b >$ `(e_a,r_a,r_b).`

Exercício 367) △ $< e_a, r_b, r_c >$ `(e_a,r_b,r_c).`

Exercício 368) △ $< R, r, r_a >$ `(R,r,r_a).`

Exercício 369) △ $< R, r_a, r_b >$ `(R,r_a,r_b).`

Exercício 370) △ $< r, r_a, r_b >$ `(r,r_a,r_b).`

Exercício 371) △ $< r_a, r_b, r_c >$ `(r_a,r_b,r_c).`

CAPÍTULO 4

CONSTRUÇÕES E SOLUÇÕES ALGÉBRICAS

Exercício 251) $<h_a, m_b, r_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<h_a, r_a, r>$ formam um datum, conhecemos $<h_a, m_b, r>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 248).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 252) $<h_a, m_b, r_b>$

Método algébrico

Vamos mostrar que podemos construir o lado a. Para tal, considere a figura 4.171 (ver a página 49), onde $\mathcal{M}_b$ é a projeção do ponto M_b na reta $\mathfrak{a}$. O $\triangle \mathbf{B}M_b\mathcal{M}_b$ pode ser construído pois $\measuredangle \mathbf{B}\mathcal{M}_b M_b = 90°$, $M_b\mathcal{M}_b = \frac{h_a}{2}$ e $\mathbf{B}M_b = m_b$. Portanto, o comprimento

$$\mathbf{B}\mathcal{M}_b = \ell = \sqrt{m_b^2 - \frac{h_a^2}{4}} \tag{4.1}$$

é conhecido.

Considerando-se o $\triangle \mathbf{C}M_b\mathcal{M}_b$ tem-se

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{h_a}{2}\right)^2 + (a-\ell)^2 \tag{4.2}$$

Desenvolvendo e substituindo o valor de ℓ^2 dado por (4.1) em (4.2), resulta:

$$b^2 = 4a^2 - 8\ell a + 4m_b^2 \tag{4.3}$$

Por resultados deduzidos anteriormente, podemos também escrever as equações (4.4) e (4.5):

$$ah_a = (-b+a+c)r_b \tag{4.4}$$

$$4m_b^2 + b^2 = 2a^2 + 2c^2 \tag{4.5}$$

Substituindo o valor de $c = \frac{a(h_a - r_b) + br_b}{r_b}$ dado por (4.4) em (4.5), vem:

$$4m_b^2 + b^2 = 2a^2 + 2\frac{[a(h_a - r_b) + br_b]^2}{r_b^2} \tag{4.6}$$

Desenvolvendo o segundo membro de (4.6), substituindo o valor de b^2 dado por (4.3) e isolando b, obtém-se:

$$b = \frac{a(h_a^2 - 2h_a r_b + 4r_b^2) - 4\ell r_b^2}{2r_b(r_b - h_a)} \tag{4.7}$$

Finalmente, substituindo o valor de b dado por (4.7) em (4.3), desenvolvendo e simplificando, resulta:

$$a^2(4r_b - h_a)(h_a + 2r_b) - 24\ell r_b^2 a = 4r_b^2\left(\frac{h_a r_b^2}{2r_b - h_a} - 4m_b^2\right) \tag{4.8}$$

e o lado a pode ser construído! Assim, conhecemos $<a, h_a, m_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 144).

Para mostrar como construir a, vamos considerar 3 casos:

i) $4m_b^2 < \dfrac{h_a r_b^2}{2r_b - h_a}$

Ponha

$$u = \frac{24\ell r_b^2}{(4r_b - h_a)(h_a + 2r_b)}$$

$$v^2 = \frac{4r_b^2\left(\dfrac{h_a r_b^2}{2r_b - h_a} - 4m_b^2\right)}{(4r_b - h_a)(h_a + 2r_b)}$$

e resolva $a(a-u) = v^2$;

ii) $4m_b^2 = \dfrac{h_a r_b^2}{2r_b - h_a}$

A equação (4.8) torna-se

$$a = \frac{24\ell r_b^2}{(4r_b - h_a)(h_a + 2r_b)}$$

e a está determinado;

iii) $4m_b^2 > \dfrac{h_a r_b^2}{2r_b - h_a}$

Ponha

$$u = \frac{24\ell r_b^2}{(4r_b - h_a)(h_a + 2r_b)}$$

$$v^2 = \frac{4r_b^2\left(4m_b^2 - \dfrac{h_a r_b^2}{2r_b - h_a}\right)}{(4r_b - h_a)(h_a + 2r_b)}$$

e resolva $a(u - a) = v^2$.

Mostremos como construir os comprimentos do caso iii), deixando a construção dos comprimentos dos outros casos para o leitor.

A construção de ℓ é elementar: é um dos catetos do triângulo retângulo de hipotenusa m_b e outro cateto $\frac{h_a}{2}$. Para construir, u faça

$$\ell_1 = \frac{2\ell \cdot 3r_b}{h_a + 2r_b}$$

$$u = \frac{\ell_1 \cdot 4r_b}{4r_b - h_a}$$

E para construir v, faça

$$\ell_2 = \frac{h_a \cdot r_b}{2r_b - h_a}$$

$$\ell_3 = \sqrt{r_b \cdot \ell_2}$$

$$\ell_4 = \sqrt{(2m_b)^2 - \ell_3^2}$$

$$\ell_5 = \sqrt{(4r_b - h_a)(h_a + 2r_b)}$$

$$v = \frac{2r_b \cdot \ell_4}{\ell_5}$$

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Observação: esta resolução foi reproduzida de [1] (problema 172), onde podemos ver a seguinte análise de determinação:

$$m_b > \tfrac{1}{2} r_b \sqrt{\frac{h_a}{2r_b - h_a}} \quad \text{então uma solução}$$

$$h_a < r_b; \quad m_b = \tfrac{1}{2} r_b \sqrt{\frac{h_a}{2r_b - h_a}} \quad \text{então uma solução}$$

$$h_a < r_b; \quad \tfrac{1}{2} h_a \le m_b < \tfrac{1}{2} r_b \sqrt{\frac{h_a}{2r_b - h_a}} \quad \text{então uma solução}$$

Exercício 253) $< h_a, m_b, r_c >$

Método do problema já resolvido

Como $< h_a, r_c, r_b >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, m_b, r_b >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 252).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 254) $< h_a, d_a, d_b >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$c \sin\beta = h_a \implies (1 - \cos^2\beta)c^2 = h_a^2 \tag{4.9}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \implies \cos\beta = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} \tag{4.10}$$

$$bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.11}$$

$$ac - \frac{ab^2 c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.12}$$

Com as equações (4.9) e (4.10), obtemos

$$\left[1 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}\right)^2\right] c^2 = h_a^2 \tag{4.13}$$

Como $< h_a, d_a, d_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.11)–(4.13) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 255) $<h_a, d_b, d_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left[1-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}\right)^2\right]c^2 = h_a^2 \tag{4.14}$$

$$\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right]ac = d_b^2 \tag{4.15}$$

$$\left[1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]ab = d_c^2 \tag{4.16}$$

Como $<h_a, d_b, d_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.14)–(4.16) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 256) $<h_a, d_a, e_a>$

Datum

Como $<h_a, d_a, e_a>$ formam um datum (ver o exercício 59), o problema é impossível ou indeterminado.

Exercício 257) $<h_a, d_a, e_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$c\sin\beta = h_a \tag{4.17}$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.18}$$

$$\frac{2ac\sin\frac{\beta}{2}}{|a-c|} = e_b \tag{4.19}$$

$$a^2+c^2-2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.20}$$

$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta \tag{4.21}$$

$$\sin\tfrac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} \tag{4.22}$$

Com a equação (4.18), obtemos

$$a = \sqrt{\frac{(bc-d_a^2)(b+c)^2}{bc}} \tag{4.23}$$

Com as equações (4.19) e (4.22), obtemos

$$\cos\beta = \frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{2(ac)^2} \tag{4.24}$$

Com as equações (4.17), (4.21) e (4.24), obtemos

$$\left[1 - \left(\frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{2(ac)^2}\right)^2\right]c^2 = h_a^2 \tag{4.25}$$

Com as equações (4.20) e (4.24), obtemos

$$a^2 - b^2 + c^2 - \frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{ac} = 0 \tag{4.26}$$

Como $< h_a, d_a, e_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.23) e (4.25)–(4.26) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 258) $< h_a, d_b, e_a >$

Método do problema já resolvido

Como $< h_a, e_a, d_a >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, d_a, d_b >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 254).

Exercício 259) $< h_a, d_b, e_b >$

Método do problema já resolvido

Como $< d_b, e_b, h_b >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, h_b, d_b >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 225).

