MANUAL DE DERIVADAS

LUÍS LOPES

EDUARDO MORAIS

MANUAL DE DERIVADAS

MANUAL
DE
DERIVADAS

Luís Lopes

Eduardo Morais

QED TEXTE

Composição com LaTeX:
Eduardo Morais e **Luís Lopes**

Capa:
Luiz Cavalheiros

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVRO, RJ.

L854m

Lopes, Luís, 1953-
Manual de Derivadas
Luís Lopes, Eduardo Morais. - Rio de Janeiro : L. Lopes : E. Morais, 2004
80 p.

Inclui bibliografia.
ISBN 85-901503-3-X

1. Análise matemática. 2. Funções (Matemática). 3. Cálculo (Matemática)
4. Análise matemática - Problemas, questões, exercícios.
5. Funções (Matemática) - Problemas, questões, exercícios.
6. Cálculo (Matemática) - Problemas, questões, exercícios.

I. Morais, Eduardo. II. Título.

04-1177. CDD_515
CDU_519

Nesta obra, o gênero masculino é empregado a título epiceno.

Depósito legal na Biblioteca Nacional - segundo trimestre 2004

Impresso no Brasil

Printed in Brazil

Luís Lopes
Praia de Botafogo, 440 Sala 2401
Botafogo Rio de Janeiro, RJ
22250–040

Fax: (0XX21) 2536 6318

E-mail: qed_texte@hotmail.com

Eduardo Morais
341, Marcoux
Île Bizard Montréal, QC
H9C 2S3 Canada

Tel.: (514) 297 6225

E-mail: qed.texte@sympatico.ca

Ao Paulo *(in memoriam)*, Fernando e Fábio
que são tios e amigos. (Luís Lopes)

À Sônia cujo amor fez derivar este livro.
(Eduardo Morais)

APRESENTAÇÃO

Este livro foi escrito pensando tanto no leitor que estuda o assunto pela primeira vez quanto naquele que gostaria de encontrar em um só volume uma coletânea de definições e fórmulas que costumam ser obtidas somente após consultas a diversas obras.

O volume é dividido em duas partes distintas. Na primeira, expõe-se a teoria freqüentemente encontrada na literatura sobre o assunto e, na segunda, propõem-se setenta e cinco exercícios, muitos dos quais subdivididos em outros três, selecionados de modo a que sejam resolvidos aplicando-se os conhecimentos adquiridos com a primeira parte. Dessa forma, o leitor poderá acompanhar seu próprio progresso e perceber suas dúvidas e dificuldades. Ocasionalmente, alguns exercícios, como os vigésimos sexto e sétimo, exigirão mais do leitor e servirão para o desenvolvimento e a introdução de novos resultados.

As soluções detalhadas de todos os exercícios encontram-se no capítulo que segue os enunciados dos mesmos. Assim, o estudante e o professor à procura de novos exemplos e exercícios terão farto material a sua disposição.

Por tratar de um assunto fundamental à formação de qualquer profissional que lide com números, gráficos, variações e modelos matemáticos de modo geral, a obra certamente será útil aos estudantes de Engenharia, Matemática, Física, Informática, Economia e outras disciplinas que se valem de um curso básico de Cálculo.

Os autores

PREFÁCIO

Este manual foi escrito com o objetivo de servir a todo tipo de leitor. O leitor que já estudou os temas aqui tratados utilizará o manual quando precisar rever uma definição ou fórmula, consultando somente as partes teóricas do volume (capítulos 1 a 3) ou os exercícios propostos. O leitor que estuda o assunto pela primeira vez deve ler este manual com o apoio de um livro-texto. *Este manual foi escrito para suportar e aprofundar os temas tratados previamente por um livro-texto.*

A experiência como estudante e professor nos ensinou que o melhor modo de assimilar um tópico em Matemática é através da resolução de exercícios — e muitos! Constatamos, no entanto, que os livros-texto não têm as *soluções* para os exercícios propostos e, freqüentemente, nem mesmo as respostas. Por não estar certo do seu raciocínio, o estudante se vê frustrado em seus esforços de compreensão ao pensar ter resolvido um exercício, ou então, após passar um certo tempo tentando resolvê-lo, permanece sem conhecer a solução do "quebra-cabeça". Assim, nosso intuito foi o de fornecer as soluções (completas) a todos os exercícios propostos.

