Soluções

"Afinal de contas, o que é a Matemática
senão a solução de quebra-cabeças?
E o que é a Ciência senão um esforço sistemático
para obter respostas cada vez melhores
para os quebra-cabeças impostos pela natureza?"
Martin Gardner

Problema 1)
Seja d o deslocamento do rato a cada um dos seus pulos. Seja $3d$ o deslocamento do gato a cada um dos seus pulos. A cada 2 pulos, o gato se desloca $6d$; enquanto isto, o rato dá 5 pulos e se desloca $5d$. Portanto, em cada 2 pulos o gato avança d em relação ao rato, que inicialmente possui uma vantagem de 35 de seus pulos, isto é, $35d$. Se em 2 pulos o gato diminui a distância em relação ao rato de d, então o gato deve dar 70 pulos para diminuir de $35d$, alcançando assim o rato.

Problema 2)
Considerando a restrição (apenas um dos quatro diz a verdade), conclui-se que:

i) Eduardo e João dão declarações contrárias. Logo, seguramente, só um deles diz a verdade.

ii) Se Eduardo diz a verdade, então Rafael também diz. O que não pode ocorrer. Logo, Eduardo mente e, conseqüentemente, João diz a verdade.

iii) Se André diz a verdade, então Rafael e João também dizem. Logo, André mente, respeitando a restrição.

iv) No item ii), verificou-se que quem diz a verdade é João, logo todos os outros mentem. Mas se Rafael mente, então ele é o culpado.

Problema 3)

Vamos considerar dois casais, com as três respostas possíveis 0, 1 e 2. Maria (a esposa de João) não pode ter respondido 2 pois do contrário teria apertado a mão dos dois convidados e não haveria ninguém com zero cumprimento. Então os que responderam 0 e 2 formam um casal e Maria deu um cumprimento (assim como João).

Considere agora três casais, com as cinco respostas possíveis 0, 1, 2, 3 e 4, e seja P_i quem respondeu i cumprimentos. Maria não pode ser P_4 pois do contrário teria apertado a mão dos quatro convidados e não haveria ninguém com zero cumprimento. Concluímos que P_4 é cônjude de P_0 pois P_4 cumprimentou todos os quatro presentes permitidos pelo menos uma vez. Retiremos agora P_4 e P_0 e os cumprimentos dados por P_4 nos outros presentes. Recaímos na situação anterior e concluímos que P_3 é cônjuge de P_1 e Maria é P_2 (e João também deu dois cumprimentos).

Fazendo este raciocínio para cinco casais, vemos que Maria respondeu 4 e este também é o número de cumprimentos de João.

Problema 4)

"Se p então q" é equivalente à sua contrapositiva: "Se não q então não p". Sendo p e q proposições e $\neg p$ e $\neg q$ suas respectivas negações, tem-se em linguagem simbólica: $p \rightarrow q \vee \neg q \rightarrow \neg p$. Por exemplo, sejam as proposições "p : REX é cão" e "q : REX é animal", e mais a sentença: $p \rightarrow q$. É evidente a validade de sua contrapositiva: $\neg q \rightarrow \neg p$, noutras palavras: "Se REX não é animal então REX não é cão". Note que não se pode garantir que $\neg p \rightarrow \neg q$.

Neste problema, fazendo p : o jardim não é florido, q : o gato mia e r : o passarinho não canta, tem-se: $p \rightarrow q$ e $\neg p \rightarrow r$. Mas é verdade que $\neg r$; logo, $\neg r \rightarrow p$ e daí segue-se que $p \rightarrow q$. Ou por outra: se o passarinho canta, então o jardim não é florido, mas se o jardim não é florido, então o gato mia.

Problema 5)

Trata-se de um circuito financeiro fechado, isto é, para alguém ganhar, alguém tem que perder. O prejuízo do livreiro foi o que a mulher lucrou somado com o que o jornaleiro lucrou. Mas o jornaleiro não lucrou e nem perdeu nada, logo se pode retirá-lo da história. Com isso, o prejuízo do livreiro se resume ao que a mulher lucrou, 100 reais, que foi todo o prejuízo do livreiro.

Uma outra forma de resolver este problema é supor que o dono da livraria, percebendo que não tinha troco, tivesse resolvido, antes de a mulher chegar, trocar uma de suas notas de 100 reais por 10 notas de 10 reais no jornaleiro, e então, atendido a mulher, recebendo a nota de 100 reais falsa e dando-lhe o livro mais 8 notas de 10 reais. O que deixaria bem claro que o prejuízo do livreiro foi de exatamente 100 reais.

Problema 6)
Ao final, ficarão abertos os armários que foram mexidos um número ímpar de vezes, isto é, os armários cujos números possuem uma quantidade ímpar de divisores positivos.

A quantidade q de divisores positivos de um número N é dada por $q = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots(\lambda+1)$, onde α, β, $\gamma, \ldots, \lambda$ são os expoentes dos fatores de N em sua decomposição em fatores primos. Para que q seja ímpar, é necessário e suficiente que cada um dos fatores anteriores seja também ímpar e, para tanto, deve-se ter α, β, $\gamma, \ldots, \lambda$ todos pares, o que implica que N é um quadrado perfeito.

Problema 7)
O filho ganhou x partidas das 20. Com os dados do problema, podemos armar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 100+6x-4(20-x) &= 20+10x && \text{(fichas do filho)} \\ 100+4(20-x)-6x &= 180-10x && \text{(fichas do pai)} \\ 20+10x &= 3(180-10x) \therefore x = 13. \end{aligned}$$

Problema 8)
Tal barbeiro não existe. Trata-se de um paradoxo. Essa situação não pode ser real.

Problema 9)
Listando todos os ternos de números naturais (idades das filhas) cujo produto seja 36 e registrando a soma de cada terno (número da casa em frente), verifica-se que em apenas duas dessas possibilidades obtém-se o mesmo valor, a saber 13, para o número da casa em frente: “1, 6 e 6” e “2, 2 e 9”. Somos, então, forçados a admitir que é 13 o número da casa em frente, pois, caso contrário, não haveria necessidade de mais um dado (o tal dado fundamental) e, neste caso, como há uma filha mais velha, as idades são 2, 2 e 9 anos.

Problema 10)
Basta vir de trás para frente no problema.

Arnaldo	Beatriz	Carlos
16	16	16
8	8	32
4	28	16
26	14	8

Problema 11)

Considerando o caso do primeiro dado ter 5 faces vermelhas e 1 azul, seja x a quantidade de faces vermelhas do segundo dado.

i) Número de possibilidades de se obter faces com mesma cor num lançamento:

ambas vermelhas	$5 \times x$
ambas azuis	$1 \times (6 - x)$
Total (I)	$4x + 6$

ii) Número de possibilidades de se obter faces com cores diferentes num lançamento:

azul no primeiro dado e vermelha no segundo	$1 \times x$
vermelha no primeiro dado e azul no segundo	$5 \times (6 - x)$
Total (II)	$30 - 4x$

Fazendo (I) = (II), vem: $4x + 6 = 30 - 4x \therefore x = 3$.