Exercício 260) $< h_a, d_b, e_c >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$b\sin\gamma = h_a \tag{4.27}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.28}$$

$$\frac{2ab\sin\frac{\gamma}{2}}{|a-b|} = e_c \tag{4.29}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2 \tag{4.30}$$

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma \tag{4.31}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}} \tag{4.32}$$

Com as equações (4.29) e (4.32), obtemos

$$\cos\gamma = \frac{2(ab)^2 - [(a-b)e_c]^2}{2(ab)^2} \tag{4.33}$$

Com as equações (4.27), (4.31) e (4.33), obtemos

$$\left[1 - \left(\frac{2(ab)^2 - [(a-b)e_c]^2}{2(ab)^2}\right)^2\right] b^2 = h_a^2 \tag{4.34}$$

Com as equações (4.30) e (4.33), obtemos

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2(ab)^2 - [(a-b)e_c]^2}{ab}} \tag{4.35}$$

Como $< h_a, d_b, e_c >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.28) e (4.34)–(4.35) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 261) $< h_a, d_a, R >$

Método da interseção de dois lugares geométricos

O problema estará resolvido se pudermos construir o ponto O e o $\triangle H_a \mathbf{A} D_a$. Com auxílio do teorema 2.14 em [2] e a figura 4.172 (ver a página 50), constatamos que o ponto O possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto $\mathbf{A}$ vale R;

ii) pertence à reta $\mathfrak{h}_a'$, reflexão da reta $\mathfrak{h}_a = (\mathbf{A}, H_a)$ em torno da reta $\mathfrak{d}_a = (\mathbf{A}, D_a)$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.172, na página 50):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto H_a e construir o $\triangle H_a \mathbf{A} D_a$, obtendo as retas $\mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{d}_a$;

ii) construir a reta $\mathfrak{h}_a'$, reflexão da reta $\mathfrak{h}_a$ em torno da reta $\mathfrak{d}_a$;

iii) traçar o arco $\phi = (\mathbf{A}, R)$ e obter o ponto O ($O = \mathfrak{h}_a' \cap \phi$);

iv) traçar o círculo $\Gamma = (O, O\mathbf{A})$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 262) $< h_a, d_b, R >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left(S = \frac{ah_a}{2} = \frac{abc}{4R}\right) \quad bc = 2Rh_a \tag{4.36}$$

$$c \sin\beta = h_a \tag{4.37}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.38}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.39}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta \tag{4.40}$$

Com a equação (4.36), obtemos

$$b = \frac{2Rh_a}{c} \tag{4.41}$$

Com as equações (4.38) e (4.41), obtemos

$$c(ac - d_b^2)(a+c)^2 - (2Rh_a)^2 a = 0 \tag{4.42}$$

Com as equações (4.39) e (4.41), obtemos

$$\cos\beta = \frac{c^4 + (ac)^2 - (2Rh_a)^2}{2ac^3} \tag{4.43}$$

Com as equações (4.37), (4.40) e (4.43), obtemos

$$\left[1 - \left(\frac{c^4 + (ac)^2 - (2Rh_a)^2}{2ac^3}\right)^2\right]c^2 = h_a^2 \tag{4.44}$$

Como $< h_a, d_b, R >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.42) e (4.44) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 263) $< h_a, d_a, r >$

Primeiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle H_a\mathbf{A}D_a$ e os pontos I, Y e Z. Uma análise da figura 4.173 (ver a página 51) nos mostrará que o ponto I possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale r;

ii) pertence à reta $\mathfrak{d}_a = (\mathbf{A}, D_a)$.

Quanto aos pontos Y e Z, eles possuem duas propriedades:

i) pertencem ao círculo inscrito γ_i;

ii) um observador colocado em Y ou Z enxerga o segmento $\overline{\mathbf{A}I}$ segundo um ângulo reto (Y e Z pertencem ao arco capaz—ϕ—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{A}I}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.173, na página 51):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto H_a e construir o $\triangle H_a\mathbf{A}D_a$, obtendo as retas $\mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{d}_a$;

ii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando r desta e obter o ponto I ($I = \mathfrak{d}_a \cap \mathfrak{a}'$);

iii) traçar o círculo inscrito $\gamma_i = (I, r)$;

iv) traçar o círculo ϕ de diâmetro $\overline{\mathbf{A}I}$ e obter os pontos Y e Z ($Y = \gamma_i \cap \phi$ e $Z = \gamma_i \cap \phi$);

v) traçar as retas $\mathfrak{b} = (\mathbf{A}, Y)$ e $\mathfrak{c} = (\mathbf{A}, Z)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle H_a\mathbf{A}D_a$ e os pontos I e I_a. Uma análise da figura 4.174 (ver a página 52) nos mostrará que o ponto I possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale r;

ii) pertence à bissetriz interna que parte do vértice $\mathbf{A}$ (reta $\mathfrak{d}_a$).

Quanto ao ponto I_a, ele possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale $r_a = \frac{rh_a}{h_a - 2r}$;

ii) pertence à reta $\mathfrak{d}_a$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.174, na página 52):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto H_a e construir o $\triangle H_a \mathbf{A} D_a$, obtendo as retas $\mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{d}_a$;

ii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando r desta e obter o ponto I ($I = \mathfrak{d}_a \cap \mathfrak{a}'$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}''$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando r_a desta e obter o ponto I_a ($I_a = \mathfrak{d}_a \cap \mathfrak{a}''$);

iv) traçar o círculo (ϕ) de diâmetro $\overline{II_a}$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \phi$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \phi$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 264) $< h_a, d_b, r >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.45}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.46}$$

$$c\sin\beta = h_a \tag{4.47}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta \tag{4.48}$$

Com as equações (4.45) e (4.46), obtemos

$$\cos\beta = \frac{[(a+c)d_b]^2 - 2(ac)^2}{2(ac)^2} \tag{4.49}$$

Com as equações (4.47), (4.48) e (4.49), obtemos

$$\left[1 - \left(\frac{[(a+c)d_b]^2 - 2(ac)^2}{2(ac)^2}\right)^2\right]c^2 = h_a^2 \tag{4.50}$$

Escrevemos agora o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{array}{r} 2Rh_a = bc \\ 2R\sin\alpha = a \end{array} \implies bc = \frac{ah_a}{\sin\alpha} \tag{4.51}$$

$$\tan\tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{2r}{b+c-a} \implies b + c = a + 2r\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \tag{4.52}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{4.53}$$

$$(b+c)^2 - 2bc(1+\cos\alpha) = a^2 \tag{4.54}$$

$$\tan\tfrac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{4.55}$$

Com as equações (4.51)–(4.52) e (4.54)–(4.55), obtemos

$$\cos\alpha = \frac{\big[(h_a - 2r)a\big]^2 - 4r^4}{\big[(h_a - 2r)a\big]^2 + 4r^4} \tag{4.56}$$

Com as equações (4.46), (4.51) e (4.53), obtemos

$$(ac - d_b^2)(a+c)^2 + ac^3 - a^3c = 2h_a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}a^2c \tag{4.57}$$

Como $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ e com as equações (4.56) e (4.57), obtemos

$$\big[(ac - d_b^2)(a+c)^2 + ac^3 - a^3c\big]^2 = \Big(\frac{h_a}{2r^2}\Big)^2\Big(\frac{\big[(h_a - 2r)a\big]^2 - 4r^4}{h_a - 2r}\Big)^2(ac)^2 \tag{4.58}$$

Como $<h_a, d_b, r>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.50) e (4.58) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a e c e em seguida b.

Exercício 265) $<h_a, d_a, r_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<h_a, r_a, r>$ formam um datum, conhecemos $<h_a, d_a, r>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 263).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 266) $<h_a, d_a, r_b>$

Primeiro procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle H_a\mathbf{A}D_a$ e os pontos I_b, Y_b e Z_b. Uma análise da figura 4.175 (ver a página 53) nos mostrará que o ponto I_b possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale r_b;

ii) pertence à bissetriz externa que parte do vértice $\mathbf{A}$ (reta $\mathfrak{e}_a$).

Quanto aos pontos Y_b e Z_b, eles possuem duas propriedades:

i) pertencem ao círculo exinscrito γ_b;

ii) um observador colocado em Y_b ou Z_b enxerga o segmento $\overline{\mathbf{A}I_b}$ segundo um ângulo reto (Y_b e Z_b pertencem ao arco capaz—ϕ—do ângulo reto sobre o segmento $\overline{\mathbf{A}I_b}$).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.175, na página 53):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto H_a e construir o $\triangle\, H_a\mathbf{A}D_a$, obtendo as retas $\mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{d}_a$;

ii) traçar a reta $\mathfrak{e}_a$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{e}_a$ e $\mathfrak{e}_a \perp \mathfrak{d}_a$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando r_b desta e obter o ponto I_b ($I_b = \mathfrak{e}_a \cap \mathfrak{a}'$);

iv) traçar o círculo exinscrito $\gamma_b = (I_b, r_b)$;

v) traçar o círculo ϕ de diâmetro $\overline{\mathbf{A}I_b}$ e obter os pontos Y_b e Z_b ($Y_b = \gamma_b \cap \phi$ e $Z_b = \gamma_b \cap \phi$);

vi) traçar as retas $\mathfrak{b} = (\mathbf{A}, Y_b)$ e $\mathfrak{c} = (\mathbf{A}, Z_b)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\, \mathbf{A}H_aD_a$ e os pontos I_b e I_c. Uma análise da figura 4.176 (ver a página 54) nos mostrará que o ponto I_b possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale r_b;

ii) pertence à bissetriz externa que parte do vértice $\mathbf{A}$ (reta $\mathfrak{e}_a$).