O manual apresenta, no início, de um modo bem conciso, as noções e fórmulas usuais na literatura do assunto, propondo em seguida uma série de exercícios, muitos dos quais subdivididos em outros três, para que o leitor possa aplicar os conceitos introduzidos previamente. Os exercícios tentam seguir um certo grau de dificuldade, mas o objetivo foi o de agrupá-los por assunto, de maneira que um resultado obtido num dado exercício possa vir a ser aplicado, como resultado parcial, num exercício posterior. As soluções dos exercícios aparecem após o enunciado global dos mesmos, antecedendo o apêndice, o qual inclui uma breve introdução sobre limites de funções e uma lista de fórmulas de integração. A bibliografia e referências encerram o volume.

Luís Lopes e Eduardo Morais

Rio de Janeiro, RJ
Junho, 2004.

SUMÁRIO

Capítulo 1

DERIVADAS

1.1 Definição de derivada num ponto

Seja f uma função real de variável real x definida num certo intervalo $\mathcal{I}$ tal que $y = f(x)$. Consideremos um ponto qualquer $x_0 \in \mathcal{I}$. Dizemos que f é derivável em relação à variável x no ponto x_0 se existir o limite do quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.1}$$

quando $h \to 0$ ou $x \to x_0$, onde $h = x - x_0 \neq 0$. No caso afirmativo, tal limite chama-se a *derivada* de f no ponto x_0 e é representado por $f'(x_0)$.

A derivada, sendo definida como um limite, tem, portanto, um caráter local, cujo valor difere do quociente em (1.1) por um erro que depende de Δx, ou seja, quando Δx é bem pequeno, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)$, com $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Assim, dado o acréscimo Δx, podemos escrever o acréscimo correspondente Δy da seguinte forma:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Com isso, numa vizinhança bem pequena de x_0, é possível expressar f como um polinômio (de grau ≤ 1) em Δx mais um resto, considerado desprezível:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + r(\Delta x) \tag{1.2}$$

1.2 Significado geométrico

Sejam a curva C o gráfico da função f e x_0 um ponto qualquer do seu domínio. A interpretação geométrica da derivada é dada a seguir:

> *a derivada de f em x_0 representa o coeficiente angular da reta tangente à curva C no ponto $\big(x_0, f(x_0)\big)$.*

De acordo com a figura 1.2, a inclinação da reta tangente pode ser considerada como o limite das inclinações das retas secantes que passam pelos pontos $\big(x, f(x)\big)$ e $\big(x_0, f(x_0)\big)$ quando $x \to x_0$.

Capítulo 2

FÓRMULAS DE DERIVAÇÃO

2.1 Função constante

Seja $y = f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{k-k}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 0} \tag{2.1}$$

2.2 Função identidade

Seja $y = I(x) = x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 1} \tag{2.2}$$

Como $dy = f'(x)\,\Delta x = 1 \times \Delta x = \Delta x$, pondo $dx = dy$ implica que $dx = \Delta x$. Esta é a diferencial da variável independente quando $y = f(x)$. Reescrevendo (1.2) como $dy = f'(x)\,dx$, a equivalência (1.2) é verificada pela igualdade: $\frac{dy}{dx} = f'(x) = dy/dx$. O 1º membro da 1ª igualdade é uma notação da função derivada, enquanto que o 2º membro da 2ª igualdade, um quociente de diferenciais, como pode ser visto com o auxílio das duas equações acima:

de (2.1), $dy = 0 \times dx = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 0 = dy/dx$;

de (2.2), $\frac{dy}{dx} = 1 = dx/dx = dy/dx$.

Capítulo 3

TÓPICOS ESPECIAIS

3.1 Derivada logarítmica

A derivada logarítmica da função u, expressa como $\frac{u'}{u}$, é usada para facilitar o cálculo de u' valendo-se das propriedades do logaritmo *natural* e sua derivada.