A análise para o caso do primeiro dado ter 6 faces vermelhas e 0 azul é análoga. Assim, o segundo dado deve ter três faces vermelhas. Deixamos para o leitor a generalização, ou seja, o primeiro dado tem y faces vermelhas e $6 - y$ faces azuis.

Problema 12)

Seja x o número de galinhas que o lobo comeu. Como a quantidade de milho consumida é diretamente proporcional à quantidade de galinhas e à quantidade de dias, podemos escrever:

$$15 \times 2 + 18 \times 4 + (18 - x) \times 18 = 15 \times 20 \therefore x = 7.$$

Problema 13)

Se o prisioneiro resolve sair pelo terceiro túnel, depois de 6 horas terá que escolher recomeçar pelos primeiro ou segundo túneis. Isto dará uma média de

$$\frac{1}{2}\big(1+6\big)+\frac{1}{2}\big(3+6\big)=8\,\text{h}.$$

Se M representa o tempo médio para os prisioneiros escaparem, podemos escrever:

$$M=\frac{1}{3}\big(1+3+8\big)=4\,\text{h}.$$

Problema 14)

Consideremos primeiramente o caso em que uma pessoa não conhece nenhuma das outras. Se das pessoas que restaram uma não conhece nenhuma das outras, então ao menos duas pessoas não terão amigos presentes. Devemos agora analisar o caso em que todas pessoas de um grupo conhecem pelo menos uma outra.

Havendo N pessoas na festa (grupo) e considerando que não se conte consigo mesmo como um amigo seu presente, cada pessoa tem, no máximo, $N-1$ amigos presentes. Logo, o número de presentes será sempre maior que o número de possibilidades que cada convidado tem para a quantidade de amigos presentes (menor que ou igual a N − 1). Assim, pelo menos um convidado terá que se utilizar da quantidade já utilizada por outro.

Problema 15)

Seja Z a maior quantia que não pode ser paga com qualquer combinação das moedas de 7 e 11 unidades monetárias. Por tentativas e erros, achamos Z = 59. Neste processo, chegamos à fórmula

$$\text{Z}=(n-1)m-n,$$

onde n e m são os valores das notas e $\text{mdc}(n,m)=1$. Deixamos para o leitor sua ratificação ou refutação. Note que a fórmula é válida para $n=8$ e $m=3$ (Z = 13) e $n=23$ e $m=15$ (Z = 307).

Problema 16)

Sejam c, g e T o número de cães, gatos e o total de animais, respectivamente, sendo $T=c+g$.

Com os dados do problema, para os animais que pensam que são gatos podemos escrever:

$$\begin{aligned} 90\%g + 10\%c &= 80\%g + 10\%g + 10\%c \\ 80\%g + 10\%(c+g) &= 80\%g + 10\%T = 20\%T \\ 80\%g &= 10\%T \Longrightarrow g = T/8 = 0,125T = 12{,}5\%T. \end{aligned}$$

Problema 17)
O ônibus A saiu às 12:48 e o ônibus B às 13:01. No instante em que B sai, A já andou por 13 minutos, restando ainda 20 minutos para concluir o percurso Niterói-Rio. A partir deste instante (13:01), em 10 minutos ocorrerá o encontro, isto é, às 13 h 11 min.

Problema 18)
Se 99% das 100 pessoas presentes são homens, então tem-se 99 homens e 1 mulher. Teremos 98% de homens num grupo de pessoas, somente se essa única mulher constituir 2% do grupo. Isso só ocorrerá quando neste grupo houver apenas 50 pessoas, sendo 49 homens e 1 mulher. Portanto, devem ser retirados 50 homens.

Problema 19)
A está dizendo a verdade pois do contrário estaria mentindo e seria último (5º). Mas se está mentindo seria 1º ou 2º. Então A é 3º ou 4º. Supondo 3º, então B mente. B é 1º ou 2º. Suponho 1º. Verifico que D diz a verdade e E mente. Concluo que a ordem é: B,E,A,C,D.

Problema 20)
O número 1000! termina com 249 zeros. Podemos calcular este número da seguinte maneira: cada zero significa a presença de um fator 2 e um fator 5 em 1000! . Ora, na fatoração de 1000! é óbvio que existem mais fatores 2 que fatores 5. Então, se

$$1000! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot \cdots \cdot 997^1,$$

fica claro que o número de zeros que estamos procurando é c.

Ora, quantos são os fatores 5? Em $N = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ existem

$$\begin{array}{rl} 200 & \text{múltiplos de } 5; \\ 40 & \text{múltiplos de } \ \ 25 = 5^2; \\ 8 & \text{múltiplos de } 125 = 5^3; \\ 1 & \text{ múltiplo de } 625 = 5^3, \end{array}$$

para um total de 249.

Problema 21)

Podemos supor que os três correm juntos. Neste caso, quando Dagoberto alcança a chegada, Genivaldo terá percorrido $1760-330 = 1430\,\text{m}$; e Evangivaldo, $1760 - 460 = 1300\,\text{m}$. O que dá uma distância, neste exato instante, de $1430 - 1300 = 130\,\text{m}$ entre Genivaldo e Evangivaldo.

Resolver este problema é o mesmo que responder à seguinte pergunta: se percorrendo $1430\,\text{m}$ Genivaldo obtém um distanciamento de $130\,\text{m}$ em relação a Evangivaldo, de quanto será este distanciamento quando Genivaldo tiver percorrido os $1760\,\text{m}$? Fica então claro que devemos resolver a seguinte proporção:

$$\frac{1430}{130} = \frac{1760}{x} \Longrightarrow x = 160\,\text{m}.$$

Problema 22)

Sejam S o valor do sorvete sem o palito e P, o valor do palito. Como 10 palitos nos dão um sorvete com palito, escrevemos:

$$\begin{aligned} 10P &= 1(P+S) \\ 9P &= S \\ P/S &= 1/9. \end{aligned}$$

Problema 23)

Se 20 adultos equivalem a 24 crianças, então 5 adultos equivalem a 6 crianças. Logo, 15 adultos equivalem a 18 crianças e portanto podem ainda entrar $24 - 18 = 6$ crianças.

Problema 24)

Sejam

e	distância do itinerário mais curto
E	distância do itinerário mais longo
v	velocidade do itinerário mais curto
V	velocidade do itinerário mais longo
t	tempo de viagem pelo itinerário mais curto
T	tempo de viagem pelo itinerário mais longo

Podemos escrever $e = vt$ e $E = VT$. Mas $E = 1{,}14e$ e $V = 1{,}2v$. Logo,

$$1{,}14vt = 1{,}2vT \Longrightarrow T/t = 1{,}14/1{,}2 = 0{,}95.$$

Portanto, a diminuição no tempo de viagem será de 5%.

Problema 25)

Seja o par (i, j), em que i representa a quantidade de litros no recipiente de 4 litros, e j no de 9. Uma possível solução, com uma seqüência de enchimentos e esvaziamentos dos recipientes seria: (0,9); (4,5); (0,5); (4,1); (0,1); (1,0); (1,9); (4,6); (0,6).

Deixamos para o leitor encontrar outras seqüências, assim como aquela(s) mais curta(s).