Quanto ao ponto I_c, ele possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale $r_c = \frac{h_a r_b}{2r_b - h_a}$;

ii) pertence à reta $\mathfrak{e}_a$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.176, na página 54):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto H_a e construir o $\triangle\, H_a\mathbf{A}D_a$, obtendo as retas $\mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{d}_a$;

ii) traçar a reta $\mathfrak{e}_a$ ($\mathbf{A} \in \mathfrak{e}_a$ e $\mathfrak{e}_a \perp \mathfrak{d}_a$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando r_b desta e obter o ponto I_b ($I_b = \mathfrak{e}_a \cap \mathfrak{a}'$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{a}''$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando r_c desta e obter o ponto I_c ($I_c = \mathfrak{e}_a \cap \mathfrak{a}''$);

v) traçar o círculo ϕ de diâmetro $\overline{I_b I_c}$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \phi$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \phi$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 267) $\lessdot h_a, d_b, r_a \gtrdot$

Método do problema já resolvido

Como $\lessdot h_a, r_a, r \gtrdot$ formam um datum, conhecemos $\lessdot h_a, d_b, r \gtrdot$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 264).

Exercício 268) $\lessdot h_a, d_b, r_b \gtrdot$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.59}$$

$$c\sin\beta = h_a \tag{4.60}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta \tag{4.61}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \implies b^2 = \frac{(ac - d_b^2)(a+c)^2}{ac} \tag{4.62}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \frac{2r_b}{a+b+c} \tag{4.63}$$

Com a equação (4.59), obtemos

$$\cos\beta = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} \tag{4.64}$$

Com as equações (4.60), (4.61) e (4.64), obtemos

$$\left[1 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}\right)^2\right]c^2 = h_a^2 \tag{4.65}$$

Com as equações (4.63) e (4.64), obtemos

$$\frac{b^2-(a-c)^2}{(a+c)^2-b^2}=\left(\frac{2r_b}{a+b+c}\right)^2 \tag{4.66}$$

Como $< h_a, d_b, r_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.62) e (4.65)–(4.66) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 269) $< h_a, d_b, r_c >$

Método do problema já resolvido

Como $< h_a, r_c, r_b >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, d_b, r_b >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 268).

Exercício 270) $< h_a, e_a, e_b >$

Método do problema já resolvido

Como $< h_a, e_a, d_a >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, d_a, e_b >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 257).

Exercício 271) $< h_a, e_b, e_c >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$c\sin\beta = h_a \tag{4.67}$$

$$\frac{2ac\sin\frac{\beta}{2}}{|a-c|}=e_b \tag{4.68}$$

$$\sin\tfrac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} \tag{4.69}$$

$$b\sin\gamma = h_a \tag{4.70}$$

$$\frac{2ab\sin\frac{\gamma}{2}}{|a-b|}=e_c \tag{4.71}$$

$$\sin\tfrac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}} \tag{4.72}$$

Com as equações (4.68) e (4.69), obtemos

$$\cos\beta=\frac{2(ac)^2-[(a-c)e_b]^2}{2(ac)^2} \tag{4.73}$$

Com as equações (4.71) e (4.72), obtemos

$$\cos\gamma = \frac{2(ab)^2 - [(a-b)e_c]^2}{2(ab)^2} \tag{4.74}$$

Com as equações (4.67) e (4.70), obtemos

$$\sin\beta = \frac{h_a}{c} \quad \text{e} \quad \sin\gamma = \frac{h_a}{b} \tag{4.75}$$

Como $\alpha = 180° - (\beta+\gamma) \implies \cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma$, obtemos, com (4.75),

$$\cos\alpha = \frac{h_a^2}{bc} - \cos\beta\cos\gamma \tag{4.76}$$

Escrevemos também

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{4.77}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.78}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2 \tag{4.79}$$

Como $<h_a, e_b, e_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.73)–(4.74) e (4.76)–(4.79) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 272) $\quad <h_a, e_a, R>$

Método do problema já resolvido

Como $<h_a, e_a, d_a>$ formam um datum, conhecemos $<h_a, d_a, R>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 261).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 273) $\quad <h_a, e_b, R>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left(S = \frac{ah_a}{2} = \frac{abc}{4R}\right) \quad bc = 2Rh_a \tag{4.80}$$

$$c\sin\beta = h_a \tag{4.81}$$

$$\frac{2ac\sin\frac{\beta}{2}}{|a-c|} = e_b \tag{4.82}$$

$$\sin\tfrac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} \tag{4.83}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.84}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta \tag{4.85}$$

Com a equação (4.80), obtemos

$$b = \frac{2Rh_a}{c} \tag{4.86}$$

Com as equações (4.82) e (4.83), obtemos

$$\cos\beta = \frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{2(ac)^2} \tag{4.87}$$

Com as equações (4.81), (4.85) e (4.87), obtemos

$$\left[1 - \left(\frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{2(ac)^2}\right)^2\right]c^2 = h_a^2 \tag{4.88}$$

Com as equações (4.84), (4.86) e (4.87), obtemos

$$a^2 + c^2 - \frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{ac} = \left(\frac{2Rh_a}{c}\right)^2 \tag{4.89}$$

Como $<h_a, e_b, R>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.88)–(4.89) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a e c e em seguida b.

Exercício 274) $<h_a, e_a, r>$

Método do problema já resolvido

Como $<h_a, e_a, d_a>$ formam um datum, conhecemos $<h_a, d_a, r>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 263).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 275) $<h_a, e_b, r>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$c\sin\beta = h_a \tag{4.90}$$

$$\frac{2ac\sin\frac{\beta}{2}}{|a-c|} = e_b \tag{4.91}$$

$$\sin\tfrac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} \tag{4.92}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta \tag{4.93}$$

Com as equações (4.91) e (4.92), obtemos

$$\cos\beta = \frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{2(ac)^2} \tag{4.94}$$

Com as equações (4.90), (4.93) e (4.94), obtemos

$$\Big[1 - \Big(\frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{2(ac)^2}\Big)^2\Big]c^2 = h_a^2 \tag{4.95}$$

Escrevemos agora o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.96}$$

$$\tan\tfrac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \frac{2r}{a+c-b} \implies b = a + c - 2r\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}} \tag{4.97}$$

Com as equações (4.94) e (4.96)–(4.97), obtemos

$$a^2 + c^2 - \frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{ac} = \Big(a + c - 2r\sqrt{\frac{(2ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{[(a-c)e_b]^2}}\Big)^2 \tag{4.98}$$

Como $< h_a, e_b, r >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.95) e (4.98) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a e c e em seguida b.

Exercício 276) $< h_a, e_a, r_a >$

Método do problema já resolvido

Como $< h_a, e_a, d_a >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, d_a, r_a >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 265).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 277) $< h_a, e_a, r_b >$

Método do problema já resolvido

Como $< h_a, e_a, d_a >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, d_a, r_b >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 266).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 278) $< h_a, e_b, r_a >$

Método do problema já resolvido

Como $< h_a, r_a, r >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, e_b, r >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 275).

Exercício 279) $< h_a, e_b, r_b >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$c \sin\beta = h_a \tag{4.99}$$

$$\frac{2ac \sin\frac{\beta}{2}}{|a-c|} = e_b \tag{4.100}$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} \tag{4.101}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \frac{2r_b}{a+b+c} \tag{4.102}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta \tag{4.103}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.104}$$

Com as equações (4.100) e (4.101), obtemos

$$\cos\beta = \frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{2(ac)^2} \tag{4.105}$$

Com as equações (4.99), (4.103) e (4.105), obtemos

$$\left[1 - \left(\frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{2(ac)^2}\right)^2\right] c^2 = h_a^2 \tag{4.106}$$

Com as equações (4.102) e (4.105), obtemos

$$\sqrt{\frac{[(a-c)e_b]^2}{(2ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}} = \frac{2r_b}{a+b+c} \tag{4.107}$$

Com as equações (4.104) e (4.105), obtemos

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{2(ac)^2 - [(a-c)e_b]^2}{ac} \tag{4.108}$$

Como $< h_a, e_b, r_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.106)–(4.108) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 280) $<h_a, e_b, r_c>$

Método do problema já resolvido

Como $<h_a, r_c, r_b>$ formam um datum, conhecemos $<h_a, e_b, r_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 279).

Exercício 281) $<h_a, R, r>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $<h_a, r, r_a>$ formam um datum, construímos r_a. Com o datum $<R, r_a - r, a>$, obtemos o lado a. Conhecemos assim $<a, h_a, R>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 158).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o círculo circunscrito Γ e os pontos D, O e M_a.

Uma análise da figura 4.177 (ver a página 55) nos mostrará que o ponto M_a possui duas propriedades:

i) pertence à reta $\mathfrak{m} = (O, D)$;

ii) sua distância ao ponto D vale $\ell = \frac{r_a - r}{2}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.177, na página 55):

i) numa reta $\mathfrak{m}$ qualquer colocar os pontos O e D tais que $OD = R$;

ii) traçar o arco $\phi = (D, \ell)$ e obter o ponto M_a ($M_a = \mathfrak{m} \cap \phi$);

iii) traçar o círculo circunscrito $\Gamma = (O, R)$ e construir a reta $\mathfrak{a}$ ($M_a \in \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{m}$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando h_a desta;

v) obter os pontos **A**, **B** e **C** ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \Gamma$, $\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$).

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle H_a \mathbf{A} I$ (figura auxiliar).

Uma análise da figura 4.178 (ver a página 56), nos mostrará que o ponto I possui duas propriedades:

i) sua distância à reta $\mathfrak{a}$ vale r;

ii) sua distância ℓ ao ponto $\mathbf{A}$ vale $\ell = \sqrt{2R(h_a - 2r)}$ (segundo o teorema 2.20 em [2]).

