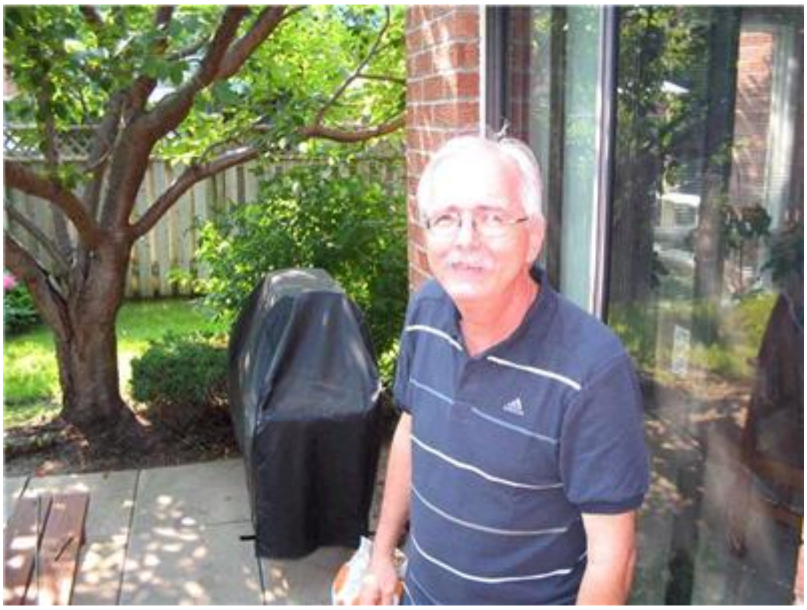


Manual de Construção de Triângulos

Todos os volumes disponibilizados ao público estão em

http://www.escolademestres.com/blogs/questoesresolvidas/

matematica/306-construcoes-geometricas-de-triangulosversao-

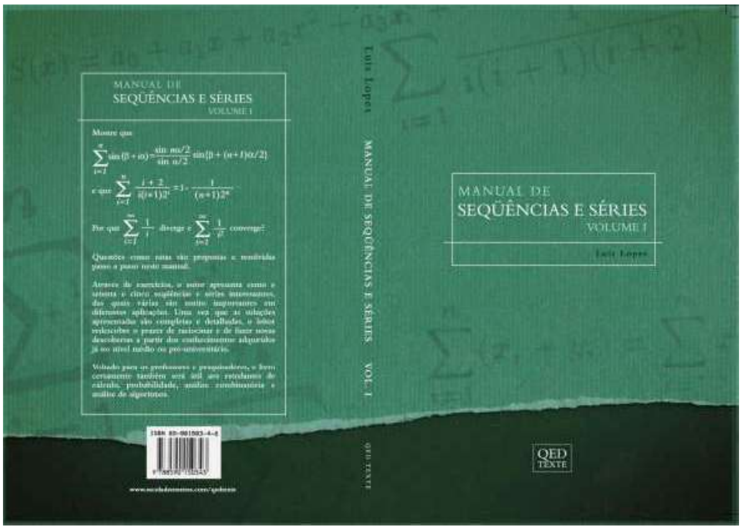
eletonica

Caso você goste do trabalho, há um link na mesma página para que você possa fazer uma contribuição para projeto através do Paypal.

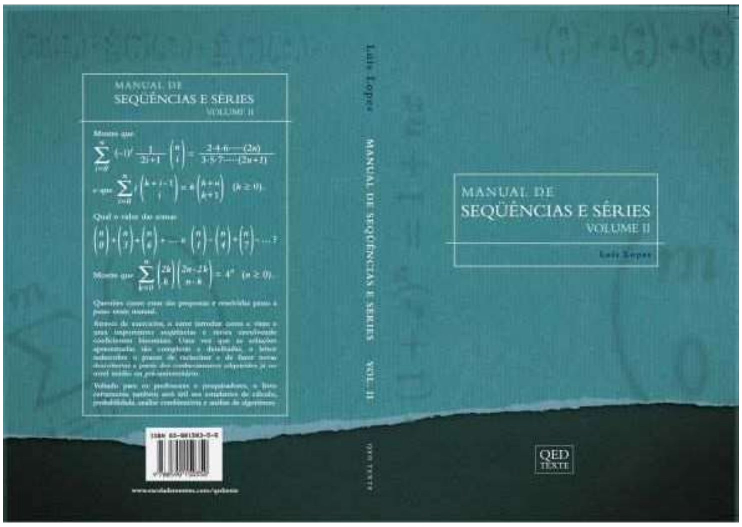
http://www.escolademestres.com/qedtexte

Tópicos abordados são os seguintes:

Seqüências e Séries -
Volume 1



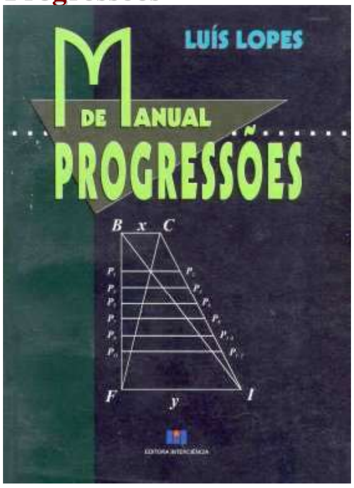
Volume 2



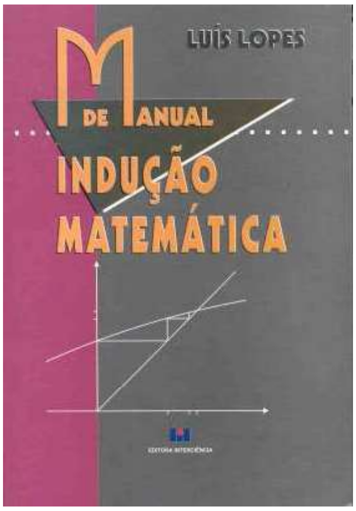
Coleção de Matemática do Prof Luís Lopes

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Progressões



Indução Matemática



http://www.escolademestres.com/qedtexte

This file was produced on March 2, 2015.
Montreal, CA and Rio de Janeiro, BR.
Work in progress.
Do not print. Spare the planet.
Contributions of all kinds are welcome.
Consider new constructions and insights,
algebraic developments and numerical solution,
discussion to existence and number of solutions,
references, etc.

Este arquivo foi criado em 2 de março de 2015.
Montreal, CA e Rio de Janeiro, BR.
Trabalho em desenvolvimento.
Não imprima. Evite desperdícios.
Colaborações de qualquer natureza são
solicitadas.

Conteúdo

Lista de Figuras

CAPÍTULO 3

EXERCÍCIOS

O enunciado de todos os exercícios começa por: construir um triângulo $\triangle$ **ABC** sendo dados ...

Exercício 1) $\blacktriangle$ $<\alpha,\ \beta,\ \gamma>$ `(alpha,beta,gamma)`.

Exercício 2) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ a>$ `(alpha,beta,a)`.

Exercício 3) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ c>$ `(alpha,beta,c)`.

Exercício 4) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ h_a>$ `(alpha,beta,h_a)`.

Exercício 5) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ h_c>$ `(alpha,beta,h_c)`.

Exercício 6) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ m_a>$ `(alpha,beta,m_a)`.

Exercício 7) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ m_c>$ `(alpha,beta,m_c)`.

Exercício 8) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ d_a>$ `(alpha,beta,d_a)`.

Exercício 9) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ d_c>$ `(alpha,beta,d_c)`.

Exercício 10) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ e_a>$ `(alpha,beta,e_a)`.

Exercício 11) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ e_c>$ `(alpha,beta,e_c)`.

Exercício 12) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ R>$ `(alpha,beta,R)`.

Exercício 13) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r>$ `(alpha,beta,r)`.

Exercício 14) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r_a>$ `(alpha,beta,r_a)`.

Exercício 15) $\triangle$ $<\alpha,\ \beta,\ r_c>$ `(alpha,beta,r_c)`.

Exercício 16) △ $<\alpha,\ a,\ b>$ `(alpha,a,b)`.

Exercício 17) △ $<\alpha,\ b,\ c>$ `(alpha,b,c)`.

Exercício 18) △ $<\alpha,\ a,\ h_a>$ `(alpha,a,h_a)`.

Exercício 19) △ $<\alpha,\ a,\ h_b>$ `(alpha,a,h_b)`.

Exercício 20) △ $<\alpha,\ b,\ h_a>$ `(alpha,b,h_a)`.

Exercício 21) △ $<\alpha,\ b,\ h_b>$ `(alpha,b,h_b)`.

Exercício 22) ▲ $<\alpha,\ b,\ h_c>$ `(alpha,b,h_c)`.

Exercício 23) △ $<\alpha,\ a,\ m_a>$ `(alpha,a,m_a)`.

Exercício 24) △ $<\alpha,\ a,\ m_b>$ `(alpha,a,m_b)`.

Exercício 25) △ $<\alpha,\ b,\ m_a>$ `(alpha,b,m_a)`.

Exercício 26) △ $<\alpha,\ b,\ m_b>$ `(alpha,b,m_b)`.

Exercício 27) △ $<\alpha,\ b,\ m_c>$ `(alpha,b,m_c)`.

Exercício 28) △ $<\alpha,\ a,\ d_a>$ `(alpha,a,d_a)`.