Problema 26)

Sejam as proposições:

$$\begin{aligned} p &: \text{ O Romário não faz gol.} \\ q &: \text{ O Flamengo perde.} \end{aligned}$$

Pelo enunciado é verdade que $p \to q$, logo vale $\neg q \to \neg p$. E daívem: se o Flamengo não perde (ganha ou empata), então o Romário fez gol.

Problema 27)

Tomam-se 6 bolinhas quaisquer e colocam-se 3 delas em cada prato, restando 2 bolinhas fora da balança. A partir daí, somente um dos casos seguintes poderá ocorrer:

(I) Os pratos se equilibram.

Neste caso, seguramente a bolinha mais pesada é uma das duas que ficaram de fora da balança. Assim, basta fazer uma segunda pesagem pondo uma em cada prato para se descobrir qual das duas é a mais pesada.

(II) Os pratos não se equilibram.

Neste caso, é evidente que a bolinha mais pesada está no prato com o trio mais pesado de bolinhas. Assim, tomam-se duas das bolinhas deste trio para uma segunda pesagem, pondo uma em cada prato e deixando a terceira de fora da balança. A partir daí, somente um dos casos seguintes poderá ocorrer:

(i) Os pratos se equilibram.
Neste caso, é fácil ver que a bolinha que ficou de fora desta pesagem é a mais pesada.

(ii) Os pratos não se equilibram.
Neste caso, o problema já está resolvido.

Problema 28)
Seja (A) a operação

(A) : retirar um objeto da caixa contendo a etiqueta "lápis e canetas".

Suponha que o resultado de (A) seja um lápis. Conseqüentemente, nesta caixa há apenas lápis. Na caixa que contém a etiqueta "canetas", deve haver lápis e canetas. E, finalmente, na caixa que contém a etiqueta "lápis", deve haver apenas canetas. Se o resultado de (A) for uma caneta, o problema também está resolvido sem a necessidade de outra operação, de maneira análoga.

Problema 29)
Sejam V o tamanho das duas velas, A a vela que dura 4 horas e B, a que dura 3 horas. Após um tempo t medido em horas, chamemos de $V_A(t)$ ao tamanho de A e de $V_B(t)$ ao tamanho de B. Logo,

$$\begin{aligned} V_A(t) &= V(1-t/4) \\ V_B(t) &= V(1-t/3). \end{aligned}$$

Queremos que $V_A = 2V_B$. Logo,

$$1-t/4 = 2(1-t/3) \implies t = 2,4\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h} + 0{,}4\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h} + 0{,}4\times 60\,\mathrm{min} = 2\,\mathrm{h}\ 24\,\mathrm{min}.$$

Logo, se às 13 h 36 min (16 h - 2 h 24 min) as velas forem acesas, às 16 horas uma terá o dobro do comprimento da outra.

Problema 30)
Seja P o percurso que João andou a pé. Maria e João chegaram 10 min mais cedo porque Maria deixou de fazer P duas vezes (ponto de encontro–rodoviária–ponto de encontro). Então, Maria leva 5 min de carro em P.

Como ela deveria chegar às 17 horas à rodoviária, o encontro se deu às $17\,\text{h} - 5\,\text{min} = 16\,\text{h}\ 55\,\text{min}$. Logo, João andou durante 55 minutos.

Problema 31)

Ao meio-dia em ponto os dois ponteiros estão superpostos. E vemos que após 65 minutos e antes de 70 minutos eles estarão superpostos novamente. Com o plano para resolver o problema já estabelecido, definimos nossas variáveis: sejam t o tempo medido em minutos, contado a partir de meio-dia em ponto **e** após 60 minutos já terem se passado, v a velocidade angular do ponteiro das horas e V, a dos minutos. Definimos também θ_1 (θ_2) como sendo o ângulo formado pelo ponteiro das horas (dos minutos) após t minutos. Assim, $v = \pi/360\,\text{rad/min}$ e $V = 2\pi/60\,\text{rad/min}$ e podemos escrever:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}t \qquad (1)$$

$$\theta_2 = \frac{2\pi}{60}t \qquad (2)$$

Como queremos que os dois ângulos sejam iguais, fazemos (1) = (2).

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}t = \frac{2\pi}{60}t \Longrightarrow t = \frac{60}{11} \approx 5\,\text{min}\ 27\,\text{sec}$$

Portanto, superposições consecutivas se darão aproximadamente a cada $1\,\text{h}\ 5\,\text{min}\ 27\,\text{sec}$.

Problema 32)

Com os dados do problema, fazemos a tabela abaixo, onde V representa uma afirmação verdadeira e F, uma falsa.

	D	S	T	Q	Q	S	S
Pedro	V	V	V	F	F	F	V
Maria	F	F	F	V	V	V	V

Na terça-feira Pedro não mente dizendo: “Amanhã eu vou mentir”.
Na terça-feira Maria mente dizendo: “Amanhã eu vou mentir”.

Problema 33)

O problema e seus dados nos levam a definir as seguintes variáveis:

- N produtividade de uma vaca negra (em litros por dia);
- M produtividade de uma vaca marrom (em litros por dia).
- Q quantidade de leite produzida em cada uma das duas situações.

Dependendo da situação, a quantidade de leite produzida em apenas um dia será:

$$\begin{aligned} 4N + 3M &= Q/5 \\ 3N + 5M &= Q/4 \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira igualdade por 5 e a segunda por 4, vem:

$$\begin{aligned} 20N + 15M &= Q \quad \text{e} \quad 12N + 20M = Q.\text{Daí resulta} \\ 20N + 15M &= 12N + 20M \Longrightarrow 8N = 5M, \end{aligned}$$

ou seja, em um dia 8 vacas negras produzem tantos litros de leite quanto 5 vacas marrons.

Problema 34)

i) Se (A) é correta, então (C) e (D) também o são. Logo, (A) não é correta.

ii) Se (B) é correta, então (C) e (D) também o são. Logo, (B) não é correta.

iii) Se (C) é correta, então (D) também o é.

iv) Mas (D) pode ser correta sem que nenhuma outra alternativa também o seja. Por exemplo, se a solução for -2.

v) Se (E) é correta, então (D) também o é. Logo, (E) não é correta.

Problema 35)

Começar com duas algas equivale a estar no segundo dia tendo começado com uma só. Logo, precisa-se de menos um dia, ou seja, 29 dias.

Problema 36)

Sejam as proposições:

$$\begin{aligned} p &: \text{ não chover.} \\ q &: \text{ todos os bares à beira-mar deverão ser abertos.} \\ \neg p &: \text{ chover.} \\ \neg q &: \text{ um bar à beira-mar não está aberto.} \end{aligned}$$

Pelo enunciado é verdade que $p \to q$, logo vale $\neg q \to \neg p$. E daí vem: se um bar à beira-mar não está aberto, então choveu.

Problema 37)
Sejam as proposições:

$$\begin{aligned} p &: x = 3 \\ q &: y = 7 \\ \neg p &: x \neq 3 \\ \neg q &: y \neq 7 \end{aligned}$$

Pelo enunciado é verdade que $p \to q$, logo vale $\neg q \to \neg p$. E daí vem: se $y \neq 7$, então $x \neq 3$.