Daí a construção que segue (ver a figura 4.178, na página 56):

i) numa reta $\mathfrak{a}$ qualquer colocar o ponto H_a. Construir a reta $\mathfrak{h}_a$ ($H_a \in \mathfrak{h}_a$ e $\mathfrak{h}_a \perp \mathfrak{a}$) e traçar o arco $\phi_1 = (H_a, h_a)$, obtendo o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathfrak{h}_a \cap \phi_1$);

ii) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando r desta; construir o comprimento ℓ e traçar o arco $\phi_2 = (\mathbf{A}, \ell)$; obter o ponto I ($I = \mathfrak{a}' \cap \phi_2$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{d}_a = (\mathbf{A}, I)$; traçar o círculo inscrito $\gamma_i = (I, r)$;

iv) traçar o círculo ϕ_3 de diâmetro $\overline{\mathbf{A}I}$ e obter os pontos Y e Z ($Y = \gamma_i \cap \phi_3$ e $Z = \gamma_i \cap \phi_3$);

v) traçar as retas $\mathfrak{b} = (\mathbf{A}, Y)$ e $\mathfrak{c} = (\mathbf{A}, Z)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 282) $< h_a, R, r_a >$

Método do problema já resolvido

Como $< h_a, r_a, r >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, R, r >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 281).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 283) $<h_a, R, r_b>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $<h_a, r_b, r_c>$ formam um datum, construímos r_c. Com o datum $<R, r_b + r_c, a>$, obtemos o lado a. Conhecemos assim $<a, h_a, R>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 158).

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

O problema estará resolvido se pudermos construir o círculo circunscrito Γ e os pontos E, O e M_a.

Uma análise da figura 4.179 (ver a página 57)nos mostrará que o ponto M_a possui duas propriedades:

i) pertence à reta $\mathfrak{m} = (O, E)$;

ii) sua distância ao ponto E vale $\ell = \frac{r_b + r_c}{2}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.179, na página 57):

i) numa reta $\mathfrak{m}$ qualquer colocar os pontos O e E tais que $OE = R$;

ii) com o datum $<h_a, r_b, r_c>$, construir o raio r_c e, em seguida, o comprimento $\ell = \frac{r_b + r_c}{2}$; traçar o arco $\phi = (E, \ell)$ e obter o ponto M_a ($M_a = \mathfrak{m} \cap \phi$);

iii) traçar o círculo circunscrito $\Gamma = (O, R)$ e construir a reta $\mathfrak{a}$ ($M_a \in \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{m}$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando h_a desta;

v) obter os pontos **A**, **B** e **C** ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \Gamma$, $\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 284) $<h_a, r, r_a>$

Datum

Como $<h_a, r, r_a>$ formam um datum, o problema é impossível ou indeterminado.

Exercício 285) $<h_a, r, r_b>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Como $<r, r_b, h_b>$ formam um datum, conhecemos $<h_a, h_b, r>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 230).

Segundo procedimento – Método da interseção de dois lugares geométricos

Com o datum $<h_a, r, r_a>$, construímos r_a; com o datum $<h_a, r_b, r_c>$, construímos r_c.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.180, na página 58):

i) numa reta $\mathfrak{m}$ qualquer colocar o ponto M_a e construir a reta $\mathfrak{a}$ ($M_a \in \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{m}$). Traçar a reta $\mathfrak{a}'$ paralela à reta $\mathfrak{a}$ e distando h_a desta;

ii) construir os comprimentos $\ell_1 = \frac{r_a - r}{2}$ e $\ell_2 = \frac{r_b + r_c}{2}$;

iii) traçar os arcos $\phi_1 = (M_a, \ell_1)$ e $\phi_2 = (M_a, \ell_2)$ e obter os pontos D ($D = \mathfrak{m} \cap \phi_1$) e E ($E = \mathfrak{m} \cap \phi_2$);

iv) traçar o círculo Γ de diâmetro $\overline{DE}$ e obter os pontos **A**, **B** e **C** ($\mathbf{A} = \mathfrak{a}' \cap \Gamma$, $\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 286) $<h_a, r_a, r_b>$

Método do problema já resolvido

Como $<h_a, r_a, r>$ formam um datum, conhecemos $<h_a, r, r_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 285).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 287) $<h_a, r_b, r_c>$

Datum

Como $<h_a, r_b, r_c>$ formam um datum, o problema é impossível ou indeterminado.

Exercício 288) $<m_a, m_b, m_c>$

Primeiro procedimento – Método da figura auxiliar

Considere a figura 4.181 (ver a página 59). O problema estará resolvido se pudermos construir o ponto G e o $\triangle\,\mathbf{A}M_aM_c'$ (figura auxiliar), onde M_c' é o simétrico do ponto M_c em relação ao ponto M_b. Então $M_bM_c' = M_bM_c = \frac{a}{2}$ e o quadrilátero $\diamondsuit\,\mathbf{A}M_c'\mathbf{C}M_c$ é um paralelogramo pois suas diagonais se intersectam no seu ponto médio M_b. Portanto, $\mathbf{A}M_c' = \mathbf{C}M_c = m_c$.

Adicionalmente, o quadrilátero $\diamondsuit\,\mathbf{B}M_bM_c'M_a$ é um paralelogramo também porque os segmentos $\overline{\mathbf{B}M_a}$ e $\overline{M_bM_c'}$ são paralelos e $\mathbf{B}M_a = M_bM_c'$; portanto, $\mathbf{B}M_b = M_aM_c' = m_b$ e os comprimentos dos três lados do $\triangle\,\mathbf{A}M_aM_c'$ são conhecidos.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.181, na página 59, e o exercício 128:

i) construir o $\triangle\,\mathbf{A}M_aM_c'$, onde $\mathbf{A}M_a = m_a$, $\mathbf{A}M_c' = m_c$ e $M_aM_c' = m_b$. Denote por $\mathfrak{m}_a$ a reta $(\mathbf{A}, M_a)$ e por $\mathfrak{m}_b'$ a reta (M_a, M_c');

ii) traçar o arco $\phi_1 = (\mathbf{A}, \frac{2}{3}m_a)$ e obter o ponto G ($G = \mathfrak{m}_a \cap \phi_1$);

iii) traçar pelo ponto G a reta $\mathfrak{m}_b$ paralela à reta $\mathfrak{m}_b'$. Traçar o arco $\phi_2 = (G, \frac{2}{3}m_b)$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{m}_b \cap \phi_2$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, M_a)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ como simétrico do ponto $\mathbf{B}$ em relação ao ponto M_a.

Segundo procedimento – Método da figura auxiliar

Considere a figura 4.182 (ver a página 60). O problema estará resolvido se pudermos construir o quadrilátero $\diamondsuit\,\mathbf{B}G\mathbf{C}G'$ (figura auxiliar), onde G' é o simétrico do ponto G em relação ao ponto M_a.

Então o quadrilátero $\diamondsuit\,\mathbf{B}G\mathbf{C}G'$ é um paralelogramo pois suas diagonais se intersectam no seu ponto médio M_a. Portanto, os comprimentos dos seus lados são conhecidos.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.182, na página 60):

i) numa reta $\mathfrak{m}_b$ qualquer colocar os pontos $\mathbf{B}$, G e M_b tais que $\mathbf{B}G = \frac{2}{3}m_b$ e $GM_b = \frac{1}{3}m_b$;

ii) traçar os arcos $\phi_1 = (\mathbf{B}, \frac{2}{3}m_c)$ e $\phi_2 = (G, \frac{2}{3}m_a)$ e obter o ponto G' ($G' = \phi_1 \cap \phi_2$);

iii) traçar a reta $\mathfrak{m}_a = (G', G)$ e obter os pontos M_a e $\mathbf{A}$;

iv) traçar as retas $\mathfrak{b} = (\mathbf{A}, M_b)$ e $\mathfrak{a} = (\mathbf{B}, M_a)$ e obter o ponto $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Terceiro procedimento – Método da figura auxiliar

Uma análise da figura 3.1 em [2] nos mostrará que o problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{C}\mathrm{C}'\mathrm{A}'$ (figura auxiliar) e o ponto $\mathbf{B}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.183, na página 61):

i) colocar o ponto $\mathbf{C}$ numa reta $\mathfrak{m}_c$ qualquer e construir o triângulo $\triangle\,\mathbf{C}\mathrm{C}'\mathrm{A}'$ tal que $\mathbf{C}\mathrm{C}' = 2m_c$ e $\mathrm{C}' \in \mathfrak{m}_c$, $\mathbf{C}\mathrm{A}' = 2m_b$ e $\mathrm{C}'\mathrm{A}' = 2m_a$;

ii) construir os pontos médios dos segmentos $\overline{\mathrm{C}'\mathrm{A}'}$ e $\overline{\mathbf{C}\mathrm{A}'}$ (pontos B' e P, respectivamente);

iii) traçar as retas $\mathfrak{a} = (\mathbf{C}, \mathrm{B}')$ e $\mathfrak{b}' = (\mathrm{C}', P)$ e obter o ponto $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}'$);

iv) construir o ponto $\mathbf{A}$, simétrico de A' em relação a $\mathbf{B}$.