Exercício 29) $<\alpha,\ a,\ d_b>$ `(alpha,a,d_b)`.

Exercício 30) △ $<\alpha,\ b,\ d_a>$ `(alpha,b,d_a)`.

Exercício 31) $<\alpha,\ b,\ d_b>$ `(alpha,b,d_b)`.

Exercício 32) △ $<\alpha,\ b,\ d_c>$ `(alpha,b,d_c)`.

Exercício 33) △ $<\alpha,\ a,\ e_a>$ `(alpha,a,e_a)`.

Exercício 34) $<\alpha,\ a,\ e_b>$ `(alpha,a,e_b)`.

Exercício 35) △ $<\alpha,\ b,\ e_a>$ `(alpha,b,e_a)`.

Exercício 36) $<\alpha,\ b,\ e_b>$ `(alpha,b,e_b)`.

Exercício 37) △ $<\alpha,\ b,\ e_c>$ `(alpha,b,e_c)`.

Exercício 38) ▲ $<\alpha,\ a,\ R>$ `(alpha,a,R)`.

Exercício 39) △ $<\alpha,\ b,\ R>$ `(alpha,b,R)`.

Exercício 40) △ $<\alpha,\ a,\ r>$ `(alpha,a,r)`.

Exercício 41) △ $<\alpha,\ b,\ r>$ `(alpha,b,r)`.

Exercício 42) △ $<\alpha,\ a,\ r_a>$ `(alpha,a,r_a)`.

Exercício 43) △ $<\alpha,\ a,\ r_b>$ `(alpha,a,r_b)`.

Exercício 44) △ $<\alpha,\ b,\ r_a>$ `(alpha,b,r_a)`.

Exercício 45) $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, r_b>$ `(alpha,b,r_b).`

Exercício 46) $\triangle$ $<\alpha,\, b,\, r_c>$ `(alpha,b,r_c).`

Exercício 47) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, h_b>$ `(alpha,h_a,h_b).`

Exercício 48) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, h_c>$ `(alpha,h_b,h_c).`

Exercício 49) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, m_a>$ `(alpha,h_a,m_a).`

Exercício 50) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, m_b>$ `(alpha,h_a,m_b).`

Exercício 51) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, m_a>$ `(alpha,h_b,m_a).`

Exercício 52) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, m_b>$ `(alpha,h_b,m_b).`

Exercício 53) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, m_c>$ `(alpha,h_b,m_c).`

Exercício 54) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, d_a>$ `(alpha,h_a,d_a).`

Exercício 55) $<\alpha,\, h_a,\, d_b>$ `(alpha,h_a,d_b).`

Exercício 56) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, d_a>$ `(alpha,h_b,d_a).`

Exercício 57) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, d_b>$ `(alpha,h_b,d_b).`

Exercício 58) $<\alpha,\, h_b,\, d_c>$ `(alpha,h_b,d_c).`

Exercício 59) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, e_a>$ `(alpha,h_a,e_a).`

Exercício 60) $<\alpha,\, h_a,\, e_b>$ `(alpha,h_a,e_b).`

Exercício 61) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, e_a>$ `(alpha,h_b,e_a).`

Exercício 62) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, e_b>$ `(alpha,h_b,e_b).`

Exercício 63) $<\alpha,\, h_b,\, e_c>$ `(alpha,h_b,e_c).`

Exercício 64) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, R>$ `(alpha,h_a,R).`

Exercício 65) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, R>$ `(alpha,h_b,R).`

Exercício 66) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, r>$ `(alpha,h_a,r).`

Exercício 67) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, r>$ `(alpha,h_b,r).`

Exercício 68) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, r_a>$ `(alpha,h_a,r_a).`

Exercício 69) $\triangle$ $<\alpha,\, h_a,\, r_b>$ `(alpha,h_a,r_b).`

Exercício 70) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, r_a>$ `(alpha,h_b,r_a).`

Exercício 71) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, r_b>$ `(alpha,h_b,r_b).`

Exercício 72) $\triangle$ $<\alpha,\, h_b,\, r_c>$ `(alpha,h_b,r_c).`

Exercício 73) $\triangle$ $<\alpha,\, m_a,\, m_b>$ `(alpha,m_a,m_b).`

Exercício 74) $\triangle$ $<\alpha, m_b, m_c>$ `(alpha,m_b,m_c)`.

Exercício 75) $\triangle$ $<\alpha, m_a, d_a>$ `(alpha,m_a,d_a)`.

Exercício 76) $<\alpha, m_a, d_b>$ `(alpha,m_a,d_b)`.

Exercício 77) $<\alpha, m_b, d_a>$ `(alpha,m_b,d_a)`.

Exercício 78) $<\alpha, m_b, d_b>$ `(alpha,m_b,d_b)`.

Exercício 79) $<\alpha, m_b, d_c>$ `(alpha,m_b,d_c)`.

Exercício 80) $\triangle$ $<\alpha, m_a, e_a>$ `(alpha,m_a,e_a)`.

Exercício 81) $<\alpha, m_a, e_b>$ `(alpha,m_a,e_b)`.

Exercício 82) $<\alpha, m_b, e_a>$ `(alpha,m_b,e_a)`.

Exercício 83) $<\alpha, m_b, e_b>$ `(alpha,m_b,e_b)`.

Exercício 84) $<\alpha, m_b, e_c>$ `(alpha,m_b,e_c)`.

Exercício 85) $\triangle$ $<\alpha, m_a, R>$ `(alpha,m_a,R)`.

Exercício 86) $\triangle$ $<\alpha, m_b, R>$ `(alpha,m_b,R)`.

Exercício 87) $\triangle$ $<\alpha, m_a, r>$ `(alpha,m_a,r)`.

Exercício 88) $<\alpha, m_b, r>$ `(alpha,m_b,r)`.

Exercício 89) $\triangle$ $<\alpha, m_a, r_a>$ `(alpha,m_a,r_a)`.

Exercício 90) $\triangle$ $<\alpha, m_a, r_b>$ `(alpha,m_a,r_b)`.

Exercício 91) $<\alpha, m_b, r_a>$ `(alpha,m_b,r_a)`.

Exercício 92) $<\alpha, m_b, r_b>$ `(alpha,m_b,r_b)`.

Exercício 93) $<\alpha, m_b, r_c>$ `(alpha,m_b,r_c)`.

Exercício 94) $<\alpha, d_a, d_b>$ `(alpha,d_a,d_b)`.

Exercício 95) $<\alpha, d_b, d_c>$ `(alpha,d_b,d_c)`.

Exercício 96) $\triangle$ $<\alpha, d_a, e_a>$ `(alpha,d_a,e_a)`.

Exercício 97) $<\alpha, d_a, e_b>$ `(alpha,d_a,e_b)`.

Exercício 98) $<\alpha, d_b, e_a>$ `(alpha,d_b,e_a)`.

Exercício 99) $\triangle$ $<\alpha, d_b, e_b>$ `(alpha,d_b,e_b)`.

Exercício 100) $<\alpha, d_b, e_c>$ `(alpha,d_b,e_c)`.

Exercício 101) $\triangle$ $<\alpha, d_a, R>$ `(alpha,d_a,R)`.

Exercício 102) $<\alpha, d_b, R>$ `(alpha,d_b,R)`.