Problema 38)
Podemos ter 4 pessoas nascidas em janeiro, 4 em fevereiro, ... e 4 em dezembro, para um total de 48 pessoas. Assim, colocando mais uma pessoa no grupo teremos certeza que *pelo menos* 5 pessoas nascem num mesmo mês.

Problema 39)
Sejam D e J as produtividades de Demétrius e Josimar. Sabemos que $D = 1{,}5J$ e que os dois devem executar a mesma tarefa. Logo, se x representa o número de horas que Demétrius deve trabalhar, podemos escrever:

$$x \cdot 1{,}5J = 12J \therefore x = 8.$$

Problema 40)
Sabe-se que S $\neq$ M e é fácil perceber que:

i) S + M $<$ 20, pois M é o algarismo das dezenas da soma de S com M. Logo, M é no máximo 1. Mas M $\neq$ 0, caso contrário, ter-se-ia S = M, o que contraria o enunciado. Conclui-se que M = 1.

ii) S + M $>$ 9, pois a soma de S e M é um número cujo algarismo das dezenas M é igual a 1. Logo, S = 9 e O é zero.

iii) Como N $\neq$ E, não se pode ter N + O = E, mas sim 1 + N + O = E, pela "regra do vai um". A partir daí, pode-se encontrar, por tentativas, valores convenientes para N, E e as demais letras. A solução encontrada é:

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & 5 & 6 & 7 \\ + & 1 & 0 & 8 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 6 & 5 & 2 \end{array}$$

Problema 41)

Como queremos o número mínimo de lápis numa caixa, vamos supor que todas elas, menos uma, contêm sua capacidade máxima. A diferença entre este total e a quantidade embalada dará o conteúdo mínimo (q) na caixa restante. Assim, $q = 74 - (12 \cdot 6) = 2$.

Problema 42)

Quando A completa a corrida, B tem que correr ainda 20 m e C, 28 m (ou seja, B está 8 m à frente de C). Quando B acaba de correr seus últimos 20 m, C tem que correr ainda 10 m, ou seja, B afasta-se 2 m de C a cada 20 metros corridos por B. Como ao final dos x metros corridos por B a distância que os separa é de 10 metros, a corrida tem 100 metros.

Problema 43)

Sejam m o número de habitantes e n, o número de carros na cidade do planeta **Z**. Então m e n são inteiros positivos. Pelos dados do problema, podemos escrever:

$$3m + 5n = 97.$$

Como $\text{mdc}(3, 5) = 1$, a equação diofantina acima possui múltiplas soluções. Por tentativas e erros ou qualquer outro processo, podemos listá-las:

$$\begin{array}{lllllll} m & = & 4 & \quad & n & = & 17 \\ m & = & 9 & & n & = & 14 \\ m & = & 14 & & n & = & 11 \\ m & = & 19 & & n & = & 8 \\ m & = & 24 & & n & = & 5 \\ m & = & 29 & & n & = & 2 \end{array}$$

Vemos então que podemos afirmar que a cidade possui no máximo 17 carros mas *não* podemos afirmar que a cidade tem 9 habitantes e 14 carros (esta é apenas *uma* das possibilidades para estas quantidades na cidade).

Problema 44)

As quatro rodas (não pneus) rodarão cada uma 20000 km, para um total de $4 \cdot 20000 = 80000$ km. Estes 80000 km serão distribuídos igualmente pelos 5 pneus, ou seja, cada pneu terá rodado 16000 km.

Problema 45)

Sejam C, x e c os conteúdos de um cálice, de uma xícara e de um copo, respectivamente. Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} 7C &= 2x + c \\ c &= x + c \therefore x = c - C \\ 7C &= 2c - 2C + c \Longrightarrow c = 3C. \end{aligned}$$

Logo, o conteúdo de um copo é equivalente ao de 3 cálices.

Problema 46)

Sejam p o preço de uma jabuticaba, N o número de jabuticabas compradas e V, o valor a pagar. Então $V = N \cdot p$ e com os dados do problema, podemos escrever:

$$32p = 2/p \therefore p = 0{,}25.$$

Logo, com 25 reais podemos comprar 100 jabuticabas.

Problema 47)

Podemos colorir a primeira listra com qualquer uma das três cores. A listra seguinte pode ser colorida com duas cores (pois listras adjacentes não podem ter a mesma cor) e pelo mesmo raciocínio, as duas restantes também. Logo, pode-se colorir a bandeira de $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ modos diferentes.

Problema 48)

Basta colocar na balança, por exemplo, 1 prato da 1ª pilha, 2 pratos da 2ª pilha, 3 da 3ª pilha, e assim por diante, até colocar 10 pratos da 10ª pilha. Se não houvesse pratos defeituosos, a balança deveria marcar 5,5 kg. Daí, analisando a diferença, se consegue descobrir quantos pratos defeituosos foram colocados na balança e, conseqüentemente, de qual pilha eles vieram.

Problema 49)

Sejam R, E e D as produtividades (com dimensão buraco/dia) de Rivaldo, de Edmundo e de Dunga, respectivamente. Com os dados do problema, e para *um* dia de trabalho das equipes, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathrm{R} + \mathrm{E} &= 1/4 \Longrightarrow \mathrm{E} = 1/4 - \mathrm{R} \\ \mathrm{R} + \mathrm{D} &= 1/3 \Longrightarrow \mathrm{D} = 1/3 - \mathrm{R} \\ \mathrm{E} + \mathrm{D} &= 1/2 \Longrightarrow 7/12 - 2\mathrm{R} = 1/2. \end{aligned}$$

Resolvendo, vem R = 1/24. Logo, Rivaldo levaria 24 dias para cavar sozinho um buraco.

Problema 50)

Sejam

C	uma parte de concentrado;
A	uma parte de água;
R	uma parte de refresco;
S	uma parte de suco.

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} 1\mathrm{C} + 3\mathrm{A} &= 4\mathrm{S} \\ 1\mathrm{C} + 6\mathrm{A} &= 7\mathrm{R} \Longrightarrow (1\mathrm{C} + 3\mathrm{A}) + 3\mathrm{A} = 7\mathrm{R} \Longrightarrow 4\mathrm{S} + 3\mathrm{A} = 7\mathrm{R} \end{aligned}$$

Logo, o refresco também poderia ser fabricado diluindo 4 partes de suco em 3 partes de água.

Problema 51)

Seja x a quantia que Josimar tinha ao entrar na última (quinta) loja. Como ele gastou R$ 1,00 a mais do que a metade de x e saiu sem nada, podemos escrever:

$$x - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = 0 \Longrightarrow x = 2.$$

Repetindo o raciocínio para a quarta loja, temos (x agora representa a quantia que Josimar tinha ao entrar na quarta loja):

$$x - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = 2 \Longrightarrow x = 6.$$

Repetindo o procedimento para as terceira, segunda e primeira lojas calculamos que Josimar tinha R$ 62,00 ao entrar na primeira. Deixamos para o leitor os detalhes dos cálculos.

Problema 52)

Como cada gato come cada rato em 5 minutos, 100 gatos comerão 100 ratos nos mesmos 5 minutos.