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 289) $< m_a, m_b, d_a >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.109}$$
$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{4.110}$$
$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.111}$$

Com as equações (4.109) e (4.110), obtemos

$$a^2 = \frac{4m_a^2 + 8m_b^2 - 6c^2}{3} \tag{4.112}$$

$$b^2 = \frac{8m_a^2 + 4m_b^2 - 6c^2}{3} \tag{4.113}$$

Com o sistema (4.111)–(4.113), obtemos

$$c^2(8m_a^2 + 4m_b^2 - 6c^2)\big[3c^2 + 4m_a^2 - 4m_b^2 - 6d_a^2\big]^2 =$$
$$= 3\big[12c^4 - (16m_a^2 + 8m_b^2 + 3d_a^2)c^2 + 4(2m_a^2 + m_b^2)d_a^2\big]^2 \tag{4.114}$$

Como $<m_a, m_b, d_a>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.114) com um programa qualquer para obter c.

Se a equação (4.114) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}$ cm, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $d_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}$ cm.

Com estes valores, a equação (4.114) torna-se

$$1458t^4 - 300465t^3 + 22006548t^2 - 658168128t + 6287855616 = 0 \tag{†}$$

onde $c = \sqrt{t}$.

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se (com seis algarismos decimais exatos):

$$t_1 = 64 \implies c_1 = 8\,\text{cm} \implies a_1 = 5\,\text{cm} \quad \text{e} \quad b_1 = 7\,\text{cm}$$

$$t_2 = 53{,}669307470669 \implies c_2 = 7{,}325933\,9\,\text{cm} \implies$$
$$a_2 = \sqrt{153 - 2t_2} = 6{,}757320\,8\,\text{cm} \quad \text{e} \quad b_2 = \sqrt{177 - 2t_2} = 8{,}346339\,6\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $<a_1, b_1, c_1>$ e $<a_2, b_2, c_2>$ satisfazem todas as condições do problema.

Exercício 290) $<m_a, m_b, d_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.115}$$

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 4m_b^2 \tag{4.116}$$

$$ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = d_c^2 \tag{4.117}$$

Com as equações (4.115) e (4.116), obtemos

$$a^2 = \frac{4m_a^2 + 8m_b^2 - 6c^2}{3} \tag{4.118}$$

$$b^2 = \frac{8m_a^2 + 4m_b^2 - 6c^2}{3} \tag{4.119}$$

Com o sistema (4.117)–(4.119), obtemos

$$\left[4d_c^2c^2 + 2a^2b^2 - 4(m_a^2 + m_b^2)d_c^2\right]^2 = a^2b^2\left[5c^2 + 2d_c^2 - 4(m_a^2 + m_b^2)\right]^2 \tag{4.120}$$

Como $< m_a, m_b, d_c >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.118)–(4.120) com um programa qualquer, obtendo assim o lado c e em seguida a e b.

Exercício 291) $<m_a, m_b, e_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{4.121}$$

$$2(a^2+c^2)-b^2=4m_b^2 \tag{4.122}$$

$$\frac{2bc\sin\frac{\alpha}{2}}{|b-c|}=e_a \implies \sin^2\tfrac{\alpha}{2}=\frac{[(b-c)e_a]^2}{4b^2c^2} \tag{4.123}$$

$$\sin\tfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{4.124}$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \tag{4.125}$$

Com as equações (4.121) e (4.122), obtemos

$$a^2=\frac{4m_a^2+8m_b^2-6c^2}{3} \tag{4.126}$$

$$b^2=\frac{8m_a^2+4m_b^2-6c^2}{3} \tag{4.127}$$

Com o sistema (4.123)–(4.125), obtemos

$$2bc+a^2-b^2-c^2=\frac{[(b-c)e_a]^2}{bc} \tag{4.128}$$

Como $<m_a, m_b, e_a>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.126)–(4.128) com um programa qualquer, obtendo assim o lado c e em seguida a e b.

Exercício 292) $<m_a, m_b, e_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$a^2=\frac{4m_a^2+8m_b^2-6c^2}{3} \tag{4.129}$$

$$b^2=\frac{8m_a^2+4m_b^2-6c^2}{3} \tag{4.130}$$

$$2ab+c^2-a^2-b^2=\frac{[(a-b)e_c]^2}{ab} \tag{4.131}$$

Como $<m_a, m_b, e_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.129)–(4.131) com um programa qualquer, obtendo assim o lado c e em seguida a e b.

Exercício 293) $<m_a, m_b, R>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2+c^2)-a^2 = 4m_a^2 \tag{4.132}$$

$$2(a^2+c^2)-b^2 = 4m_b^2 \tag{4.133}$$

$$b^2+c^2-2bc\cos\alpha = a^2 \implies \cos^2\alpha = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 \tag{4.134}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} \implies \cos^2\alpha = 1-\frac{a^2}{4R^2} \tag{4.135}$$

Com as equações (4.132) e (4.133), obtemos

$$b = \sqrt{\frac{3a^2+4(m_a^2-m_b^2)}{3}} \tag{4.136}$$

$$c = \sqrt{\frac{4(m_a^2+2m_b^2)-3a^2}{6}} \tag{4.137}$$

Com o sistema (4.134)–(4.137), obtemos

$$\begin{aligned} 18t^3 - 9(8m_b^2+9R^2)t^2 + 8[9R^2(m_a^2+4m_b^2) - 4(m_a^4+m_a^2m_b^2-2m_b^4)]t + \\ +16(8m_a^2m_b^2 - m_a^4 - 16m_b^4)R^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.138}$$

onde $a = \sqrt{t}$.

Como $<m_a, m_b, R>$ são conhecidos, podemos resolver a equação (4.138) com um programa qualquer para obter t e em seguida, a.

Se a equação (4.138) não possui raiz positiva, o problema é impossível (não existe triângulo que satisfaz as condições do problema).

Aplicação numérica: sejam $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}$ cm, $m_b = \frac{\sqrt{129}}{2}$ cm e $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm.

Com estes valores, a equação (4.138) torna-se

$$2t^3 - 405t^2 + 8039t - 180075 = 0 \tag{†}$$

Resolvendo (†) com algum programa, obtêm-se (com seis algarismos decimais exatos):

$$t_1 = 25 \implies a_1 = 5\,\text{cm} \implies b_1 = 7\,\text{cm} \quad \text{e} \quad c_1 = 8\,\text{cm}$$

$$t_2 = \frac{355-\sqrt{68401}}{4} \implies a_2 = 4{,}833842\,9\,\text{cm} \implies$$
$$b_2 = 6{,}882298\,9\,\text{cm} \quad \text{e} \quad c_2 = 8{,}050899\,4\,\text{cm}$$

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $<a_1, b_1, c_1>$ e $<a_2, b_2, c_2>$ satisfazem todas as condições do problema.

Exercício 294) $< m_a, m_b, r >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$b = \sqrt{\frac{3a^2 + 4(m_a^2 - m_b^2)}{3}} \tag{4.139}$$

$$c = \sqrt{\frac{4(m_a^2 + 2m_b^2) - 3a^2}{6}} \tag{4.140}$$

$$\tan\tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{2r}{b+c-a} \tag{4.141}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \tag{4.142}$$

Com o sistema (4.139)–(4.142), obtemos

$$4(4bc + 4m_a^2 - a^2)r^2 = (a^2 + 4bc - 4m_a^2)\left[b+c-a\right]^2 \tag{4.143}$$

Como $< m_a, m_b, r >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.139)–(4.140) e (4.143) com um programa qualquer, obtendo assim o lado a e em seguida, b e c.

Exercício 295) $< m_a, m_b, r_a >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$b = \sqrt{\frac{3a^2 + 4(m_a^2 - m_b^2)}{3}} \tag{4.144}$$

$$c = \sqrt{\frac{4(m_a^2 + 2m_b^2) - 3a^2}{6}} \tag{4.145}$$

$$\tan\tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{2r_a}{a+b+c} \tag{4.146}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \tag{4.147}$$

Com o sistema (4.144)–(4.147), obtemos

$$4(4bc + 4m_a^2 - a^2)r_a^2 = (a^2 + 4bc - 4m_a^2)\left[a+b+c\right]^2 \tag{4.148}$$

Como $< m_a, m_b, r_a >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.144)–(4.145) e (4.148) com um programa qualquer, obtendo assim o lado a e em seguida, b e c.

Exercício 296) $<m_a, m_b, r_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$b = \sqrt{\frac{3a^2 + 4(m_a^2 - m_b^2)}{3}} \tag{4.149}$$

$$c = \sqrt{\frac{4(m_a^2 + 2m_b^2) - 3a^2}{6}} \tag{4.150}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}} = \frac{2r_c}{a+b+c} \tag{4.151}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \tag{4.152}$$

Com o sistema (4.149)–(4.152), obtemos

$$4[(a+b)^2 - c^2]r_c^2 = [c^2 - (a-b)^2]\big[a+b+c\big]^2 \tag{4.153}$$

Como $<m_a, m_b, r_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.149)–(4.150) e (4.153) com um programa qualquer, obtendo assim o lado a e em seguida, b e c.

Exercício 297) $<m_a, d_a, d_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.154}$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.155}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.156}$$

Como $<m_a, d_a, d_b>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.154)–(4.156) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 298) $< m_a, d_b, d_c >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.157}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.158}$$

$$ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = d_c^2 \tag{4.159}$$

Como $< m_a, d_b, d_c >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.157)–(4.159) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 299) $< m_a, d_a, e_a >$

Método do problema já resolvido

Como $< d_a, e_a, h_a >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, m_a, d_a >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 235).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 300) $< m_a, d_a, e_b >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.160}$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.161}$$

$$\frac{2ac\sin\frac{\beta}{2}}{|a-c|} = e_b \implies \cos\beta = \frac{2a^2c^2 - [(a-c)e_b]^2}{2a^2c^2} \tag{4.162}$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \tag{4.163}$$

Com o sistema (4.162)–(4.163), obtemos

$$a^2 + c^2 - \frac{2a^2c^2 - [(a-c)e_b]^2}{ac} = b^2 \tag{4.164}$$

Como $< m_a, d_a, e_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.160)–(4.161) e (4.164) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] K. Herterich. *Die Konstruktion von Dreiecken.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1986.