Exercício 103) $\triangle$ $<\alpha, d_a, r>$ `(alpha,d_a,r).`

Exercício 104) $\triangle$ $<\alpha, d_b, r>$ `(alpha,d_b,r).`

Exercício 105) $\triangle$ $<\alpha, d_a, r_a>$ `(alpha,d_a,r_a).`

Exercício 106) $\triangle$ $<\alpha, d_a, r_b>$ `(alpha,d_a,r_b).`

Exercício 107) $<\alpha, d_b, r_a>$ `(alpha,d_b,r_a).`

Exercício 108) $\triangle$ $<\alpha, d_b, r_b>$ `(alpha,d_b,r_b).`

Exercício 109) $<\alpha, d_b, r_c>$ `(alpha,d_b,r_c).`

Exercício 110) $<\alpha, e_a, e_b>$ `(alpha,e_a,e_b).`

Exercício 111) $<\alpha, e_b, e_c>$ `(alpha,e_b,e_c).`

Exercício 112) $\triangle$ $<\alpha, e_a, R>$ `(alpha,e_a,R).`

Exercício 113) $<\alpha, e_b, R>$ `(alpha,e_b,R).`

Exercício 114) $\triangle$ $<\alpha, e_a, r>$ `(alpha,e_a,r).`

Exercício 115) $<\alpha, e_b, r>$ `(alpha,e_b,r).`

Exercício 116) $\triangle$ $<\alpha, e_a, r_a>$ `(alpha,e_a,r_a).`

Exercício 117) $\triangle$ $<\alpha, e_a, r_b>$ `(alpha,e_a,r_b).`

Exercício 118) $\triangle$ $<\alpha, e_b, r_a>$ `(alpha,e_b,r_a).`

Exercício 119) $<\alpha, e_b, r_b>$ `(alpha,e_b,r_b).`

Exercício 120) $\triangle$ $<\alpha, e_b, r_c>$ `(alpha,e_b,r_c).`

Exercício 121) $\triangle$ $<\alpha, R, r>$ `(alpha,R,r).`

Exercício 122) $\triangle$ $<\alpha, R, r_a>$ `(alpha,R,r_a).`

Exercício 123) $\triangle$ $<\alpha, R, r_b>$ `(alpha,R,r_b).`

Exercício 124) $\triangle$ $<\alpha, r, r_a>$ `(alpha,r,r_a).`

Exercício 125) $\triangle$ $<\alpha, r, r_b>$ `(alpha,r,r_b).`

Exercício 126) $\triangle$ $<\alpha, r_a, r_b>$ `(alpha,r_a,r_b).`

Exercício 127) $\triangle$ $<\alpha, r_b, r_c>$ `(alpha,r_b,r_c).`

Exercício 128) $\triangle$ $<a, b, c>$ `(a,b,c).`

Exercício 129) $\triangle$ $<a, b, h_a>$ `(a,b,h_a).`

Exercício 130) $\triangle$ $<a, b, h_c>$ `(a,b,h_c).`

Exercício 131) $\triangle$ $<a, b, m_a>$ `(a,b,m_a).`

Exercício 132) $\triangle$ $< a,\, b,\, m_c >$ `(a,b,m_c).`

Exercício 133) $< a,\, b,\, d_a >$ `(a,b,d_a).`

Exercício 134) $\triangle$ $< a,\, b,\, d_c >$ `(a,b,d_c).`

Exercício 135) $< a,\, b,\, e_a >$ `(a,b,e_a).`

Exercício 136) $\triangle$ $< a,\, b,\, e_c >$ `(a,b,e_c).`

Exercício 137) $\triangle$ $< a,\, b,\, R >$ `(a,b,R).`

Exercício 138) $< a,\, b,\, r >$ `(a,b,r).`

Exercício 139) $< a,\, b,\, r_a >$ `(a,b,r_a).`

Exercício 140) $< a,\, b,\, r_c >$ `(a,b,r_c).`

Exercício 141) $\triangle$ $< a,\, h_a,\, h_b >$ `(a,h_a,h_b).`

Exercício 142) $\triangle$ $< a,\, h_b,\, h_c >$ `(a,h_b,h_c).`

Exercício 143) $\triangle$ $< a,\, h_a,\, m_a >$ `(a,h_a,m_a).`

Exercício 144) $\triangle$ $< a,\, h_a,\, m_b >$ `(a,h_a,m_b).`

Exercício 145) $\triangle$ $< a,\, h_b,\, m_a >$ `(a,h_b,m_a).`

Exercício 146) $\triangle$ $< a,\, h_b,\, m_b >$ `(a,h_b,m_b).`

Exercício 147) $\triangle$ $< a,\, h_b,\, m_c >$ `(a,h_b,m_c).`

Exercício 148) $\triangle$ $< a,\, h_a,\, d_a >$ `(a,h_a,d_a).`

Exercício 149) $< a,\, h_a,\, d_b >$ `(a,h_a,d_b).`

Exercício 150) $< a,\, h_b,\, d_a >$ `(a,h_b,d_a).`

Exercício 151) $\triangle$ $< a,\, h_b,\, d_b >$ `(a,h_b,d_b).`

Exercício 152) $\triangle$ $< a,\, h_b,\, d_c >$ `(a,h_b,d_c).`

Exercício 153) $\triangle$ $< a,\, h_a,\, e_a >$ `(a,h_a,e_a).`

Exercício 154) $< a,\, h_a,\, e_b >$ `(a,h_a,e_b).`

Exercício 155) $< a,\, h_b,\, e_a >$ `(a,h_b,e_a).`

Exercício 156) $\triangle$ $< a,\, h_b,\, e_b >$ `(a,h_b,e_b).`

Exercício 157) $\triangle$ $< a,\, h_b,\, e_c >$ `(a,h_b,e_c).`

Exercício 158) $\triangle$ $< a,\, h_a,\, R >$ `(a,h_a,R).`

Exercício 159) $\triangle$ $< a,\, h_b,\, R >$ `(a,h_b,R).`

Exercício 160) $\triangle$ $< a,\, h_a,\, r >$ `(a,h_a,r).`

Exercício 161) $\triangle$ $<a, h_b, r>$ `(a,h_b,r).`

Exercício 162) $\triangle$ $<a, h_a, r_a>$ `(a,h_a,r_a).`

Exercício 163) $\triangle$ $<a, h_a, r_b>$ `(a,h_a,r_b).`

Exercício 164) $\triangle$ $<a, h_b, r_a>$ `(a,h_b,r_a).`

Exercício 165) $\triangle$ $<a, h_b, r_b>$ `(a,h_b,r_b).`

Exercício 166) $\triangle$ $<a, h_b, r_c>$ `(a,h_b,r_c).`

Exercício 167) $\triangle$ $<a, m_a, m_b>$ `(a,m_a,m_b).`

Exercício 168) $\triangle$ $<a, m_b, m_c>$ `(a,m_b,m_c).`

Exercício 169) $\triangle$ $<a, m_a, d_a>$ `(a,m_a,d_a).`

Exercício 170) $<a, m_a, d_b>$ `(a,m_a,d_b).`

Exercício 171) $<a, m_b, d_a>$ `(a,m_b,d_a).`

Exercício 172) $<a, m_b, d_b>$ `(a,m_b,d_b).`

Exercício 173) $<a, m_b, d_c>$ `(a,m_b,d_c).`

Exercício 174) $\triangle$ $<a, m_a, e_a>$ `(a,m_a,e_a).`

Exercício 175) $<a, m_a, e_b>$ `(a,m_a,e_b).`

Exercício 176) $<a, m_b, e_a>$ `(a,m_b,e_a).`

Exercício 177) $<a, m_b, e_b>$ `(a,m_b,e_b).`

Exercício 178) $<a, m_b, e_c>$ `(a,m_b,e_c).`

Exercício 179) $\triangle$ $<a, m_a, R>$ `(a,m_a,R).`

Exercício 180) $\triangle$ $<a, m_b, R>$ `(a,m_b,R).`

Exercício 181) $<a, m_a, r>$ `(a,m_a,r).`

Exercício 182) $<a, m_b, r>$ `(a,m_b,r).`

Exercício 183) $<a, m_a, r_a>$ `(a,m_a,r_a).`

Exercício 184) $<a, m_a, r_b>$ `(a,m_a,r_b).`

Exercício 185) $<a, m_b, r_a>$ `(a,m_b,r_a).`

Exercício 186) $<a, m_b, r_b>$ `(a,m_b,r_b).`

Exercício 187) $<a, m_b, r_c>$ `(a,m_b,r_c).`

Exercício 188) $<a, d_a, d_b>$ `(a,d_a,d_b).`

Exercício 189) $<a, d_b, d_c>$ `(a,d_b,d_c).`

Exercício 190) △ $<a, d_a, e_a>$ `(a,d_a,e_a).`

Exercício 191) $<a, d_a, e_b>$ `(a,d_a,e_b).`

Exercício 192) $<a, d_b, e_a>$ `(a,d_b,e_a).`

Exercício 193) △ $<a, d_b, e_b>$ `(a,d_b,e_b).`

Exercício 194) $<a, d_b, e_c>$ `(a,d_b,e_c).`

Exercício 195) △ $<a, d_a, R>$ `(a,d_a,R).`

Exercício 196) $<a, d_b, R>$ `(a,d_b,R).`

Exercício 197) $<a, d_a, r>$ `(a,d_a,r).`

Exercício 198) $<a, d_b, r>$ `(a,d_b,r).`

Exercício 199) $<a, d_a, r_a>$ `(a,d_a,r_a).`

Exercício 200) $<a, d_a, r_b>$ `(a,d_a,r_b).`

Exercício 201) $<a, d_b, r_a>$ `(a,d_b,r_a).`

Exercício 202) $<a, d_b, r_b>$ `(a,d_b,r_b).`

Exercício 203) $<a, d_b, r_c>$ `(a,d_b,r_c).`

Exercício 204) $<a, e_a, e_b>$ `(a,e_a,e_b).`

Exercício 205) $<a, e_b, e_c>$ `(a,e_b,e_c).`

Exercício 206) △ $<a, e_a, R>$ `(a,e_a,R).`

Exercício 207) $<a, e_b, R>$ `(a,e_b,R).`

Exercício 208) $<a, e_a, r>$ `(a,e_a,r).`

Exercício 209) $<a, e_b, r>$ `(a,e_b,r).`

Exercício 210) $<a, e_a, r_a>$ `(a,e_a,r_a).`

Exercício 211) $<a, e_a, r_b>$ `(a,e_a,r_b).`

Exercício 212) $<a, e_b, r_a>$ `(a,e_b,r_a).`

Exercício 213) $<a, e_b, r_b>$ `(a,e_b,r_b).`

Exercício 214) $<a, e_b, r_c>$ `(a,e_b,r_c).`

Exercício 215) △ $<a, R, r>$ `(a,R,r).`

Exercício 216) △ $<a, R, r_a>$ `(a,R,r_a).`

Exercício 217) △ $<a, R, r_b>$ `(a,R,r_b).`

Exercício 218) △ $<a, r, r_a>$ `(a,r,r_a).`

Exercício 219) $\triangle$ $<a, r, r_b>$ (a,r,r_b).