Problema 53)

i) A cada 2 horas a lesma sobe 3 metros. Ao final de 14 horas, ela terá subido 21 metros. E na hora seguinte, mais 5 metros, para um total de 26 metros.

ii) Pelo item i) acima, ao final de 28 horas a lesma terá subido 42 metros. Com mais 2 horas, mais 3 metros. E na hora seguinte (total de 31 horas), mais 5 metros, para um total de 50 metros.

Problema 54)
Sejam

V	preço de venda.
C	preço de custo.
L	lucro.

Sabemos que V = C + L e, segundo o problema, L = 0,5V. Logo, L = C e o lucro sobre o preço de custo é 1 ou 100%.

Problema 55)
A melancia tem um conteúdo sólido de 0,1 kg que não se altera após a evaporação. Se x é a massa da melancia após a evaporação, temos:

$$\frac{x - 0{,}1}{x} = 0{,}98 \Longrightarrow x = 5\,\mathrm{kg}.$$

Problema 56)

i) Se a) é correta, então c) e/ou d) também o são. Logo, a) não é correta.

ii) Se b) é correta, então d) também o é. Logo, b) não é correta.

iii) Se d) é correta, então pelo menos uma das alternativas a), b) e c) também o é. Logo, d) não é correta.

iv) Mas c) pode ser correta sem que nenhuma outra alternativa também o seja. Por exemplo, se a data de nascimento for 1765.

v) A alternativa e) certamente não é correta pois o escritor nasceu depois de 1830 ou antes de 1860.

Problema 57)

Sejam

G	gastos no supermercado.
P	preços dos produtos.
Q	quantidade dos produtos na compra.

Sabemos que $\mathrm{G} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{Q}$. Após o aumento queremos manter G. Assim, se Q' é a nova quantidade, temos:

$$1{,}6\mathrm{P} \cdot \mathrm{Q}' = \mathrm{P} \cdot \mathrm{Q} \Longrightarrow \frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{Q}} = \frac{1}{1{,}6} = 62{,}5\%.$$

Logo, a redução será de 37,5%.

Problema 58)

Vamos calcular quantas vezes o algarismo 1 ocupa a posição das unidades, das dezenas, das centenas e dos milhares.

Nas unidades, ele aparece em

$$0001,\ 0011,\ 0021,\ \ldots,\ 0091,\ 0101,\ 0111,\ \ldots,\ 1991,$$

para um total de $(1991 - 1)/10 + 1 = 200$ posições.

Nas dezenas, ele aparece em

$$\begin{gathered} 0010,\ 0011,\ 0012,\ \ldots,\ 0019, \\ 0110,\ 0111,\ 0112,\ \ldots,\ 0119, \\ \vdots \\ 1910,\ 1911,\ 1912,\ \ldots,\ 1919, \end{gathered}$$

para um total de $20 \times 10 = 200$ posições.

Nas centenas, ele aparece em

$$0100,\ 0101,\ 0102,\ \ldots,\ 0199,\ 1100,\ 1101,\ \ldots,\ 1199,$$

para um total de $2 \times 100 = 200$ posições.

Nos milhares, ele aparece em $1000,\ 1001,\ 1002,\ \ldots,\ 1993$, para um total de 994 posições.

Somando os resultados das quatro posições, obtemos 1594 vezes.

Problema 59)

Primeira solução

Sejam x um dos valores possíveis para o número de equipes e n, o número de soldados nas equipes formadas. Logo, podemos escrever: $1440 = x \cdot n$, com n par. Assim, teremos tantos valores possíveis para o número de equipes quantos forem os divisores pares de 1440.

Decompondo 1440 em fatores primos, vem:

$$1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1.$$

O número de divisores pares (q_p) será obtido calculando-se o número total de divisores (q) menos o número de divisores ímpares (q_i).

$$q_p = (5+1)(2+1)(1+1) - (2+1)(1+1) = 36 - 6 = 30.$$

Segunda solução

Vimos na primeira solução que $1440/n = x$, com n par. Podemos fazer $n = 2p$, com p inteiro positivo. Então a igualdade fica $1440/2p = x$, ou ainda melhor, $720/p = x$. Como a quantidade de valores que x pode assumir é igual à quantidade de valores de p, basta descobrir quantos são os valores possíveis para p; mas isso é o mesmo que descobrir quantos são os divisores naturais de 720. Assim, se q representa o número de divisores de 720, temos:

$$\begin{aligned} 720 &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ q &= (4+1)(2+1)(1+1) = 30 \end{aligned}$$

Logo, podemos formar 30 equipes satisfazendo as condições do problema.

Problema 60)

Vemos que uma galinha põe 1 dúzia de ovos em 73 dias e come 1 kg de milho em 37 dias. Logo, em 1 dia come $1/37$ kg e ao final de 73 dias, $73/37$ kg, quando terá posto uma dúzia de ovos.

Problema 61)

a) Seja x o valor da prestação. Ao final do primeiro mês a dívida (saldo devedor) será de $(662-x)+0{,}1(662-x) = 1{,}1(662-x)$. Paga-se a segunda prestação e fica-se com uma dívida de $1{,}1(662-x)-x$. Ao final do segundo mês a dívida será de $1{,}1[1{,}1(662-x)-x]$. Paga-se a terceira prestação e quita-se a dívida. Logo, podemos escrever:

$$1{,}1[1{,}1(662-x)-x] = x \Longrightarrow x = \text{R\$}\,242{,}00.$$

b) Seja x o valor da prestação. Ao final do primeiro mês a dívida (saldo devedor) será de $1{,}1 \cdot 662$. Paga-se a primeira prestação x e a dívida fica $1{,}1 \cdot 662 - x$. Ao final do segundo mês a dívida será de $1{,}1(1{,}1 \cdot 662 - x)$. Paga-se a segunda prestação e fica-se com uma dívida de $1{,}1(1{,}1 \cdot 662 - x) - x$. Ao final do terceiro mês a dívida será de $1{,}1[1{,}1(1{,}1 \cdot 662 - x) - x]$. Paga-se a terceira prestação e quita-se a dívida. Logo, podemos escrever:

$$1{,}1[1{,}1(1{,}1 \cdot 662 - x) - x] = x \Longrightarrow x = \text{R\$}\,266{,}20.$$

Problema 62)

Primeira solução

Se antes do almoço toda a turma ceifa $2x$ da roça maior, depois do almoço, na segunda metade do dia de trabalho, a metade da turma ceifa x, terminando o serviço na roça maior, que tem, portanto, $3x$ de área. Enquanto isso (nessa tarde), a outra metade da turma também ceifa x na roça menor, que possui $1{,}5x$ de área (metade da roça maior), restando $0{,}5x$, que foi concluída por apenas 1 ceifeiro. Então, para se ceifar $2x$ em apenas 1 dia de trabalho seriam necessários 4 ceifeiros, e para $2x$ em meio dia de trabalho, 8 ceifeiros (conforme ocorreu na área maior). Logo, havia 8 ceifeiros na turma.