[2] L. Lopes. *Manual de Construção de Triângulos*, volume 1. A ser publicado, Rio de Janeiro, 2015.

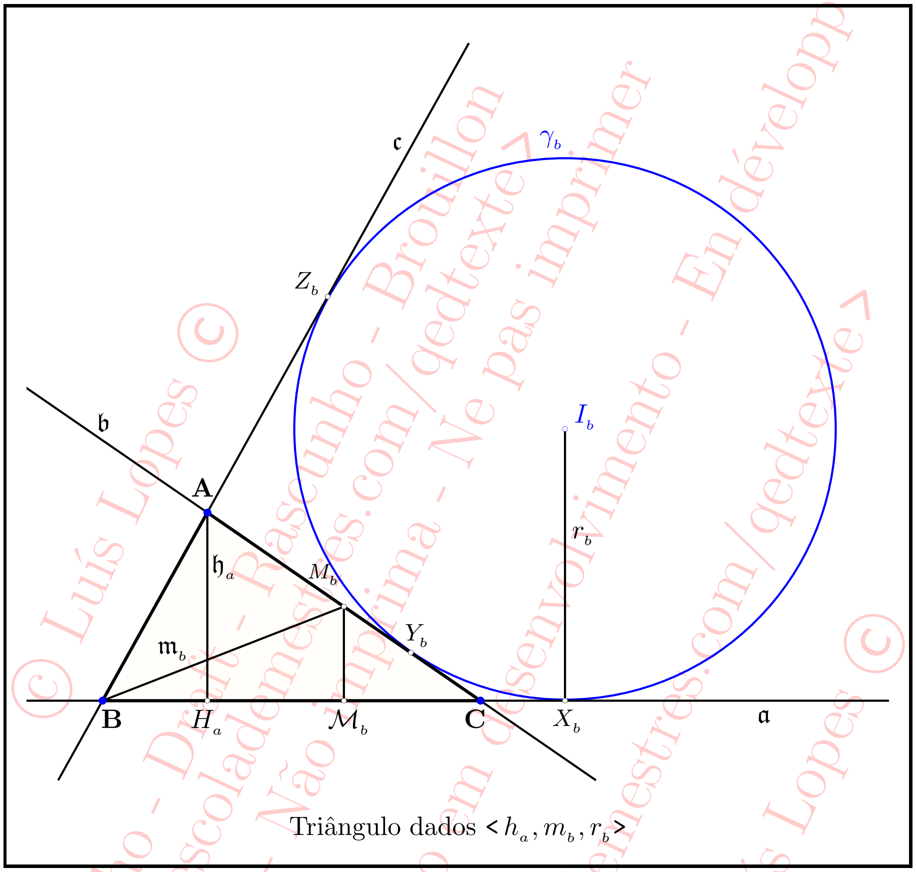
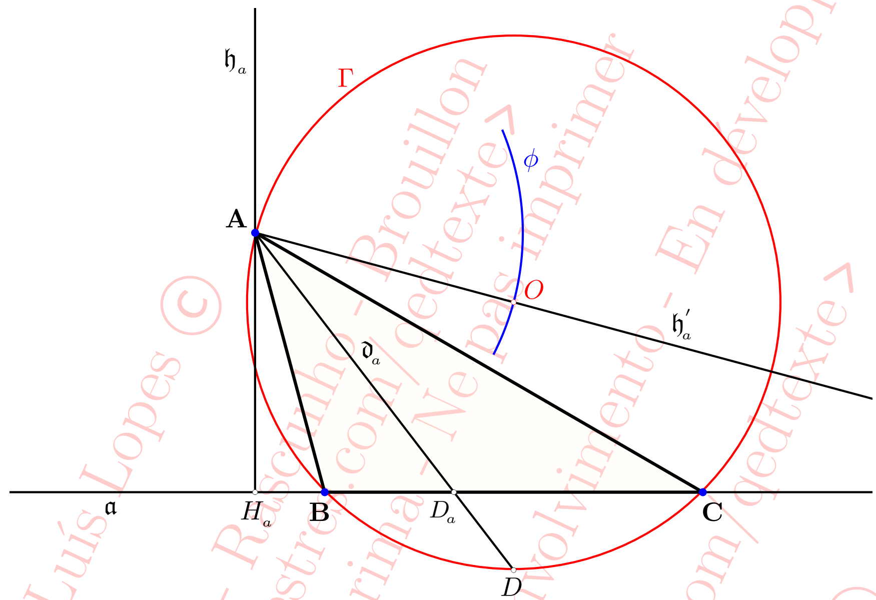


Figura 4.171: Exercício 252.



Triângulo dados $<h_a, d_a, R>$

Figura 4.172: Exercício 261.

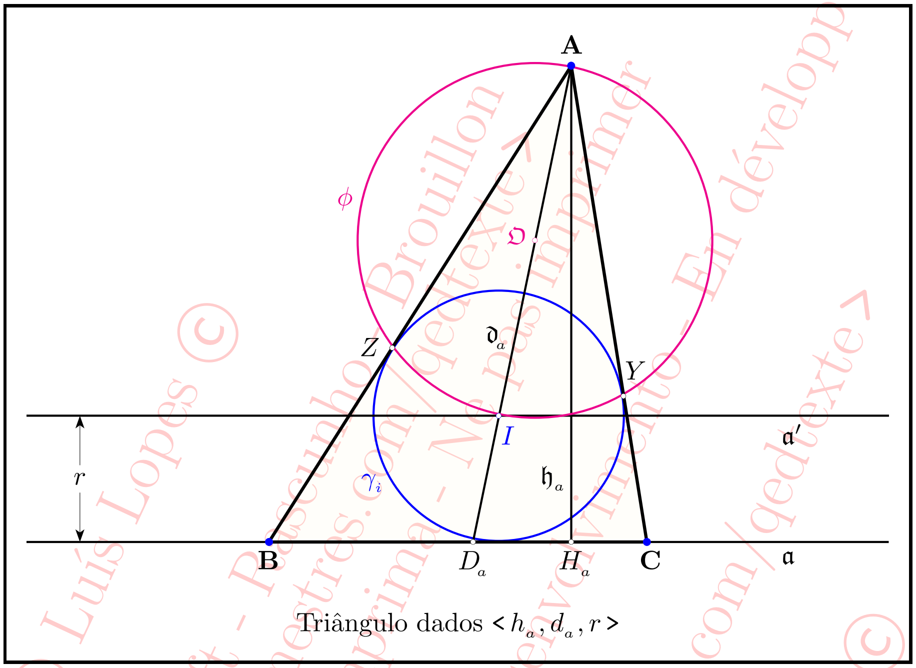
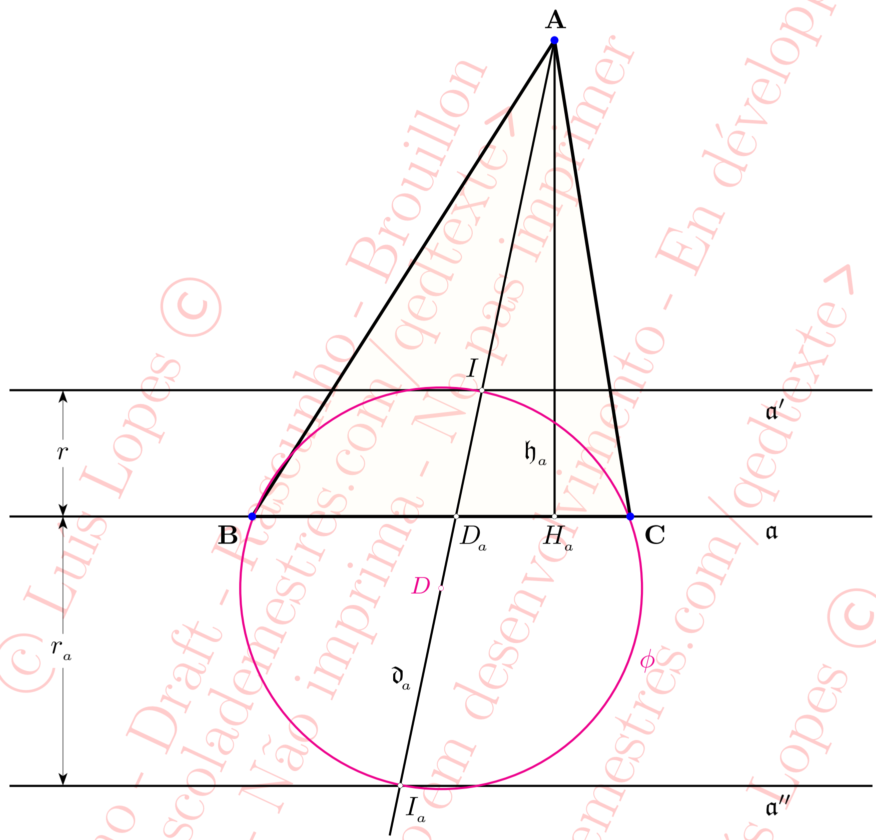
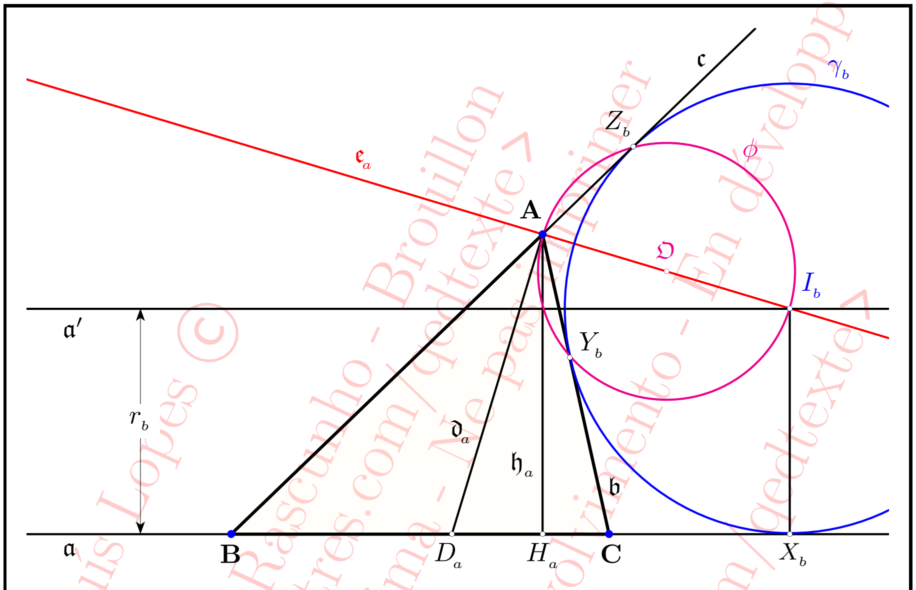