Exercício 220) $\triangle$ $<a, r_a, r_b>$ (a,r_a,r_b).

Exercício 221) $\triangle$ $<a, r_b, r_c>$ (a,r_b,r_c).

Exercício 222) $\triangle$ $<h_a, h_b, h_c>$ (h_a,h_b,h_c).

Exercício 223) $\triangle$ $<h_a, h_b, m_a>$ (h_a,h_b,m_a).

Exercício 224) $\triangle$ $<h_a, h_b, m_c>$ (h_a,h_b,m_c).

Exercício 225) $<h_a, h_b, d_a>$ (h_a,h_b,d_a).

Exercício 226) $\triangle$ $<h_a, h_b, d_c>$ (h_a,h_b,d_c).

Exercício 227) $<h_a, h_b, e_a>$ (h_a,h_b,e_a).

Exercício 228) $\triangle$ $<h_a, h_b, e_c>$ (h_a,h_b,e_c).

Exercício 229) $<h_a, h_b, R>$ (h_a,h_b,R).

Exercício 230) $\triangle$ $<h_a, h_b, r>$ (h_a,h_b,r).

Exercício 231) $\triangle$ $<h_a, h_b, r_a>$ (h_a,h_b,r_a).

Exercício 232) $\triangle$ $<h_a, h_b, r_c>$ (h_a,h_b,r_c).

Exercício 233) $\triangle$ $<h_a, m_a, m_b>$ (h_a,m_a,m_b).

Exercício 234) $\triangle$ $<h_a, m_b, m_c>$ (h_a,m_b,m_c).

Exercício 235) $\triangle$ $<h_a, m_a, d_a>$ (h_a,m_a,d_a).

Exercício 236) $<h_a, m_a, d_b>$ (h_a,m_a,d_b).

Exercício 237) $\triangle$ $<h_a, m_b, d_a>$ (h_a,m_b,d_a).

Exercício 238) $<h_a, m_b, d_b>$ (h_a,m_b,d_b).

Exercício 239) $<h_a, m_b, d_c>$ (h_a,m_b,d_c).

Exercício 240) $\triangle$ $<h_a, m_a, e_a>$ (h_a,m_a,e_a).

Exercício 241) $<h_a, m_a, e_b>$ (h_a,m_a,e_b).

Exercício 242) $\triangle$ $<h_a, m_b, e_a>$ (h_a,m_b,e_a).

Exercício 243) $<h_a, m_b, e_b>$ (h_a,m_b,e_b).

Exercício 244) $<h_a, m_b, e_c>$ (h_a,m_b,e_c).

Exercício 245) $\triangle$ $<h_a, m_a, R>$ (h_a,m_a,R).

Exercício 246) $<h_a, m_b, R>$ (h_a,m_b,R).

Exercício 247) $\triangle$ $<h_a, m_a, r>$ (h_a,m_a,r).

Exercício 248) $\triangle$ $< h_a, m_b, r >$ `(h_a,m_b,r).`

Exercício 249) $\triangle$ $< h_a, m_a, r_a >$ `(h_a,m_a,r_a).`

Exercício 250) $\triangle$ $< h_a, m_a, r_b >$ `(h_a,m_a,r_b).`

Exercício 251) $\triangle$ $< h_a, m_b, r_a >$ `(h_a,m_b,r_a).`

Exercício 252) $\triangle$ $< h_a, m_b, r_b >$ `(h_a,m_b,r_b).`

Exercício 253) $\triangle$ $< h_a, m_b, r_c >$ `(h_a,m_b,r_c).`

Exercício 254) $< h_a, d_a, d_b >$ `(h_a,d_a,d_b).`

Exercício 255) $< h_a, d_b, d_c >$ `(h_a,d_b,d_c).`

Exercício 256) $\blacktriangle$ $< h_a, d_a, e_a >$ `(h_a,d_a,e_a).`

Exercício 257) $< h_a, d_a, e_b >$ `(h_a,d_a,e_b).`

Exercício 258) $< h_a, d_b, e_a >$ `(h_a,d_b,e_a).`

Exercício 259) $< h_a, d_b, e_b >$ `(h_a,d_b,e_b).`

Exercício 260) $< h_a, d_b, e_c >$ `(h_a,d_b,e_c).`

Exercício 261) $\triangle$ $< h_a, d_a, R >$ `(h_a,d_a,R).`

Exercício 262) $< h_a, d_b, R >$ `(h_a,d_b,R).`

Exercício 263) $\triangle$ $< h_a, d_a, r >$ `(h_a,d_a,r).`

Exercício 264) $< h_a, d_b, r >$ `(h_a,d_b,r).`

Exercício 265) $\triangle$ $< h_a, d_a, r_a >$ `(h_a,d_a,r_a).`

Exercício 266) $\triangle$ $< h_a, d_a, r_b >$ `(h_a,d_a,r_b).`

Exercício 267) $< h_a, d_b, r_a >$ `(h_a,d_b,r_a).`

Exercício 268) $< h_a, d_b, r_b >$ `(h_a,d_b,r_b).`

Exercício 269) $< h_a, d_b, r_c >$ `(h_a,d_b,r_c).`

Exercício 270) $< h_a, e_a, e_b >$ `(h_a,e_a,e_b).`

Exercício 271) $< h_a, e_b, e_c >$ `(h_a,e_b,e_c).`

Exercício 272) $\triangle$ $< h_a, e_a, R >$ `(h_a,e_a,R).`

Exercício 273) $< h_a, e_b, R >$ `(h_a,e_b,R).`

Exercício 274) $\triangle$ $< h_a, e_a, r >$ `(h_a,e_a,r).`

Exercício 275) $< h_a, e_b, r >$ `(h_a,e_b,r).`

Exercício 276) $\triangle$ $< h_a, e_a, r_a >$ `(h_a,e_a,r_a).`

Exercício 277) △ $<h_a, e_a, r_b>$ `(h_a,e_a,r_b)`.

Exercício 278) $<h_a, e_b, r_a>$ `(h_a,e_b,r_a)`.

Exercício 279) $<h_a, e_b, r_b>$ `(h_a,e_b,r_b)`.

Exercício 280) $<h_a, e_b, r_c>$ `(h_a,e_b,r_c)`.

Exercício 281) △ $<h_a, R, r>$ `(h_a,R,r)`.

Exercício 282) △ $<h_a, R, r_a>$ `(h_a,R,r_a)`.

Exercício 283) △ $<h_a, R, r_b>$ `(h_a,R,r_b)`.

Exercício 284) ▲ $<h_a, r, r_a>$ `(h_a,r,r_a)`.

Exercício 285) △ $<h_a, r, r_b>$ `(h_a,r,r_b)`.

Exercício 286) △ $<h_a, r_a, r_b>$ `(h_a,r_a,r_b)`.

Exercício 287) ▲ $<h_a, r_b, r_c>$ `(h_a,r_b,r_c)`.

Exercício 288) △ $<m_a, m_b, m_c>$ `(m_a,m_b,m_c)`.

Exercício 289) $<m_a, m_b, d_a>$ `(m_a,m_b,d_a)`.

Exercício 290) $<m_a, m_b, d_c>$ `(m_a,m_b,d_c)`.

Exercício 291) $<m_a, m_b, e_a>$ `(m_a,m_b,e_a)`.

Exercício 292) $<m_a, m_b, e_c>$ `(m_a,m_b,e_c)`.

Exercício 293) $<m_a, m_b, R>$ `(m_a,m_b,R)`.

Exercício 294) $<m_a, m_b, r>$ `(m_a,m_b,r)`.

Exercício 295) $<m_a, m_b, r_a>$ `(m_a,m_b,r_a)`.

Exercício 296) $<m_a, m_b, r_c>$ `(m_a,m_b,r_c)`.

Exercício 297) $<m_a, d_a, d_b>$ `(m_a,d_a,d_b)`.

Exercício 298) $<m_a, d_b, d_c>$ `(m_a,d_b,d_c)`.

Exercício 299) △ $<m_a, d_a, e_a>$ `(m_a,d_a,e_a)`.

Exercício 300) $<m_a, d_a, e_b>$ `(m_a,d_a,e_b)`.

Exercício 301) $<m_a, d_b, e_a>$ `(m_a,d_b,e_a)`.

Exercício 302) △ $<m_a, d_b, e_b>$ `(m_a,d_b,e_b)`.

Exercício 303) $<m_a, d_b, e_c>$ `(m_a,d_b,e_c)`.

Exercício 304) △ $<m_a, d_a, R>$ `(m_a,d_a,R)`.

Exercício 305) $<m_a, d_b, R>$ `(m_a,d_b,R)`.