Segunda solução

Considere a frmula $A = t \cdot n \cdot k$, sendo

$$\begin{aligned} A &= \text{área} \\ t &= \text{tempo} \\ n &= \text{número de ceifeiros} \\ k &= \text{taxa de corte por ceifeiro por unidade de tempo} \end{aligned}$$

Adotando a área da maior plantação como sendo $2A$ e a unidade de tempo como $1 =$ meio dia, temos:

$$2A = 1 \cdot n \cdot k + 1 \cdot \frac{n}{2} \cdot k,$$

pois a plantação maior foi cortada durante meio dia por todos os ceifeiros e meio dia por metade deles. Chegamos, então, em $A = k \cdot \frac{3n}{4}$.

Aplicando a fórmula para a menor plantação, resulta:

$$A = 1 \cdot \frac{n}{2} \cdot k + 2 \cdot 1 \cdot k,$$

pois foi cortada durante meio dia por metade dos ceifeiros e durante um dia inteiro por apenas 1 ceifeiro. Chegamos então em $A = k\left(\frac{n}{2} + 2\right)$.

Resolvendo o sistema, temos:

$$\frac{3n}{4} = \frac{n}{2} + 2 \Longrightarrow n = 8 \text{ ceifeiros}.$$

Observação: esta solução nos foi enviada por João Paulo Paterniani da Silva.

Problema 63)

Sejam

x	minha idade atual.
y	sua idade atual.
$x - y$	diferença entre as idades (constante em qualquer época).

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} x &= 2[y - (x - y)] \\ [y + (x - y)] + [x + (x - y)] &= 90 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 40$ e $y = 30$.

Problema 64)

O comprador fica com uma dívida de R 400, 00, que, um mês após, tornou-se R 500, 00. Logo, a taxa de juros é $[(500 - 400)/400] = 25\%$.

Problema 65)

Sejam x e y os tempos de gravação em minutos em SP e LP, respectivamente. Como pode-se gravar duas vezes mais em SP do que em LP, podemos escrever:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 240 \text{ (duração da fita em minutos em LP.)} \\ x + y &= 140 \text{ (duração da gravação do filme em minutos.)} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 100 = 1\,\text{h } 40\,\text{min}$.

Problema 66)
Seja x o tempo (em horas) que falta para terminar o dia e y, o tempo (em horas) que já passou. Podemos escrever:

$$\begin{aligned} x + y &= 24 \quad \text{(duração do dia.)} \\ x &= \frac{2}{3}y \quad \text{(dado do problema.)} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $y = \frac{72}{5} = 14\,\text{h } 24\,\text{min}$.

Problema 67)
Para i um inteiro não-negativo, são quatro os restos possíveis de 3^i numa divisão por 5: 1, 2, 3, ou 4. Considere então $3^4 = 81$, que deixa resto 1 quando dividido por 5. Portanto, 3^4 é da forma $5m + 1$, com m um inteiro. Por outro lado,

$$3^{59} = 3^{56} \cdot 3^3 = (3^4)^{14} \cdot 3^3 = (5m + 1)^{14} \cdot (5 \cdot 5 + 2).$$

Observe agora que, elevando-se qualquer número da forma $(5m + 1)$ a uma potência inteira positiva, resulta num número da mesma forma (veja isso facilmente usando o *teorema do binmio* ou por indução). Ou seja, $(5m + 1)^{14} = 5k + 1$, com k um inteiro.

Assim, 3^{59} será igual ao produto de dois números: $(5k + 1)(5 \cdot 5 + 2)$, que resulta num número da forma $5n + 2$. Portanto, o resto é dois.

Problema 68)
Um sinal volta a fechar 50 segundos mais tarde e o outro, 40 segundos. Eles voltarão a fechar juntos após $t = \text{mmc}(40, 50) = 200$ segundos.

Problema 69)
Seja x_0 o valor de um bem. Com o desconto de 20%, temos: $x_1 = x_0 - 0{,}20x_0 = 0{,}80x_0$. Aplicando agora o desconto de 30% a x_1, resulta:

$$x_2 = x_1 - 0{,}30x_1 = 0{,}70x_1 = 0{,}70 \cdot 0{,}80x_0 = 0{,}56x_0.$$

Logo, os dois descontos são equivalentes a um só de 44%.

Problema 70)

Seja v o volume do tanque. Após uma hora, o tanque terá esvaziado $v/3$ e terá enchido $v/4$, para um total combinado de $v/12$ mais vazio. Assim, ele estará vazio ao final de 12 horas.

Problema 71)

Sejam A o conjunto dos malucos, B o dos inteligentes e C, o dos matemáticos. Pelas premissas 1 e 2, os membros do conjunto C são também membros dos conjuntos A **e** B. Considerando ainda as outras duas premissas e as opções de resposta, vemos que a única válida em qualquer circunstância é a que diz que existe maluco inteligente.

Problema 72)

Os carros aproximam-se a uma velocidade de $60 + 50 = 110\,\text{km/h}$. Como a distância entre eles é de $400\,\text{km}$, o encontro se dará 4 horas após a partida, ou seja, a $4 \times 60 = 240\,\text{km}$ de A.

Problema 73)

a) 4 meias pois as três primeiras poderão ser cada uma de uma cor diferente; mas a quarta obrigatoriamente formará um par com uma das três primeiras.

b) 32 meias pois as trinta primeiras podem ser somente meias pretas e marrons.

Problema 74)

Se a saída estivesse na passagem 1, teríamos duas mensagens verdadeiras: as passagens 1 e 2 estariam dizendo a verdade. Se a saída estivesse na passagem 3, teríamos duas mensagens verdadeiras: as passagens 2 e 3 estariam dizendo a verdade. Se a saída estiver na passagem 2, teremos somente uma mensagem verdadeira: as passagens 1 e 2 estarão mentindo. Assim, a saída encontra-se na passagem 2.

Problema 75)

Primeira solução

Seja y o número de manhãs chuvosas. Então o número de tardes chuvosas é dado por $5-y$. Temos também que o número de manhãs é igual ao de tardes. Logo, podemos escrever:

$$6+y=3+5-y \Longrightarrow y=1.$$

Assim, a viagem teve 7 manhãs e 7 tardes, durando portanto 7 dias.

Segunda solução

	manhãs chuvosas	manhãs não-chuvosas
tardes chuvosas	u	v
tardes não-chuvosas	w	x

Seja d a duração da viagem. Temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} d &= u+v+w+x \\ u &= 0 \\ u+v+w &= 5 \\ v+x &= 6 \\ w+x &= 3 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $2(v+w+x)=14 \Longrightarrow d=7$ dias.

Problema 76)

Seja x o comprimento das cercas perpendiculares ao rio e y, o comprimento da cerca paralela ao rio. Podemos escrever:

$$\begin{aligned} 2x+y &= 180 \quad \text{(comprimento da cerca disponível.)} \\ xy &= A \quad \text{(área do terreno.)} \end{aligned}$$

Temos então que $A=x(180-2x)=2x(90-x)=f(x)$. As raízes x_1 e x_2 da parábola $f(x)$ são $x_1=0$ e $x_2=90$ e sabemos que o valor máximo de $f(x)$ é dado por $x^*=(x_1+x_2)/2$. Logo, o terreno terá dois lados de $45\,\text{m}$ e um lado de $90\,\text{m}$, com área de $4050\,\text{m}^2$.