Exemplos:

1) Produto de funções

Seja $y = f(x) = u_1(x)u_2(x)\ldots u_n(x)$, $u_i \neq 0$, $\forall i$, $i = 1, \ldots, n$.

Aplicando-se o logaritmo natural, vem:

$$\ln y = \ln f(x) = \ln(u_1 u_2 \ldots u_n)$$

Usando a propriedade do logaritmo do produto, obtemos:

$$\ln y = \ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln u_n$$

Derivando ambos os membros e valendo-se das fórmulas (2.2) e (2.2) resulta:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \cdots + \frac{u_n'}{u_n}$$

$$y' = u_1 u_2 \ldots u_n \left(\frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \cdots + \frac{u_n'}{u_n}\right)$$

$$y' = u_1' u_2 \ldots u_n + u_1 u_2' \ldots u_n + \cdots + u_1 u_2 \ldots u_n'$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u_1 u_2 \ldots u_n) = u_1' u_2 \ldots u_n + u_1 u_2' \ldots u_n + \cdots + u_1 u_2 \ldots u_n'} \tag{3.1}$$

Capítulo 4

EXERCÍCIOS

Calcule as derivadas das funções dadas nos exercícios 1 a 25, simplificando as respostas sempre que possível. Para não sobrecarregar o texto, é deixado a cargo do leitor determinar o domínio das funções. Exemplos, $y = \sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0$, $\ln x \Rightarrow x > 0$ e $1/x \Rightarrow x \neq 0$. Assuma também que $m, n \in \mathbb{N}$.

Exercício **1)**

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 5$
b) $y = ax^2 + bx - c$
c) $y = (a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x + a_0)^8$

Exercício **2)**

a) $y = (\frac{1}{2}x^2 + x - 7)^3$
b) $y = \sqrt{1+x}$
c) $y = \sqrt[3]{ax^2 + bx + c}$

Exercício **3)**

a) $y = \sqrt[4]{3x^3 + x^2 + 1}$
b) $y = (x^2 + 1)(x - 1)$
c) $y = (a + x)^m (b + x)^n$

Exercício **4)**

a) $y = (x + a)\sqrt{a - x}$
b) $y = x^2\,\sqrt{2x}$
c) $y = x^m\,\sqrt[4]{(b + x)^n}$

Exercício **5)**

a) $y = 1/x$
b) $y = k/(1 - x)^3$
c) $y = 1/x^n$

Exercício **6)**

a) $y = \dfrac{x^2}{2\,(x+1)}$
b) $y = (x + 1)/(x - 1)$
c) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$

Exercício **7)**

a) $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{Ax^2 + Bx + C}$
b) $y = \dfrac{2x^2 + x + 3}{3(x^2 + 5x + 1)}$
c) $y = 2x/(x^2 + 1)$

Exercício **8)**

a) $y = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^m$
b) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
c) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$

Exercício **9)**

a) $y = \ln x$
b) $y = \ln(\ln x)$
c) $y = \ln(x^2 + e^x)$

Exercício **70)**

a) Seja $y = \operatorname{Arctanh} x$. Calcule y' pelo método apresentado na seção 3.1;

b) Seja $f(x) = \tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Mostre que $g(x) = f^{-1}(x) = \operatorname{Arctanh} x =$ $= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Calcule $g'(x)$ e verifique o resultado do item a).

Exercício **71)**

a) Mostre que a função $y = f(x) = 2 + \sqrt{4-x^2}$ possui uma função inversa $x = g(y)$ no intervalo $0 < x < 2$. Sendo $f(\sqrt{3}\,) = 3$, calcule $g(3)$ e $g'(3)$;

b) Mostre que $g(y) = \sqrt{4y - y^2}$. Calcule $g(3)$, $g'(y)$, $g'(3)$ e verifique os resultados do item a);

c) Calcule y' usando a fórmula da derivada da função inversa.