Exercício 306) $<m_a, d_a, r>$ `(m_a,d_a,r).`

Exercício 307) $<m_a, d_b, r>$ `(m_a,d_b,r).`

Exercício 308) $<m_a, d_a, r_a>$ `(m_a,d_a,r_a).`

Exercício 309) $<m_a, d_a, r_b>$ `(m_a,d_a,r_b).`

Exercício 310) $<m_a, d_b, r_a>$ `(m_a,d_b,r_a).`

Exercício 311) $<m_a, d_b, r_b>$ `(m_a,d_b,r_b).`

Exercício 312) $<m_a, d_b, r_c>$ `(m_a,d_b,r_c).`

Exercício 313) $<m_a, e_a, e_b>$ `(m_a,e_a,e_b).`

Exercício 314) $<m_a, e_b, e_c>$ `(m_a,e_b,e_c).`

Exercício 315) $\triangle$ $<m_a, e_a, R>$ `(m_a,e_a,R).`

Exercício 316) $<m_a, e_b, R>$ `(m_a,e_b,R).`

Exercício 317) $<m_a, e_a, r>$ `(m_a,e_a,r).`

Exercício 318) $<m_a, e_b, r>$ `(m_a,e_b,r).`

Exercício 319) $<m_a, e_a, r_a>$ `(m_a,e_a,r_a).`

Exercício 320) $<m_a, e_a, r_b>$ `(m_a,e_a,r_b).`

Exercício 321) $<m_a, e_b, r_a>$ `(m_a,e_b,r_a).`

Exercício 322) $<m_a, e_b, r_b>$ `(m_a,e_b,r_b).`

Exercício 323) $<m_a, e_b, r_c>$ `(m_a,e_b,r_c).`

Exercício 324) $<m_a, R, r>$ `(m_a,R,r).`

Exercício 325) $<m_a, R, r_a>$ `(m_a,R,r_a).`

Exercício 326) $<m_a, R, r_b>$ `(m_a,R,r_b).`

Exercício 327) $\triangle$ $<m_a, r, r_a>$ `(m_a,r,r_a).`

Exercício 328) $\triangle$ $<m_a, r, r_b>$ `(m_a,r,r_b).`

Exercício 329) $\triangle$ $<m_a, r_a, r_b>$ `(m_a,r_a,r_b).`

Exercício 330) $\triangle$ $<m_a, r_b, r_c>$ `(m_a,r_b,r_c).`

Exercício 331) $<d_a, d_b, d_c>$ `(d_a,d_b,d_c).`

Exercício 332) $<d_a, d_b, e_a>$ `(d_a,d_b,e_a).`

Exercício 333) $<d_a, d_b, e_c>$ `(d_a,d_b,e_c).`

Exercício 334) $<d_a, d_b, R>$ `(d_a,d_b,R).`

Exercício 335) $<d_a, d_b, r>$ (d_a,d_b,r).

Exercício 336) $<d_a, d_b, r_a>$ (d_a,d_b,r_a).

Exercício 337) $<d_a, d_b, r_c>$ (d_a,d_b,r_c).

Exercício 338) $<d_a, e_a, e_b>$ (d_a,e_a,e_b).

Exercício 339) $<d_a, e_b, e_c>$ (d_a,e_b,e_c).

Exercício 340) △ $<d_a, e_a, R>$ (d_a,e_a,R).

Exercício 341) $<d_a, e_b, R>$ (d_a,e_b,R).

Exercício 342) △ $<d_a, e_a, r>$ (d_a,e_a,r).

Exercício 343) $<d_a, e_b, r>$ (d_a,e_b,r).

Exercício 344) △ $<d_a, e_a, r_a>$ (d_a,e_a,r_a).

Exercício 345) △ $<d_a, e_a, r_b>$ (d_a,e_a,r_b).

Exercício 346) $<d_a, e_b, r_a>$ (d_a,e_b,r_a).

Exercício 347) $<d_a, e_b, r_b>$ (d_a,e_b,r_b).

Exercício 348) $<d_a, e_b, r_c>$ (d_a,e_b,r_c).

Exercício 349) $<d_a, R, r>$ (d_a,R,r).

Exercício 350) $<d_a, R, r_a>$ (d_a,R,r_a).

Exercício 351) $<d_a, R, r_b>$ (d_a,R,r_b).

Exercício 352) △ $<d_a, r, r_a>$ (d_a,r,r_a).

Exercício 353) $<d_a, r, r_b>$ (d_a,r,r_b).

Exercício 354) $<d_a, r_a, r_b>$ (d_a,r_a,r_b).

Exercício 355) △ $<d_a, r_b, r_c>$ (d_a,r_b,r_c).

Exercício 356) $<e_a, e_b, e_c>$ (e_a,e_b,e_c).

Exercício 357) $<e_a, e_b, R>$ (e_a,e_b,R).

Exercício 358) $<e_a, e_b, r>$ (e_a,e_b,r).

Exercício 359) $<e_a, e_b, r_a>$ (e_a,e_b,r_a).

Exercício 360) $<e_a, e_b, r_c>$ (e_a,e_b,r_c).

Exercício 361) $<e_a, R, r>$ (e_a,R,r).

Exercício 362) $<e_a, R, r_a>$ (e_a,R,r_a).

Exercício 363) $<e_a, R, r_b>$ (e_a,R,r_b).

Exercício 364) $\triangle$ $< e_a, r, r_a >$ `(e_a,r,r_a).`

Exercício 365) $< e_a, r, r_b >$ `(e_a,r,r_b).`

Exercício 366) $< e_a, r_a, r_b >$ `(e_a,r_a,r_b).`

Exercício 367) $\triangle$ $< e_a, r_b, r_c >$ `(e_a,r_b,r_c).`

Exercício 368) $\triangle$ $< R, r, r_a >$ `(R,r,r_a).`

Exercício 369) $\triangle$ $< R, r_a, r_b >$ `(R,r_a,r_b).`

Exercício 370) $\triangle$ $< r, r_a, r_b >$ `(r,r_a,r_b).`

Exercício 371) $\triangle$ $< r_a, r_b, r_c >$ `(r_a,r_b,r_c).`

CAPÍTULO 4

CONSTRUÇÕES E SOLUÇÕES ALGÉBRICAS

Exercício 301) $< m_a, d_b, e_a >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.1}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.2}$$

$$\frac{2bc\sin\frac{\alpha}{2}}{|b-c|} = e_a \implies \cos\alpha = \frac{2b^2c^2 - [(b-c)e_a]^2}{2b^2c^2} \tag{4.3}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{4.4}$$

Com o sistema (4.3)–(4.4), obtemos

$$b^2 + c^2 - \frac{2b^2c^2 - [(b-c)e_a]^2}{bc} = a^2 \tag{4.5}$$

Como $< m_a, d_b, e_a >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.1)–(4.2) e (4.5) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 302) $<m_a, d_b, e_b>$

Método do problema já resolvido

Como $<d_b, e_b, h_b>$ formam um datum, conhecemos $<h_b, m_a, d_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 237).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 303) $<m_a, d_b, e_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.6}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.7}$$

$$\frac{2ab\sin\frac{\gamma}{2}}{|a-b|} = e_c \implies \cos\gamma = \frac{2a^2b^2 - [(a-b)e_c]^2}{2a^2b^2} \tag{4.8}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2 \tag{4.9}$$

Com o sistema (4.8)–(4.9), obtemos

$$a^2 + b^2 - \frac{2a^2b^2 - [(a-b)e_c]^2}{ab} = c^2 \tag{4.10}$$

Como $<m_a, d_b, e_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.6)–(4.7) e (4.10) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 304) $<m_a, d_a, R>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

No exercício 235 vimos que

$$R = \frac{d_a^2\sqrt{m_a^2 - h_a^2}}{2h_a\sqrt{d_a^2 - h_a^2}} \tag{4.11}$$

$$a^2 = \frac{4\left(\sqrt{m_a^2 - h_a^2} - \sqrt{d_a^2 - h_a^2}\right)\left(\sqrt{m_a^2 - h_a^2}\sqrt{d_a^2 - h_a^2} + h_a^2\right)}{\sqrt{d_a^2 - h_a^2}} \tag{4.12}$$

Usando a equação (4.11) é fácil expressar h_a em função de m_a, d_a e R. Assim,

$$h_a^4 - \left(\frac{d_a}{2R}\right)^2 (d_a^2 + (2R)^2) h_a^2 + \left(\frac{d_a^2}{2R}\right)^2 m_a^2 = 0 \qquad (4.13)$$

e o comprimento h_a pode ser construído. Com isso, conhecemos $< h_a, m_a, d_a >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 235).

Observação: as raízes de equações do tipo

$$x^4 \pm u^2 x^2 \pm v^4 = 0$$

podem ser construídas da seguinte maneira: faz-se

$$x^2 = uy$$

significando isto que x será a média geométrica de u e da raiz y (ou cada uma das raízes) da equação

$$u^2 y^2 \pm u^3 y \pm v^4 = 0 \iff y^2 \pm uy \pm \left(\frac{v^2}{u}\right)^2 = 0$$

Aplicação numérica: sejam $m_a = 3{,}5\,\text{cm}$, $d_a = 2\,\text{cm}$ e $R = 4\,\text{cm}$.

Resolvendo a equação (4.13) com estes valores, obtemos $h_a = \frac{\sqrt{31}+\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}$ e $h'_a = \frac{\sqrt{31}-\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}$. Daí, com (4.12), $a = \mathbf{BC} = 7{,}82334269263\,\text{cm}$ e $a' = \mathbf{B'C'} = 5{,}00663225787\,\text{cm}$. Para calcular $b\,(b')$ e $c\,(c')$, use as fórmulas $bc = 2Rh_a$ e $2(b^2 + c^2) = a^2 + 4m_a^2$. Obtêm-se $b = \mathbf{AC} = 7{,}1355489649\,\text{cm}$, $c = \mathbf{AB} = 2{,}04604164481\,\text{cm}$, $b' = \mathbf{A'C'} = 5{,}94720841465\,\text{cm}$ e $c' = \mathbf{A'B'} = 1{,}28992067802\,\text{cm}$.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $< a, b, c >$ e $< a', b', c' >$ satisfazem todas as condições do problema.