Problema 77)

Sejam x e y o número de CDs de Jorge e Reniere, respectivamente. Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} x+1 &= 2(y-1) \\ x-1 &= y+1 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 7$ e $y = 5$, ou seja, Jorge tem 7 CDs e Reniere, 5.

Problema 78)

A soma dos algarismos em cada lado do triângulo será dada pela soma (S) dos algarismos nos três lados dividida por três. Calculando S, vem:

$$S = (1+2+3+4+5+6) + 2(7+8+9) = 69.$$

Logo, a soma de cada lado é 23. De posse deste resultado, é fácil preencher os círculos vazios:

Problema 79)

Sejam g e p o número de galhos e pássaros, respectivamente. Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} g &= p-3 \\ 2(g-3) &= p \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $g = 9$ e $p = 12$, ou seja, há no viveiro 12 pássaros e 9 galhos.

Problema 80)

Seja x o número de pombinhas. Com os dados do problema, podemos escrever:

$$2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100 \Longrightarrow x = 36 \text{ pombinhas.}$$

Problema 81)

Sejam

$$\begin{aligned} U &- \text{conjunto de todas as caixas ou conjunto universo} \\ A &- \text{conjunto das caixas com lápis} \\ B &- \text{conjunto das caixas com borrachas} \\ C = A \cap B &- \text{conjunto das caixas com lápis e borrachas} \\ D &- \text{conjunto das caixas onde não há lápis nem borrachas} \end{aligned}$$

A figura abaixo, conhecida como diagrama de Venn, ilustra esta notação:

O número de caixas que contêm lápis ou borrachas (mas podendo conter os dois objetos também; o conectivo "ou" representa uma disjunção inclusiva) é dado por

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ |A \cup B| &= 5 + 4 - 2 = 7 \end{aligned}$$

Como $|U| = 10$ e $|U| = |A \cup B| + |D|$, concluímos que em $10 - 7 = 3$ caixas não há nem lápis nem borrachas.

Problema 82)

Por definição, a velocidade média de um percurso é igual ao quociente entre a distância do percurso e o tempo levado para efetuar o percurso. Assim, se l é o comprimento de cada uma das quatro partes que formam o percurso e t_i, o tempo gasto em cada uma das partes, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{4l}{t_1+t_2+t_3+t_4} \\
t_1 &= \frac{l}{10} \\
t_2 &= \frac{l}{5} \\
t_3 &= \frac{l}{30} \\
t_4 &= \frac{l}{15} \\
\bar{v} &= 10\,\mathrm{km/h}.
\end{aligned}$$

Problema 83)

Sejam $k_i,\ i = 2,3,4,5$ as quantidades de moedas de meio pau, um terço de pau, um quarto de pau e um quinto de pau, respectivamente, que o cidadão possui. A quantia formada será dada por

$$Q = \frac{k_2}{2} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{4} + \frac{k_5}{5}.$$

Como queremos o maior Q sem formar exatamente um pau, fazemos $k_2 = 1$; $k_3 = 2$; $k_4 = 1$; $k_5 = 4$ ou $k_2 = 0$; $k_3 = 2$; $k_4 = 3$; $k_5 = 4$, obtendo $Q = 133/60 = 2\frac{13}{60}$.

Problema 84)

Sabemos que todos os números das cartelas são múltiplos de 3. Façamos a tabela seguinte:

nº da cartela	primeiro nº da cartela	último nº da cartela
1	$0 = 48 \cdot 0$	$45 = 48 \cdot 1 - 3$
2	$48 = 48 \cdot 1$	$93 = 48 \cdot 2 - 3$
3	$96 = 48 \cdot 2$	$141 = 48 \cdot 3 - 3$
4	$144 = 48 \cdot 3$	$189 = 48 \cdot 4 - 3$

Vemos então que o primeiro número ($a_p(n)$) na cartela n é dado por $a_p(n) = 48(n-1)$, e o último ($a_u(n)$) por $a_u(n) = 48n - 3$. A divisão $4935 \div 48$ tem quociente 102 e resto 39. Então, $a_p(103) = 48 \cdot 102 = 4935 - 39 = 4896$. E $a_u(103) = 48 \cdot 103 - 3 = 4941$ (décimo-sexto elemento da cartela de número 103). Portanto, 4935 é o décimo-quarto elemento desta cartela e encontra-se na quarta linha e na segunda coluna.

Problema 85)

A) É obrigada pois o número no cartão é racional. Deve haver um polígono do outro lado.

B) Não é obrigada. Não importa o que há do outro lado.

C) É obrigada. Não pode haver um número racional do outro lado (pois não estamos vendo um polígono).

D) É obrigada. Não pode haver um número racional do outro lado (pois não estamos vendo um polígono).

Problema 86)

Com os dados do problema, construímos a seguinte tabela:

	Artur	Bernardo	César
Carro	xxx	N. Brasília	Santana
Cor	cinza	N. verde	yyy

Concluímos que xxx = Brasília e yyy = verde. Logo, o carro de Bernardo é uma Parati azul.

Problema 87)

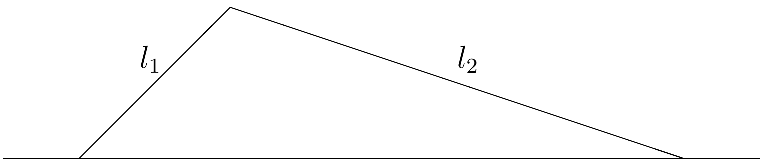
Quanto maior a caixa, menos caixas caberão no galpão. O comprimento da maior aresta (lado do cubo) deverá dividir as três dimensões do paralelepípedo. Se a^* representa o comprimento máximo, então $a^* = \text{mdc}(30, 40, 6) = 2\,\text{m}$. As caixas deverão ocupar o volume do galpão. Logo, $30 \cdot 40 \cdot 6 = 2^3 n \Longrightarrow n = 900$ caixas.

Problema 88)

Com os dados do problema, podemos escrever: $n = 18k + 17$, onde k é um inteiro. Ou, $n = 6 \cdot 3k + 6 \cdot 2 + 5 = 6(3k + 2) + 5 = 6m + 5$, onde m é um inteiro. Logo, o resto da divisão de n por 6 é 5.

Problema 89)

Podemos imaginar que o percurso tem a seguinte forma:



Definimos agora as seguintes variáveis:

l_1	–	comprimento (em km) da subida (descida) na ida (volta)
l_2	–	comprimento (em km) da descida (subida) na ida (volta)
t_1	–	tempo (em h) na subida na ida
t_2	–	tempo (em h) na descida na ida
t_3	–	tempo (em h) na subida na volta
t_4	–	tempo (em h) na descida na volta

Com os dados do problema, podemos escrever:

$$\begin{aligned} l_1 &= 20t_1 \\ l_2 &= 60t_2 \\ l_2 &= 20t_3 \\ l_1 &= 60t_4 \\ t_1 + t_2 &= 1 \\ t_3 + t_4 &= 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $t_1 = 3t_4$ e $t_3 = 3t_2$. Daí resulta $t_1 = 0{,}5\,\mathrm{h}$ e $t_3 = 1{,}5\,\mathrm{h}$. O percurso total será dado $2(l_1 + l_2) = 40(t_1 + t_3) = 80\,\mathrm{km}$.