Exercício **72)** Mostre que $f(x) = \frac{4\,x^3}{x^2+1}$ possui uma inversa e calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

Exercício **73)** Seja $f(x) = x\sqrt{3+x^2}$. Calcule $\left(f^{-1}\right)'(-2)$.

Exercício **74)** Sejam f uma função contínua e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) = (ax^2 + bx + c)f(x)$$

Se $f(0) = c$ e $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-c}{x} = b$, calcule $g'(0)$.

Exercício **75)** Resolva a equação $y' + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}} = 0$.

Sugestão: considere $t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\,\right)$ como variável independente.

Nota:

Equações do tipo $y' + ky = 0$ são chamadas *equações diferenciais de* 1ª *ordem*, por envolver apenas derivadas de 1ª ordem, cuja solução tem a forma geral:

$$y = c\,e^{-kx}, \text{ com } c, k \in \mathbb{R}\,.$$

Com efeito, sendo $y \neq 0$, tem-se $\frac{y'}{y} = -k = \frac{d}{dx}(\ln y)$ ou $d(\ln y) = -k\,dx$.
Aplicando a antidiferenciação em $d(\ln y)$, resulta: $\ln y = -k\,x + b$.
Assim, $y = e^{-kx+b} = e^b\,e^{-kx}$. Pondo $c = e^b$, tem-se a forma geral acima.

Capítulo 5

SOLUÇÕES

Exercício 1)

Fórmulas usadas: (2.1) – (2.2) e (2.2).

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 5$

$$\begin{aligned} y' &= (2x^3 - 3x^2 + 6x - 5)' \\ &= (2x^3)' - (3x^2)' + (6x)' - (5)' \\ &= 2(x^3)' - 3(x^2)' + 6x' - 0 \\ &= 6x^2x' - 6xx' + 6x' \\ &= 6\,(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

b) $y = ax^2 + bx - c$

$$\begin{aligned} y' &= (ax^2 + bx - c)' \\ &= (ax^2)' + (bx)' - (c)' \\ &= a(x^2)' + bx' - 0 \\ &= 2axx' + bx' = 2ax + b \end{aligned}$$

c) $y = (a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x + a_0)^8$

$$u = a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x + a_0$$

$$u' = 3a_3x^2 - 2a_2x - a_1$$

$$y = u^8 \Longrightarrow y' = 8\,u^7u'$$

$$\begin{aligned} y' = 8\,(3a_3x^2 - 2a_2x - a_1) \times \\ \times\,(a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x + a_0)^7 \end{aligned}$$

Se $y = f(x)$ é um polinômio de grau n:

$$y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

então sua derivada y' é dada por:

$$y' = n\,a_n\,x^{n-1} + \cdots + a_1 \qquad (5.1)$$

Exercício 2)

a) $y = (\frac{1}{2}x^2 + x - 7)^3$

$$u = \tfrac{1}{2}x^2 + x - 7 \overset{(5.1)}{\Longrightarrow} u' = x + 1$$

$$y = u^3 \overset{(2.2)}{\Longrightarrow} y' = 3u^2u'$$

$$y' = 3\,(x+1)\,(\tfrac{1}{2}x^2 + x - 7)^2$$

b) $y = \sqrt{1+x}$

$$u = 1 + x \ \therefore\ u' = 1$$

$$y = u^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow y' = \tfrac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,u'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

Usando também a fórmula (2.2):

$$y' = (\sqrt{1+x})' = \frac{\sqrt{1+x}}{2\,(1+x)}$$

c) $y = \sqrt[3]{ax^2 + bx + c}$

$$u = ax^2 + bx + c \ \therefore\ u' = 2ax + b$$

$$y = \sqrt[3]{u} \overset{(2.2)}{\Longrightarrow} y' = \frac{\sqrt[3]{u}}{3\,u}\,u'$$

$$y' = \frac{(2ax+b)\sqrt[3]{ax^2+bx+c}}{3\,(ax^2+bx+c)}$$

Exercício 3)