Segundo procedimento – Método algébrico

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle\,\mathbf{A}DO$. Já conhecemos $O\mathbf{A} = R$ e uma análise da figura 4.183 (ver a página 39) nos mostrará que o ponto D possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto O vale R ($DO = R$, pela definição do ponto D);

ii) se x representa sua distância au ponto $\mathbf{A}$ ($D\mathbf{A} = x$), então

$$x^4 - (d_a^2 + (2R)^2)x^2 + (2Rm_a)^2 = 0 \qquad (4.14)$$

Para provar o resultado dado pela equação (4.14), notamos que $\triangle D\mathbf{A}E \sim \triangle \mathbf{A}H_a D_a$ e podemos escrever:

$$\frac{DE}{D\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}D_a}{\mathbf{A}H_a} \quad \text{ou} \quad \frac{2R}{x} = \frac{d_a}{h_a} \tag{4.15}$$

Notamos também que $\triangle DM_a D_a \sim \triangle \mathbf{A}H_a D_a$. Assim, podemos escrever:

$$\frac{M_a D_a}{DD_a} = \frac{D_a H_a}{D_a\mathbf{A}} = \frac{M_a H_a}{x} \Longrightarrow \frac{M_a H_a}{x} = \frac{D_a H_a}{d_a} \tag{4.16}$$

O $\triangle \mathbf{A}H_a M_a$ é retângulo. Assim,

$$m_a^2 - h_a^2 = M_a H_a^2 = \frac{x^2}{d_a^2} D_a H_a^2 \tag{4.17}$$

O $\triangle \mathbf{A}H_a D_a$ também é retângulo. Então $D_a H_a^2 = d_a^2 - h_a^2$ e a equação (4.17) fica

$$M_a H_a^2 = \frac{x^2}{d_a^2}(d_a^2 - h_a^2) \tag{4.18}$$

Substituindo o valor de h_a dado por (4.15) em (4.18), resulta:

$$m_a^2 - \frac{x^2 d_a^2}{4R^2} = \frac{x^2}{d_a^2}\left(d_a^2 - \frac{x^2 d_a^2}{4R^2}\right)$$

$$x^4 - (d_a^2 + (2R)^2)x^2 + (2Rm_a)^2 = 0 \quad \blacksquare \tag{4.19}$$

Construindo os comprimentos u e v tais que $u = \sqrt{d_a^2 + (2R)^2}$ e $v = 2Rm_a/u$, podemos escrever (4.19) como

$$x^4 - u^2x^2 + u^2v^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{u}{2}\left(u \pm \sqrt{u^2 - (2v)^2}\right)} \tag{4.20}$$

Portanto, x é construtível e têm-se dois valores possíveis (ℓ_1 e ℓ_2) para o comprimento do segmento $x = D\mathbf{A}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.183, na página 39):

i) construir o comprimento x (ℓ_1 e ℓ_2) dado por (4.20);

ii) numa reta $\mathfrak{m}$ qualquer colocar os pontos D e O tais que $DO = R$; traçar o círculo $\Gamma = (O, OD)$; construir o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \in \Gamma$ e $D\mathbf{A} = x$) e obter a reta $\mathfrak{d}_a = (D, \mathbf{A})$;

iii) traçar os arcos $\phi_1 = (\mathbf{A}, d_a)$ e $\phi_2 = (\mathbf{A}, m_a)$ e obter os pontos D_a ($D_a = \mathfrak{d}_a \cap \phi_1$) e M_a ($M_a = \mathfrak{m} \cap \phi_2$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{a} = (D_a, M_a)$ e obter os pontos **B** e **C** ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Aplicação numérica: sejam $m_a = 3{,}5\,\text{cm}$, $d_a = 2\,\text{cm}$ e $R = 4\,\text{cm}$.

Resolvendo a equação (4.20) com estes valores, obtemos $\ell_1 = \sqrt{31} + \sqrt{3}$ e $\ell_2 = \sqrt{31} - \sqrt{3}$. Daí, com (4.15), $h_a = \frac{\ell_1 d_a}{2R} = \frac{\sqrt{31}+\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}$ e $h_a' = \frac{\ell_2 d_a}{2R} = \frac{\sqrt{31}-\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}$. A partir daqui prossegue-se como no primeiro procedimento.

Exercício 305) $\quad < m_a, d_b, R >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.21}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.22}$$

$$2R\sin\alpha = a \implies \sin^2\alpha = \left(\frac{a}{2R}\right)^2 \tag{4.23}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \implies \cos^2\alpha = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 \tag{4.24}$$

Como $1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$, com o sistema (4.23)–(4.24) obtemos

$$(4R^2 - a^2)b^2c^2 = \left[(b^2+c^2-a^2)R\right]^2 \tag{4.25}$$

Como $< m_a, d_b, R >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.21)–(4.22) e (4.25) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 306) $\quad < m_a, d_a, r >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.26}$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.27}$$

$$\tan\tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{2r}{b+c-a} \tag{4.28}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \tag{4.29}$$

Com o sistema (4.28)–(4.29), obtemos

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}=\left(\frac{2r}{b+c-a}\right)^2 \tag{4.30}$$

Como $<m_a, d_a, r>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.26)–(4.27) e (4.30) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 307) $<m_a, d_b, r>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{4.31}$$

$$ac-\frac{ab^2c}{(a+c)^2}=d_b^2 \tag{4.32}$$

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}=\left(\frac{2r}{b+c-a}\right)^2 \tag{4.33}$$

Como $<m_a, d_b, r>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.31)–(4.33) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 308) $<m_a, d_a, r_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{4.34}$$

$$bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=d_a^2 \tag{4.35}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{2r_a}{a+b+c} \tag{4.36}$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \tag{4.37}$$

Com o sistema (4.36)–(4.37), obtemos

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}=\left(\frac{2r_a}{a+b+c}\right)^2 \tag{4.38}$$

Como $<m_a, d_a, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.34)–(4.35) e (4.38) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 309) $<m_a, d_a, r_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2+c^2)-a^2 = 4m_a^2 \tag{4.39}$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.40}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \frac{2r_b}{a+b+c} \tag{4.41}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \tag{4.42}$$

Com o sistema (4.41)–(4.42), obtemos

$$\frac{b^2-(a-c)^2}{(a+c)^2-b^2} = \left(\frac{2r_b}{a+b+c}\right)^2 \tag{4.43}$$

Como $<m_a, d_a, r_b>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.39)–(4.40) e (4.43) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 310) $<m_a, d_b, r_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2+c^2)-a^2 = 4m_a^2 \tag{4.44}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.45}$$

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2} = \left(\frac{2r_a}{a+b+c}\right)^2 \tag{4.46}$$

Como $<m_a, d_b, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.44)–(4.46) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 311) $< m_a, d_b, r_b >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.47}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.48}$$

$$\frac{b^2 - (a-c)^2}{(a+c)^2 - b^2} = \left(\frac{2r_b}{a+b+c}\right)^2 \tag{4.49}$$

Como $< m_a, d_b, r_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.47)–(4.49) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 312) $< m_a, d_b, r_c >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.50}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.51}$$

$$\frac{c^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2 - c^2} = \left(\frac{2r_c}{a+b+c}\right)^2 \tag{4.52}$$

Como $< m_a, d_b, r_c >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.50)–(4.52) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 313) $< m_a, e_a, e_b >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.53}$$

$$\frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)} = e_a \implies \frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(b-c)^2} = e_a^2 \tag{4.54}$$

$$\frac{2}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)} = e_b \implies \frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = e_b^2 \tag{4.55}$$

Como $< m_a, e_a, e_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.53)–(4.55) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 314) $<m_a, e_b, e_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2+c^2)-a^2=4m_a^2 \tag{4.56}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2}=e_b^2 \tag{4.57}$$

$$\frac{ab(b+c-a)(a+c-b)}{(a-b)^2}=e_c^2 \tag{4.58}$$

Como $<m_a, e_b, e_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.56)–(4.58) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 315) $<m_a, e_a, R>$

Primeiro procedimento – Método do problema já resolvido

Vimos no exercício 304 que

$$h_a^4-\left(\frac{d_a}{2R}\right)^2(d_a^2+(2R)^2)h_a^2+\left(\frac{d_a^2}{2R}\right)^2 m_a^2=0 \tag{4.59}$$

E no exercício 59, vimos que

$$d_a=\sqrt{\frac{e_a^2h_a^2}{e_a^2-h_a^2}} \tag{4.60}$$

Substituindo o valor de d_a dado por (4.60) em (4.59), resulta:

$$h_a^4-\left(\frac{e_a}{2R}\right)^2(e_a^2+(2R)^2)h_a^2+\left(\frac{e_a^2}{2R}\right)^2 m_a^2=0 \tag{4.61}$$

e o comprimento h_a pode ser construído. Com isso, conhecemos $<h_a, m_a, e_a>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 240).