Figura 4.173: Exercício 263 — Primeiro procedimento.



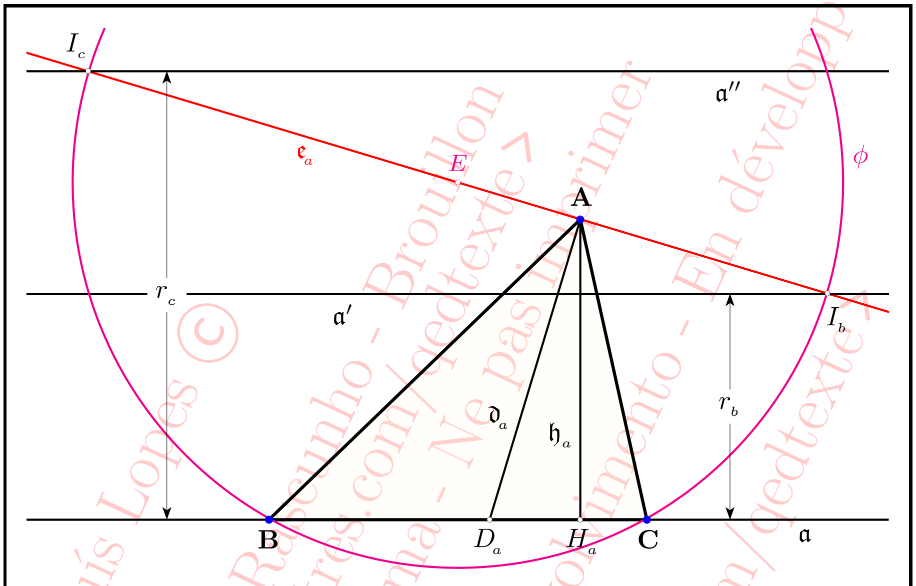
Triângulo dados $< h_a, d_a, r >$

Figura 4.174: Exercício 263 — Segundo procedimento.



Triângulo dados $< h_a, d_a, r_b >$

Figura 4.175: Exercício 266 — Primeiro procedimento.



Triângulo dados $\langle h_a, d_a, r_b \rangle$

Figura 4.176: Exercício 266 — Segundo procedimento.

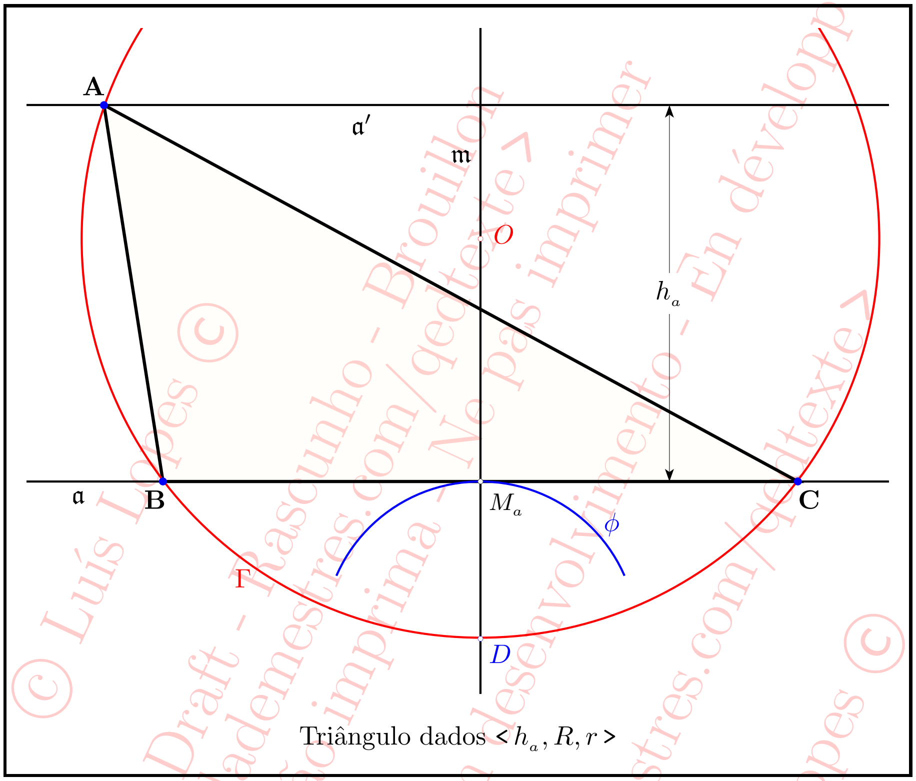


Figura 4.177: Exercício 281 — Segundo procedimento.

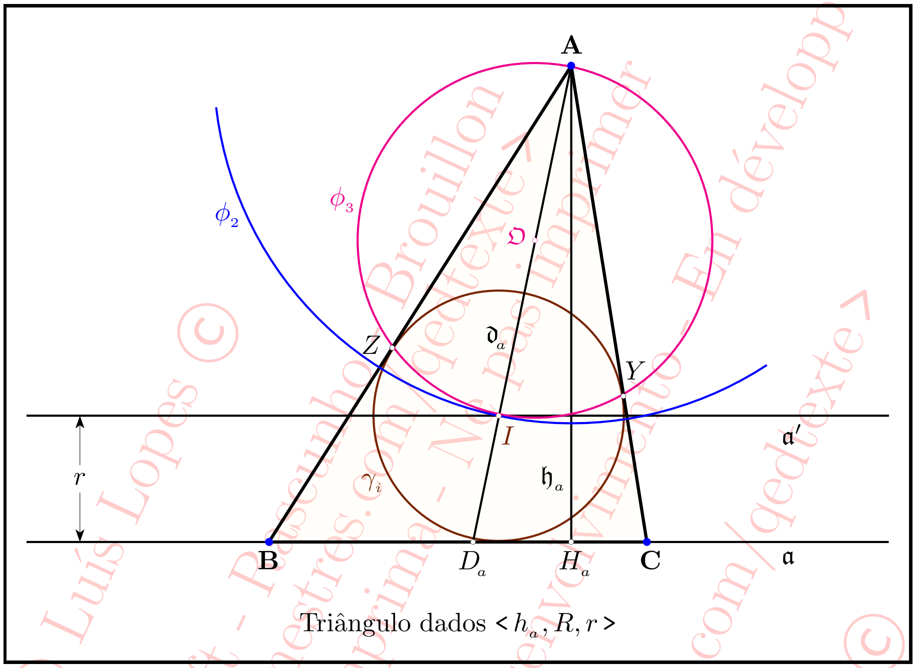


Figura 4.178: Exercício 281 — Terceiro procedimento.