a) $y = \sqrt[4]{3x^3 + x^2 + 1}$

$$u = 3x^3 + x^2 + 1 \;\therefore\; u' = 9x^2 + 2x$$

$$y = \sqrt[4]{u} \implies [(2.2)]$$

$$y' = \frac{(9x^2 + 2x)\sqrt[4]{3x^3 + x^2 + 1}}{4\,(3x^3 + x^2 + 1)}$$

b) $y = (x^2 + 1)\,(x - 1)$

$$u = x^2 + 1 \qquad v = x - 1$$

$$u' = 2x \qquad v' = 1$$

$$y = u\,v \stackrel{(2.2)}{\Longrightarrow} y' = u\,v' + u'\,v$$

$$y' = (x^2 + 1) + 2x\,(x - 1)$$

$$= 3x^2 - 2x + 1$$

c) $y = (a + x)^m\,(b + x)^n$

$$u = a + x \quad v = b + x \quad u' = v' = 1$$

$$y = u^m v^n \implies [(2.2) \text{ e } (2.2)]$$

$$y' = u^m(nv^{n-1}v') + (mu^{m-1}u')\,v^n$$

$$= n(a+x)^m(b+x)^{n-1} + m(a+x)^{m-1}(b+x)^n$$

$$= (a+x)^{m-1}(b+x)^{n-1}[n(a+x) + m(b+x)]$$

Exercício 4)

a) $y = (x + a)\sqrt{a - x}$

$$u = x + a \qquad v = \sqrt{a - x}$$

$$u' = 1 \qquad v' = -\frac{\sqrt{a - x}}{2(a - x)}$$

$$y = u\,v \;\therefore\; y' = -\frac{(x + a)\sqrt{a - x}}{2(a - x)} + \sqrt{a - x}$$

b) $y = x^2\sqrt{2x}$

$$u = x^2 \qquad v = \sqrt{2x}$$

$$u' = 2x \qquad v' = \frac{\sqrt{2x}}{2x}$$

$$y = u\,v \Longrightarrow y' = uv' + u'v$$

$$y' = x^2\,\frac{\sqrt{2x}}{2x} + 2x\sqrt{2x}$$

$$= \frac{5x\sqrt{2x}}{2}$$

c) $y = x^m\,\sqrt[4]{(b + x)^n}$

$$u = x^m \qquad v = \sqrt[4]{(b + x)^n}$$

$$u' = mx^{m-1} \qquad v' = \frac{n\,(b+x)^{n-1}\sqrt[4]{(b+x)^n}}{4\,(b+x)^n}$$

$$y = u\,v \Longrightarrow y' = u\,v' + u'\,v$$

$$y' = \frac{x^m n(b+x)^{n-1}\sqrt[4]{(b+x)^n}}{4(b+x)^n} + mx^{m-1}\sqrt[4]{(b+x)^n}$$

$$= \frac{x^{m-1}(b+x)^{n-1}\sqrt[4]{(b+x)^n}\,[(4m+n)x+4mb]}{4\,(b+x)^n}$$

Exercício 5)

a) $y = \dfrac{1}{x}$

$$y = x^{-1} \stackrel{(2.2)}{\Longrightarrow} y' = -1(x)^{-1-1}$$

$$= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Usando também a fórmula (2.2):

$$u = 1 \text{ e } v = x$$

$$y' = \frac{0 - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

b) $y = \dfrac{k}{(1 - x)^3}$

$$u = k \qquad v = (1 - x)^3$$

$$u' = 0 \qquad v' = 3(1 - x)^2(1 - x)'$$

$$= -3(1 - x)^2$$

$$y = \frac{u}{v} \Longrightarrow y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{3k}{(1 - x)^4}$$

c) $y = \dfrac{1}{x^n}$

$$y = x^{-n} \Longrightarrow y' = -nx^{-n-1}(x)'$$

$$= -nx^{-(n+1)}$$

$$= -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Exercício 6)

a) $y = x^2/2\,(x+1)$

$$u = x^2 \qquad v = 2\,(x+1)$$
$$u' = 2x \qquad v' = 2$$

$$y = \frac{u}{v} \Longrightarrow y' = \frac{2\,(x+1)\,2x - x^2\cdot 2}{4\,(x+1)^2} = \frac{x\,(x+2)}{2\,(x+1)^2}$$

b) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

$u = x+1,\ v = x-1\ \therefore\ u' = v' = 1$

$$y = \frac{u}{v} \Longrightarrow y' = \frac{(x-1)\,1 - (x+1)\,1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

c) $y = x^2/\sqrt{1+x}$

$$u = x^2 \qquad v = \sqrt{1+x}$$
$$u' = 2x \qquad v' = \frac{\sqrt{1+x}}{2\,(1+x)}$$

$$y' = \frac{2x\sqrt{1+x} - x^2\,\frac{\sqrt{1+x}}{2(1+x)}}{1+x} = \frac{x\sqrt{1+x}\,(4+3x)}{2\,(1+x)^2}$$

Exercício 7)

a) $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{Ax^2+Bx+C}$

$$u = ax^2+bx+c \qquad u' = 2ax+b$$
$$v = Ax^2+Bx+C \qquad v' = 2Ax+B$$
$$v\,u' = (Ax^2+Bx+C)\,(2ax+b)$$
$$u\,v' = (ax^2+bx+c)\,(2Ax+B)$$

$$y' = \frac{(aB-Ab)x^2+2(aC-Ac)x+(bC-Bc)}{(Ax^2+Bx+C)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ B & C \end{vmatrix}}{(Ax^2+Bx+C)^2}$$

b) $y = \dfrac{2x^2+x+3}{3(x^2+5x+1)}$ $\left(=\frac{1}{3}\frac{2x^2+x+3}{x^2+5x+1}\right)$

$$y' = \frac{1}{3}\,\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{(x^2+5x+1)^2} = \frac{9x^2-2x-14}{3\,(x^2+5x+1)^2}$$

c) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\left(=\frac{0x^2+2x+0}{x^2+0x+1}\right)$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

Exercício 8)

a) $y = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^m$

$$u = \frac{x}{1-x}\ \therefore\ u' = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$y = u^m \Longrightarrow y' = \frac{m\,x^{m-1}}{(1-x)^{m+1}}$$

b) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

$$u = \frac{x+1}{x-1} \overset{\text{Ex.6b}}{\Longrightarrow} u' = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{2\cdot\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{(-2)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$

$$u = \sqrt{x^2+1} \qquad v = \sqrt[3]{x-1}$$
$$u' = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} \qquad v' = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{3(x-1)}$$

$$y' = \frac{\sqrt[3]{x-1}\,\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} - \sqrt{x^2+1}\,\frac{\sqrt[3]{x-1}}{3\,(x-1)}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{(2x^2-3x-1)\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{(x-1)^2}}{3\,(x^2+1)(x-1)^2}$$

Apêndice

A

LIMITES DE FUNÇÕES

Sendo a derivada de uma função definida como um limite, pareceu-nos conveniente tratar do assunto a fim de preencher esta lacuna, dando a esta obra um caráter mais completo, sem querer, no entanto, dissertar profundamente sobre o tema, o qual pode ser visto com mais detalhes na literatura de Análise Matemática e/ou Cálculo I.

Vamos nos restringir, portanto, à definição de limite de uma função e aos resultados úteis a uma melhor compreensão do presente manual.