Aplicação numérica: sejam $m_a = 7{,}8$ cm, $e_a = 5$ cm e $R = 7$ cm.

Resolvendo a equação (4.61) com estes valores, obtemos $h_a = \sqrt{16{,}25}$ cm e $h'_a = \frac{\sqrt{585}}{7}$ cm. Daí, com (4.60), $d_a = \frac{\sqrt{2275}}{7}$ cm e $d'_a = \frac{5\sqrt{234}}{16}$ cm. E agora, com (4.12), $a = \mathbf{BC} = 6{,}75551884884$ cm e $a' = \mathbf{B'C'} = 12{,}5114863218$ cm. Para calcular $b\,(b')$ e $c\,(c')$, use as fórmulas $bc = 2Rh_a$ e $2(b^2+c^2) = a^2+4m_a^2$. Obtêm-se $b = \mathbf{AC} = 10{,}8332699828$ cm, $c = \mathbf{AB} = 5{,}2094893165$ cm, $b' = \mathbf{A'C'} = 13{,}691837304$ cm e $c' = \mathbf{A'B'} = 3{,}53302083685$ cm.

Verificação: o leitor pode facilmente constatar que os dois triângulos cujos lados são $<a, b, c>$ e $<a', b', c'>$ satisfazem todas as condições do problema.

Segundo procedimento – Método algébrico

O problema estará resolvido se pudermos construir o $\triangle E\mathbf{A}O$. Já conhecemos $O\mathbf{A} = R$ e uma análise da figura 4.183 (ver a página 39) nos mostrará que o ponto E possui duas propriedades:

i) sua distância ao ponto O vale R ($EO = R$, pela definição do ponto E);

ii) se x representa sua distância au ponto $\mathbf{A}$ ($E\mathbf{A} = x$), então

$$x^4 - (e_a^2 + (2R)^2)x^2 + (2Rm_a)^2 = 0 \qquad (4.62)$$

Para provar o resultado dado pela equação (4.62), notamos que $\triangle D\mathbf{A}E \sim \triangle \mathbf{A}H_aE_a$ e podemos escrever:

$$\frac{DE}{E\mathbf{A}} = \frac{E_a\mathbf{A}}{\mathbf{A}H_a} \quad \text{ou} \quad \frac{2R}{x} = \frac{e_a}{h_a} \qquad (4.63)$$

Notamos também que $\triangle EM_aE_a \sim \triangle \mathbf{A}H_aE_a$. Assim, podemos escrever:

$$\frac{E_aM_a}{EE_a} = \frac{E_aH_a}{\mathbf{A}E_a} = \frac{H_aM_a}{x} \Longrightarrow \frac{H_aM_a}{x} = \frac{E_aH_a}{e_a} \qquad (4.64)$$

O $\triangle \mathbf{A}H_aM_a$ é retângulo. Assim,

$$m_a^2 - h_a^2 = H_aM_a^2 = \frac{x^2}{e_a^2}E_aH_a^2 \qquad (4.65)$$

O $\triangle \mathbf{A}H_aE_a$ também é retângulo. Então $E_aH_a^2 = e_a^2 - h_a^2$ e a equação (4.65) fica

$$H_aM_a^2 = \frac{x^2}{e_a^2}\left(e_a^2 - h_a^2\right) \qquad (4.66)$$

Substituindo o valor de h_a dado por (4.63) em (4.66), resulta:

$$m_a^2 - \frac{x^2e_a^2}{4R^2} = \frac{x^2}{e_a^2}\left(e_a^2 - \frac{x^2e_a^2}{4R^2}\right)$$
$$x^4 - (e_a^2 + (2R)^2)x^2 + (2Rm_a)^2 = 0 \quad \blacksquare \qquad (4.67)$$

Construindo os comprimentos u e v tais que $u = \sqrt{e_a^2 + (2R)^2}$ e $v = 2Rm_a/u$, podemos escrever (4.67) como

$$x^4 - u^2x^2 + u^2v^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{u}{2}\left(u \pm \sqrt{u^2 - (2v)^2}\right)} \qquad (4.68)$$

Portanto x é construtível e têm-se dois valores possíveis (ℓ_1 e ℓ_2) para o comprimento do segmento $x = E\mathbf{A}$.

Daí a construção que segue (ver a figura 4.183, na página 39):

i) construir o comprimento x (ℓ_1 e ℓ_2) dado por (4.68);

ii) numa reta $\mathfrak{m}$ qualquer colocar os pontos E e O tais que $EO = R$; traçar o círculo $\Gamma = (O, OE)$; construir o ponto $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \in \Gamma$ e $E\mathbf{A} = x$) e obter a reta $\mathfrak{e}_a = (E, \mathbf{A})$;

iii) traçar os arcos $\phi_1 = (\mathbf{A}, e_a)$ e $\phi_2 = (\mathbf{A}, m_a)$ e obter os pontos E_a ($E_a = \mathfrak{e}_a \cap \phi_1$) e M_a ($M_a = \mathfrak{m} \cap \phi_2$);

iv) traçar a reta $\mathfrak{a} = (E_a, M_a)$ e obter os pontos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{B} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$ e $\mathbf{C} = \mathfrak{a} \cap \Gamma$).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Aplicação numérica: sejam $m_a = 7{,}8\,\text{cm}$, $e_a = 5\,\text{cm}$ e $R = 7\,\text{cm}$.

Resolvendo a equação (4.68) com estes valores, obtemos $\ell_1 = \sqrt{127{,}4}$ e $\ell_2 = \sqrt{93{,}6}$. Daí, com (4.63), $h_a = \frac{\ell_1 e_a}{2R} = \sqrt{16{,}25}\,\text{cm}$ e $h'_a = \frac{\ell_2 e_a}{2R} = \frac{\sqrt{585}}{7}\,\text{cm}$. A partir daqui prossegue-se como no primeiro procedimento.

Exercício 316) $<m_a, e_b, R>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.69}$$

$$\frac{ac(b + c - a)(a + b - c)}{(a - c)^2} = e_b^2 \tag{4.70}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} = R^2 \tag{4.71}$$

Como $<m_a, e_b, R>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.69)–(4.71) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 317) $<m_a, e_a, r>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.72}$$

$$\frac{bc(a + c - b)(a + b - c)}{(b - c)^2} = e_a^2 \tag{4.73}$$

$$\frac{[a^2 - (b - c)^2](b + c - a)^2}{(b + c)^2 - a^2} = 4r^2 \tag{4.74}$$

Como $<m_a, e_a, r>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.72)–(4.74) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 318) $< m_a, e_b, r >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.75}$$
$$\frac{ac(b + c - a)(a + b - c)}{(a - c)^2} = e_b^2 \tag{4.76}$$
$$\frac{[a^2 - (b - c)^2](b + c - a)^2}{(b + c)^2 - a^2} = 4r^2 \tag{4.77}$$

Como $< m_a, e_b, r >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.75)–(4.77) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 319) $< m_a, e_a, r_a >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.78}$$
$$\frac{bc(a + c - b)(a + b - c)}{(b - c)^2} = e_a^2 \tag{4.79}$$
$$\frac{[a^2 - (b - c)^2](a + b + c)^2}{(b + c)^2 - a^2} = 4r_a^2 \tag{4.80}$$

Como $< m_a, e_a, r_a >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.78)–(4.80) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 320) $< m_a, e_a, r_b >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.81}$$
$$\frac{bc(a + c - b)(a + b - c)}{(b - c)^2} = e_a^2 \tag{4.82}$$
$$\frac{[b^2 - (a - c)^2](a + b + c)^2}{(a + c)^2 - b^2} = 4r_b^2 \tag{4.83}$$

Como $< m_a, e_a, r_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.81)–(4.83) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 321) $<m_a, e_b, r_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.84}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = e_b^2 \tag{4.85}$$

$$\frac{[a^2 - (b-c)^2](a+b+c)^2}{(b+c)^2 - a^2} = 4r_a^2 \tag{4.86}$$

Como $<m_a, e_b, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.84)–(4.86) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 322) $<m_a, e_b, r_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.87}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = e_b^2 \tag{4.88}$$

$$\frac{[b^2 - (a-c)^2](a+b+c)^2}{(a+c)^2 - b^2} = 4r_b^2 \tag{4.89}$$

Como $<m_a, e_b, r_b>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.87)–(4.89) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 323) $<m_a, e_b, r_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.90}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = e_b^2 \tag{4.91}$$

$$\frac{[c^2 - (a-b)^2](a+b+c)^2}{(a+b)^2 - c^2} = 4r_c^2 \tag{4.92}$$

Como $<m_a, e_b, r_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.90)–(4.92) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 324) $< m_a, R, r >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.93}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} = R^2 \tag{4.94}$$

$$\frac{[a^2 - (b - c)^2](b + c - a)^2}{(b + c)^2 - a^2} = 4r^2 \tag{4.95}$$

Como $< m_a, R, r >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.93)–(4.95) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 325) $< m_a, R, r_a >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.96}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} = R^2 \tag{4.97}$$

$$\frac{[a^2 - (b - c)^2](a + b + c)^2}{(b + c)^2 - a^2} = 4r_a^2 \tag{4.98}$$

Como $< m_a, R, r_a >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.96)–(4.98) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 326) $< m_a, R, r_b >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2 \tag{4.99}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} = R^2 \tag{4.100}$$

$$\frac{[b^2 - (a - c)^2](a + b + c)^2}{(a + c)^2 - b^2} = 4r_b^2 \tag{4.101}$$

Como $< m_a, R, r_b >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.99)–(4.101) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 327) $< m_a, r, r_a >$

Método do problema já resolvido

Como $< r, r_a, h_a >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, m_a, r >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 247).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 328) $< m_a, r, r_b >$

Método do problema já resolvido

Como $< r, r_b, h_b >$ formam um datum, conhecemos $< h_b, m_a, r >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 248).