Problema 90)

Começamos supondo que Ambrósio é o cachorro pintado sem coleira. Obtemos Pafúncio e daí Jeremias. Chegamos a uma contradição com Anacleto e Felisberto.

Ambrósio é então o cachorro branco. Seguindo as condições do problema e supondo que Pafúncio é o cachorro escuro, chegamos à primeira solução:

Pafúncio Anacleto
Jeremias Felisberto
Ambrósio

Seguindo as condições do problema e supondo que Pafúncio é o cachorro pintado, chegamos à segunda solução:

Felisberto	Jeremias
Anacleto	Pafúncio

Ambrósio

Problema 91)

Lembrando que Ultimino vê os outros dois chapéus e Secundino vê o chapéu de Primo, a disposição (Primo, Secundino, Ultimino) nos fornece as seguintes possibilidades:
(cinza, cinza, branco) – Ultimino dará a resposta certa.
(cinza, branco, ?) – Ultimino dirá “não sei” e Secundino responderá certo pois saberia que seu chapéu é diferente do de Primo.
(branco, ?, ?) – Ambos Ultimino e Secundino dirão “não sei”. Assim Primo acertará, como ocorreu na situação exposta pelo problema.
Observação: ? significa qualquer uma das duas cores.

Problema 92)

Primeira solução

Podemos construir o esquema abaixo, onde o número i nos retângulos representa a casa de número i.

Josimar	$\boxed{30}$	$\boxed{x-1}$	$\boxed{x}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$
Felipe	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$

Assim, $x-1=31$ e concluímos que há 32 casas na praça.

Segunda solução

Sejam F_n e J_n respectivamente as n-ésimas casas de Felipe e Josimar. De J_5 a J_{30} exclusive, existem $30-5-1=24$ casas. De F_5 a F_{12} exclusive, existem $12-5-1=6$ casas. Logo, no total existem $24+6+2=32$ casas.
Observação: esta solução foi reproduzida da Revista Eureka! # 4, março de 1999.

Problema 93)

Sejam b o número de bípedes e q, o de quadrúpedes. Com os dados do problema, podemos escrever:

$$2b + 4q = 22 \Longrightarrow b + 2q = 11.$$

Donde se conclui que b é ímpar. Mas b não pode ser 1, pois há um casal de corujas, e também não pode ser maior que ou igual a 5, pois deve-se ter $b < q$.

Logo, há 3 bípedes e 4 quadrúpedes no minizôo.

Problema 94)

Sejam

a_1	–	proporção de álcool no primeiro tambor.
g_1	–	proporção de gasolina no primeiro tambor.
a_2	–	proporção de álcool no segundo tambor.
g_2	–	proporção de gasolina no segundo tambor.
x	–	quantidade de litros retirados do primeiro tambor.
y	–	quantidade de litros retirados do segundo tambor.

A quantidade q de litros de álcool retirados dos dois tambores é dada por

$$q = a_1x + a_2y.$$

Sabemos que $a_1 = 120/300 = 2/5$, $a_2 = 90/120 = 3/4$ e que $x + y = 140$. Como deseja-se ter $q = 70$, podemos escrever:

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}(140 - x) = 70 \Longrightarrow x = 100.$$

Logo, devemos retirar 100 litros do primeiro tambor e 40 litros do segundo.

Problema 95)

Começamos com a seguinte tabela:

Carro	xxx	xxx	xxx	xxx	xxx	xxx	xxx	xxx
Cor	yyy	yyy	yyy	yyy	yyy	yyy	yyy	yyy

Com os dados dos itens 4), 5) e 6), podemos escrever:

Carro	Williams	xxx	xxx	xxx	xxx	xxx	xxx	Tyrrell
Cor	yyy	verde	yyy	yyy	yyy	amarelo	preto	yyy

Usando os dados dos outros itens, chegamos à posição final:

Carro	Williams	McLaren	Benetton	Ferrari	Stewart	Lotus	Jordan	Tyrrell
Cor	azul	verde	vermelho	creme	cinza	amarelo	preto	marrom

Problema 96)

A grandeza "poder aquisitivo" (a) é diretamente proporcional à grandeza "salário" (s) e inversamente proporcional à grandeza "preços" (p), ou seja, $a = s/p$.

Inicialmente, tem-se $a_0 = s_0/p_0$. Com as mudanças no salário e preços, resulta:

$$a_1 = \frac{s_1}{p_1} = \frac{1{,}26s_0}{1{,}2p_0} = 1{,}05\frac{s_0}{p_0} = 1{,}05a_0 = 105\%a_0.$$

Logo, o seu poder aquisitivo aumenta de 5%.

Problema 97)

Sejam x a quantidade de peixes pescados por João e seu filho (por cada um), $3y$ a quantidade de peixes pescados por Luís e y, a quantidade pescada pelo filho de Luís. O total de peixes pescados foi 35. Assim, $x+x+y+3y = 35$. Logo, o lado esquerdo da equação é um número par e não havia quatro pessoas na pescaria. Concluímos que João é filho de Luís.

Assim, sabemos que $x+x+3x = 35 \Longrightarrow x = 7$. Então, as quantidades pescadas por cada um foram:

João	–	7 peixes.
Luís	–	21 peixes.
Vasco	–	7 peixes.

Problema 98)

Pelas propriedades de potências, podemos escrever:

$$\begin{aligned} 2^{60} = (2^3)^{20} &= 8^{20} \\ 3^{40} = (3^2)^{20} &= 9^{20} \\ 7^{20} &= 7^{20}. \end{aligned}$$

E $7^{20} < 8^{20} < 9^{20}$. Logo, $7^{20} < 2^{60} < 3^{40}$.

Problema 99)

Sejam

x – comprimento do braço esquerdo
y – comprimento do braço direito
m – massa (em kg) de um tijolo

Com a balança em equilíbrio, tem-se que os "pesos" são diretamente proporcionais aos comprimentos dos braços correspondentes, dando:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= 8m \cdot y \\ 2m \cdot x &= 1 \cdot y \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros, resulta:

$$\frac{1}{2m} = 8m \therefore m = \frac{1}{4} = 0{,}25\,\mathrm{kg}$$

Problema 100)

Sejam

v_j – velocidade (em nº de páginas por hora) do trabalho de Jacira
v_k – velocidade (em nº de páginas por hora) do trabalho de Joana
n_j – número de páginas que Jacira deve datilografar
n_k – número de páginas que Joana deve datilografar
t_j – tempo (em hora) para Jacira datilografar suas páginas
t_k – tempo (em hora) para Joana datilografar suas páginas

Sabemos que $n_j + n_k = 900$, $v_j = 5$, $v_k = 4$, $t_j = n_j/v_j$ e $t_k = n_k/v_k = (900 - n_j)/v_k$. Como queremos que as duas terminem juntas, devemos ter $t_j = t_k$. Assim,

$$\frac{n_j}{5} = \frac{900 - n_j}{4} \Longrightarrow n_j = 500.$$

Assim, Jacira deverá pegar 500 páginas e Joana, a mais lenta, 400.