A.1 Definição de limite de uma função

A noção de limite surge quando estamos interessados em saber como se comporta uma função $f\colon \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ próxima de um ponto $a \notin \mathcal{I}$. Para isso, tomamos uma pequena vizinhança $\mathcal{V}$ centrada em a e de raio δ, $\mathcal{V} = (a-\delta, a+\delta)$. Contudo, avaliar $f(x)$ em $\mathcal{V}$ significa que devemos restringir $\mathcal{V}$ aos pontos $x \in \mathrm{Dom}\,(f)$, ou seja, devemos tomar $\mathcal{V}_\delta = \mathcal{I} \cap \mathcal{V} = \{x \in \mathcal{I} : 0 < |x-a| < \delta\}$ ao invés de $\mathcal{V}$. A questão que se põe então é: ao aproximar de a os pontos $x \in \mathcal{V}_\delta$, os valores $f(x)$ se aproximam de um ponto $L \in \mathrm{Im}\,(f)$? Se existe o número real L, este é o *limite de $f(x)$ quando x tende para a* e escreve-se $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Quanto mais próximo x de a, mais próximo $f(x)$ estará de L. Assim, dada uma pequena vizinhança $\mathcal{V}_\epsilon \subset \mathrm{Im}\,(f)$ centrada em L e de raio ϵ, $\mathcal{V}_\epsilon = (L-\epsilon, L+\epsilon)$, devemos ser capazes de exibir uma vizinhança $\mathcal{V}$ tal que $f(\mathcal{V}_\delta) \subset \mathcal{V}_\epsilon$.

Definição: *Seja $f\colon \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \;\; se \;\; \forall\, \mathcal{V}_\epsilon,\ \exists\, \mathcal{V}_\delta \;\; tal\ que\ x \in \mathcal{V}_\delta \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{V}_\epsilon.$$

Observações:

1. Se $a \in \mathcal{I}$, não se tem necessariamente $f(a) = L$. Contudo, quando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ diz-se que f é *contínua*;
2. Se $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, indica-se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$;
3. Limites laterais de $f(x)$ quando x tende para a: $\begin{cases} \textit{limite à direita}\colon \; \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \\ \textit{limite à esquerda}\colon \; \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \end{cases}$

   sendo que $|x-a|$ em $\mathcal{V}_\delta$ torna-se $(x-a)$ quando $x \to a^+$ e $(a-x)$ quando $x \to a^-$;
4. O número real δ depende do número real ϵ .

Apêndice
B

FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO

B.1 Definição de integral indefinida

A antiderivada de uma função f é também chamada *integral indefinida*. O objetivo deste apêndice é o de exibir algumas integrais indefinidas com o auxílio dos resultados descritos nesta obra. A definição ao final do capítulo 1 é reescrita a seguir.

Seja f definida em um intervalo aberto $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$.

Definição: *$F(x) = \int f(x)\,dx$ é a integral indefinida de f em $\mathcal{I}$, se $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x,\, x \in \mathcal{I}$.*

Teorema: *Se $f'(x) = 0$, $\forall\, x,\, x \in \mathcal{I}$, então f é constante em $\mathcal{I}$.*

Demonstração:

Supondo que f não seja constante em $\mathcal{I}$, existem $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ com $x_1 < x_2$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por hipótese, $f'(x) = 0$, $\forall\, x,\, x \in [x_1, x_2]$. Portanto, f é contínua em $[x_1, x_2]$ e, pelo *Teorema do Valor Médio*, $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad \text{(absurdo!)} \qquad \blacksquare$$

Teorema: *Se $f'(x) = g'(x)$, $\forall\, x,\, x \in \mathcal{I}$, então $\exists\, k,\, k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$, $\forall\, x,\, x \in \mathcal{I}$.*

Demonstração:

Fazendo $h(x) = f(x) - g(x)$ tem-se, por hipótese, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, $\forall\, x,\, x \in \mathcal{I}$. Do teorema anterior, $\exists\, k,\, k \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = k$, $\forall\, x,\, x \in \mathcal{I}$. $\blacksquare$

Este resultado implica o seguinte

Teorema: *Se $F(x) = \int f(x)\,dx$ então $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, é a antiderivada mais geral de f.*

Demonstração:

Seja $G(x) \neq F(x)$ outra antiderivada de f em $\mathcal{I}$. Por definição, $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Portanto, do teorema anterior, $\exists\, C,\, C \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = F(x) + C$, $\forall\, x,\, x \in \mathcal{I}$. $\blacksquare$

B.2 Funções logaritmo e exponencial

1) $y = \ln|u| \overset{\text{Ex.29}}{\Longrightarrow} y' = \dfrac{u'}{u}$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