Discussão: o problema possui 0, 1 ou 2 soluções.

Exercício 329) $< m_a, r_a, r_b >$

Método do problema já resolvido

Como $< r_a, r_b, h_c >$ formam um datum, conhecemos $< h_c, m_a, r_a >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 252).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 330) $< m_a, r_b, r_c >$

Método do problema já resolvido

Como $< r_b, r_c, h_a >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, m_a, r_b >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 250).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 331) $<d_a, d_b, d_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.102}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.103}$$

$$ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = d_c^2 \tag{4.104}$$

Como $<d_a, d_b, d_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.102)–(4.104) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Utilizando-se a teoria dos sistemas de equações não lineares (ver [2], por exemplo), pode-se demonstrar que (ver [4]) o sistema (4.102)–(4.104) possui sempre um e somente um ponto fixo. Assim, tem-se a seguinte

Discussão: o problema possui sempre uma e somente uma solução (pode-se "construir"sempre um e somente um triângulo).

Observação: para demonstrar a existência e unicidade do ponto fixo do sistema (4.102)–(4.104), os autores de [4] serviram-se do seguinte resultado preliminar:

$$b + c = \sqrt{d_a^2 + (p-b)^2} + \sqrt{d_a^2 + (p-c)^2} \tag{4.105}$$

Para a demonstração de (4.105), ver o teorema 2.6 em [1].

Por outro lado, em [3] Victor Oxman demonstra a unicidade do triângulo usando somente argumentos sintéticos, sem usar análise ou trigonometria.

Exercício 332) $<d_a, d_b, e_a>$

Método do problema já resolvido

Como $<d_a, e_a, h_a>$ formam um datum, conhecemos $<h_a, d_a, d_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 254).

Exercício 333) $<d_a, d_b, e_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.106}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.107}$$

$$\frac{ab(b+c-a)(a+c-b)}{(a-b)^2} = e_c^2 \tag{4.108}$$

Como $<d_a, d_b, e_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.106)–(4.108) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 334) $<d_a, d_b, R>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.109}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.110}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2} = R^2 \tag{4.111}$$

Como $<d_a, d_b, R>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.109)–(4.111) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 335) $<d_a, d_b, r>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.112}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.113}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](b+c-a)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r^2 \tag{4.114}$$

Como $<d_a, d_b, r>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.112)–(4.114) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 336) $<d_a, d_b, r_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.115}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.116}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](a+b+c)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r_a^2 \tag{4.117}$$

Como $<d_a, d_b, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.115)–(4.117) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 337) $<d_a, d_b, r_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.118}$$

$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = d_b^2 \tag{4.119}$$

$$\frac{[c^2-(a-b)^2](a+b+c)^2}{(a+b)^2-c^2} = 4r_c^2 \tag{4.120}$$

Como $<d_a, d_b, r_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.118)–(4.120) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 338) $<d_a, e_a, e_b>$

Método do problema já resolvido

Como $<d_a, e_a, h_a>$ formam um datum, conhecemos $<h_a, d_a, e_b>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 257).

Exercício 339) $<d_a, e_b, e_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.121}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = e_b^2 \tag{4.122}$$

$$\frac{ab(b+c-a)(a+c-b)}{(a-b)^2} = e_c^2 \tag{4.123}$$

Como $<d_a, e_b, e_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.121)–(4.123) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 340) $<d_a, e_a, R>$

Método do problema já resolvido

Como $<d_a, e_a, h_a>$ formam um datum, conhecemos $<h_a, d_a, R>$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 261).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 341) $<d_a, e_b, R>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.124}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = e_b^2 \tag{4.125}$$

$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2} = R^2 \tag{4.126}$$

Como $<d_a, e_b, R>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.124)–(4.126) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 342) $< d_a, e_a, r >$

Método do problema já resolvido

Como $< d_a, e_a, h_a >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, d_a, r >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 263).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 343) $< d_a, e_b, r >$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.127}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = e_b^2 \tag{4.128}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](b+c-a)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r^2 \tag{4.129}$$

Como $< d_a, e_b, r >$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.127)–(4.129) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 344) $< d_a, e_a, r_a >$

Método do problema já resolvido

Como $< d_a, e_a, h_a >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, d_a, r_a >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 265).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 345) $< d_a, e_a, r_b >$

Método do problema já resolvido

Como $< d_a, e_a, h_a >$ formam um datum, conhecemos $< h_a, d_a, r_b >$ e já sabemos como resolver este problema (ver o exercício 266).

Discussão: o problema possui 0 ou 1 solução.

Exercício 346) $<d_a, e_b, r_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.130}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = e_b^2 \tag{4.131}$$

$$\frac{[a^2-(b-c)^2](a+b+c)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r_a^2 \tag{4.132}$$

Como $<d_a, e_b, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.130)–(4.132) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 347) $<d_a, e_b, r_b>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.133}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = e_b^2 \tag{4.134}$$

$$\frac{[b^2-(a-c)^2](a+b+c)^2}{(a+c)^2-b^2} = 4r_b^2 \tag{4.135}$$

Como $<d_a, e_b, r_b>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.133)–(4.135) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 348) $<d_a, e_b, r_c>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.136}$$

$$\frac{ac(b+c-a)(a+b-c)}{(a-c)^2} = e_b^2 \tag{4.137}$$

$$\frac{[c^2-(a-b)^2](a+b+c)^2}{(a+b)^2-c^2} = 4r_c^2 \tag{4.138}$$

Como $<d_a, e_b, r_c>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.136)–(4.138) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 349) $<d_a, R, r>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.139}$$
$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2} = R^2 \tag{4.140}$$
$$\frac{[a^2-(b-c)^2](b+c-a)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r^2 \tag{4.141}$$

Como $<d_a, R, r>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.139)–(4.141) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

Exercício 350) $<d_a, R, r_a>$

Método algébrico

Começamos escrevendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = d_a^2 \tag{4.142}$$
$$\frac{(abc)^2}{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2} = R^2 \tag{4.143}$$
$$\frac{[a^2-(b-c)^2](a+b+c)^2}{(b+c)^2-a^2} = 4r_a^2 \tag{4.144}$$

Como $<d_a, R, r_a>$ são conhecidos, podemos resolver o sistema (4.142)–(4.144) com um programa qualquer, obtendo assim os lados a, b e c.

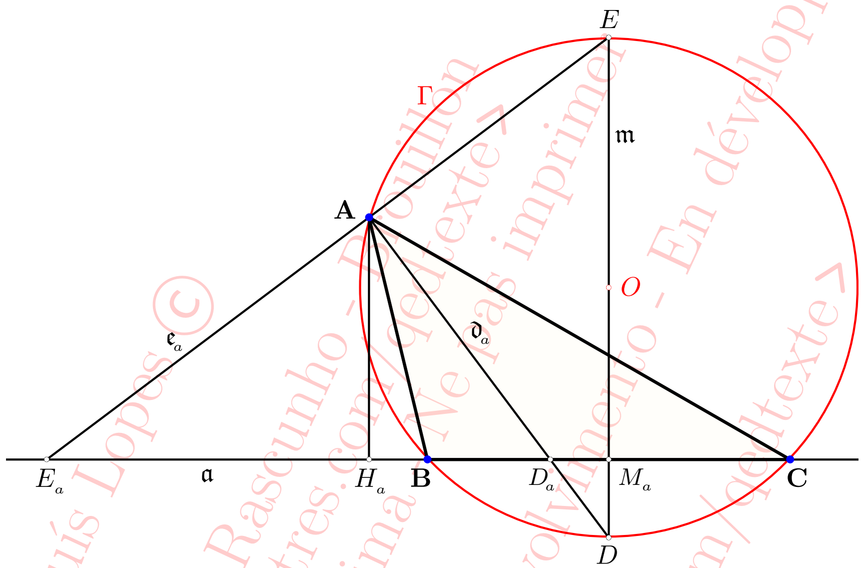
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] L. Lopes. *Manual de Construção de Triângulos*, volume 1. A ser publicado, Rio de Janeiro, 2015.

[2] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables.* Academic Press, 1970.

[3] V. Oxman. A purely geometric proof of the uniqueness of a triangle with prescribed angle bisectors. http://forumgeom.fau.edu/FG2008volume8/FG200828.pdf, 2008. Último acesso: março de 2015.

[4] L. Panaitopol and P. Mironescu. The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths. *The American Mathematical Monthly*, 101:58–60, 1994.



Triângulo dados $< m_a, d_a, R >$

Figura 4.183: Exercício 304 — Segundo procedimento.