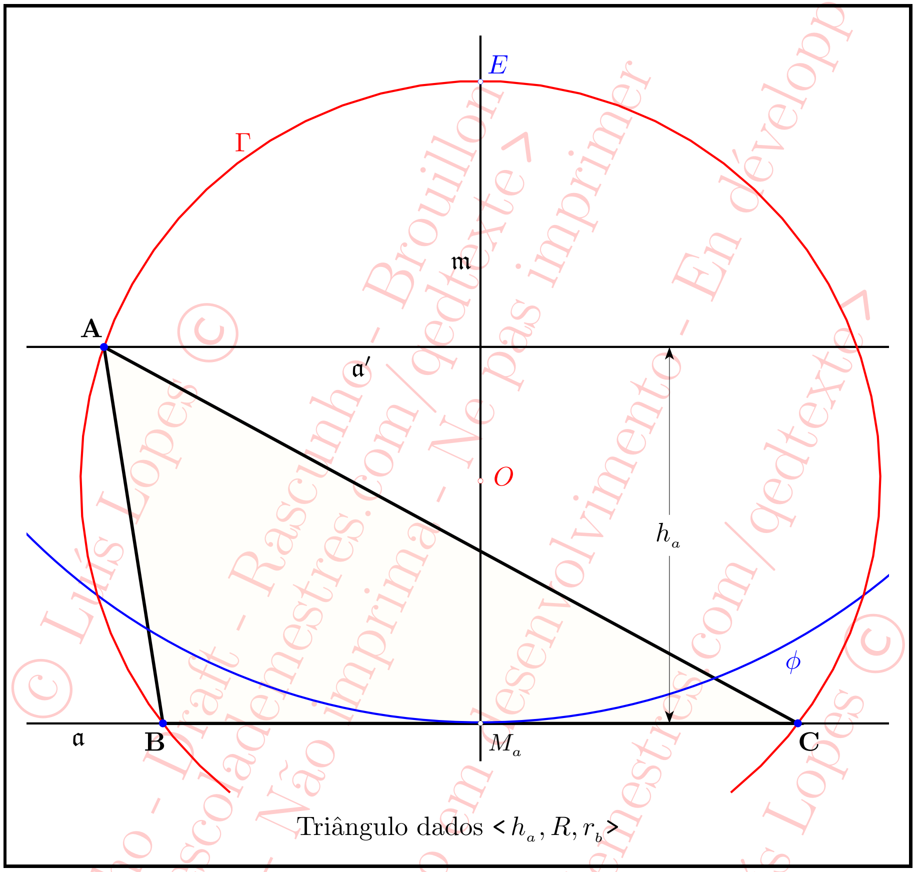
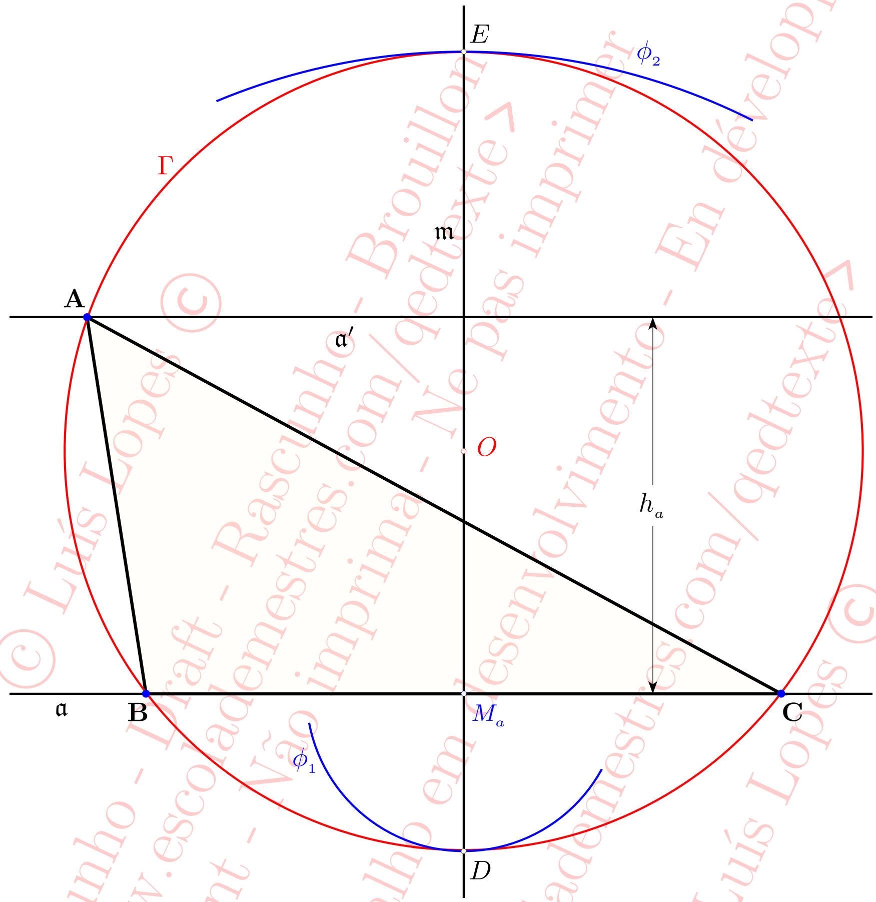


Figura 4.179: Exercício 283 — Segundo procedimento.



Triângulo dados $< h_a, r, r_b >$

Figura 4.180: Exercício 285 — Segundo procedimento.

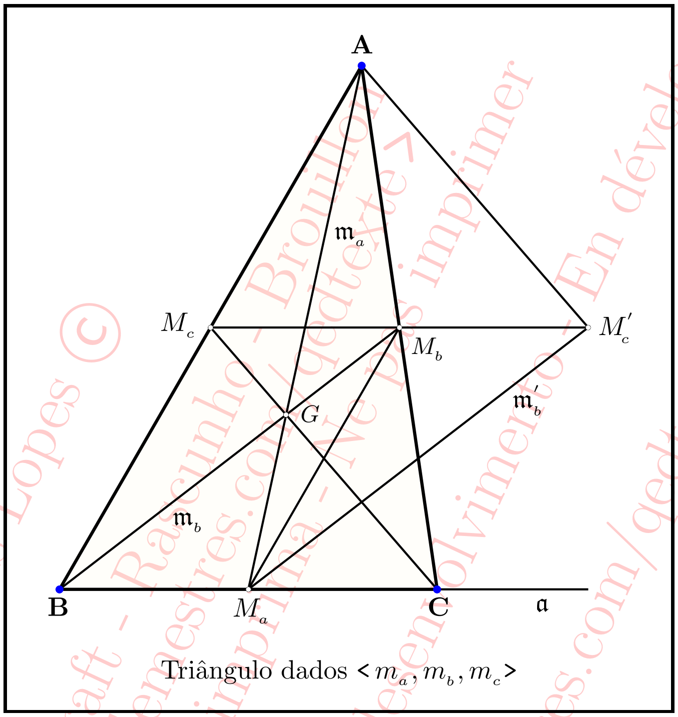


Figura 4.181: Exercício 288 — Primeiro procedimento.

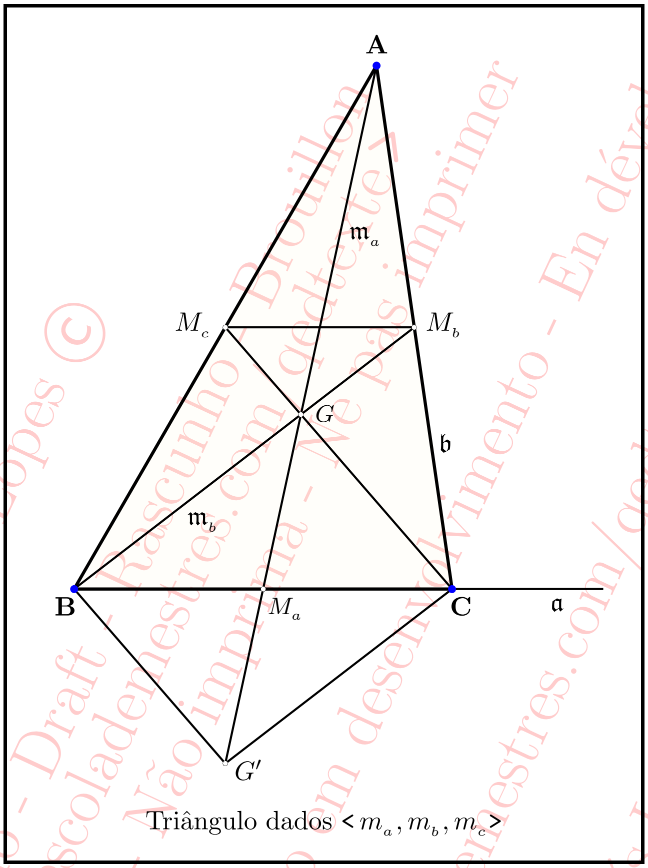
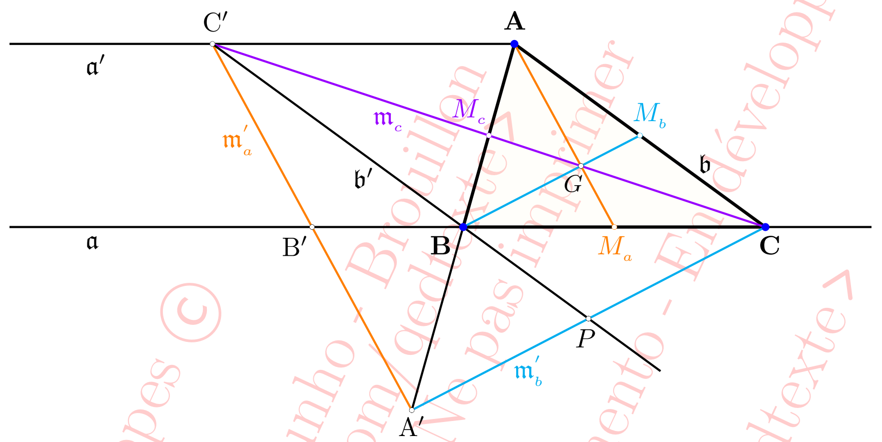


Figura 4.182: Exercício 288 — Segundo procedimento.



Triângulo dados $< m_a, m_b, m_c >$

Figura 4.183: Exercício 288 — Terceiro procedimento.