2) $y = u \ln u \overset{\text{Ex.10b}}{\Longrightarrow} y' = (1 + \ln u)\, u'$

$$\int \ln u\, du = u \ln u - u + C$$

3) $\dfrac{1}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a\,(u-a)} - \dfrac{1}{2a\,(u+a)}$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2\,a} \int \frac{du}{u-a} - \frac{1}{2\,a} \int \frac{du}{u+a}$$

$$= \tfrac{1}{2\,a}\big(\ln|u-a| - \ln|u+a|\big) + C$$

$$= \tfrac{1}{2\,a} \ln\left|\tfrac{u-a}{u+a}\right| + C, \quad u \neq a \neq 0$$

4)

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = -\tfrac{1}{2\,a} \ln\left|\tfrac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$= \tfrac{1}{2\,a} \ln\left|\tfrac{u+a}{u-a}\right| + C$$

5) $y = a^u \overset{(2.2)}{\Longrightarrow} y' = a^u\,(\ln a)\, u'$

$$\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

6) $y = e^u \overset{(2.2)}{\Longrightarrow} y' = e^u\, u'$

$$\int e^u\, du = e^u + C$$

7) $y = u\, e^u \Longrightarrow y' = (1 + u)\, e^u\, u'$

$$\int u\, e^u\, du = e^u\,(u - 1) + C$$

B.3 Funções trigonométricas

Identidades trigonométricas:

a.1) $(1 + \tan^2 u = \sec^2 u) \equiv (\sin^2 u + \cos^2 u = 1) \equiv (\cot^2 u + 1 = \csc^2 u)$

a.2) $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 1 - 2\sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = \dfrac{2}{\sec^2 u} - 1 = \dfrac{1 - \tan^2 u}{1 + \tan^2 u}$

a.3) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\, \tan\beta}$ $[\tan 0 = 0 \Rightarrow \tan(-\beta) = -\tan\beta\,;\ \tan\frac{\pi}{4} = 1]$

8) $y = \cos u \overset{(2.2)}{\Longrightarrow} y' = -\sin u\, u'$

$$\int \sin u\, du = -\cos u + C$$

9) $y = \sin u \overset{(2.2)}{\Longrightarrow} y' = \cos u\, u'$

$$\int \cos u\, du = \sin u + C$$

10) $v = \cos u \Longrightarrow dv = -\sin u\, du$

$$\int \tan u\, du = \int \frac{\sin u}{\cos u}\, du = -\ln|\cos u| + C$$

$$= \ln|\sec u| + C$$

11) $v = \sin u \Longrightarrow dv = \cos u\, du$

$$\int \cot u\, du = \int \frac{\cos u}{\sin u}\, du = \ln|\sin u| + C$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, G. 1979. *Cálculo Diferencial e Integral III*. LTC.

Leithold, L. 1994. *O Cálculo com Geometria Analítica*. Vol. 1. HARBRA.

Lima, E. L. 1982. *Curso de Análise*. Vol. 1. Projeto Euclides.

Lopes, L. 1992. *Manual de Trigonometria*. EDC.

Lopes, L. 1999. *Manual das Funções Exponenciais e Logarítmicas*. Interciência.

Suas observações e descobertas

Aos nossos leitores

Os autores gostariam de conhecer sua opinião sobre a apresentação e o conteúdo deste manual. Escreva para:

Luís Lopes
Praia de Botafogo, 440 Sala 2401
Botafogo Rio de Janeiro, RJ
22250–040

ou

E-mails: qed_texte@hotmail.com
qed.texte@sympatico.ca

Os mesmos endereços podem ser utilizados para a solicitação de outros exemplares e títulos.

Outras obras já publicadas por Luís Lopes:

- ☞ Manual das Funções Exponenciais e Logarítmicas
- ☞ Manual de Indução Matemática
- ☞ Manual de Progressões
- ☞ Manual de Seqüências e Séries
- ☞ Manual de Trigonometria

E ainda:

- ☞ É Divertido Resolver Problemas (com Josimar Silva)

Amostras do conteúdo de todos os títulos estão disponíveis para *download* em:

`<www.escolademestres.com/qedtexte>`