Capa:
Cleber Luiz

Composição:
Interciência

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

L854m

Lopes, Luís
Manual das funções exponenciais e logarítmicas / Luís Lopes. – Rio de Janeiro: Interciência, 1998
132p.

Contém exercícios
Inclui bibliografia
ISBN: 85-7193-014-7

1. Funções hiperbólicas. 2. Logaritmo. I. Título.

99-0357 CDD 513.22
CDU 517.58

Nesta obra, o gênero masculino é empregado a título epiceno.

Obra inteiramente composta pelo autor com TEX, PICTEX e AMS-TEX.
TEX is a trademark of the American Mathematical Society.
AMS-TEX is the TEX macrosystem of the American Mathematical Society.

EDITORA INTERCIÊNCIA LTDA.
Av. Pres. Vargas, 435/604 - Centro - Rio de Janeiro - RJ - 20077–900
Tel.: (021)242-2861 - Fax: (021)242-7787
e-mail: `inter@home.cybernet.com.br`

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Ao Luiz *(in memoriam)* e Conchetta,
meus queridos padrinhos que,
abnegadamente, muito me ofereceram,
com toda minha gratidão.

APRESENTAÇÃO

Este livro foi escrito pensando no leitor que estuda o assunto pela primeira vez e naquele que gostaria de encontrar num só volume uma coletânea de definições e fórmulas que são obtidas somente após consultas a diversas obras diferentes.

O volume é dividido em duas partes distintas. Na primeira parte, expõem-se os resultados mais importantes, freqüentemente encontrados na literatura do assunto, e na segunda propõem-se cento e trinta exercícios, muitos dos quais subdivididos em outros três. Os exercícios foram escolhidos de modo que o leitor seja capaz de resolvê-los aplicando os resultados apresentados na primeira parte do volume. Desta forma o leitor poderá verificar seus conhecimentos e dificuldades. Ocasionalmente alguns exercícios, assim como os quinze últimos, exigirão mais do leitor e servirão para o desenvolvimento e introdução de novos resultados.

As soluções completas e detalhadas de todos os exercícios encontram-se ao final do volume. Assim, o estudante e o professor, à procura de exemplos e exercícios, terão farto material à sua disposição.

O autor

PREFÁCIO

Este manual foi escrito com o objetivo de servir a todo tipo de leitor. O leitor que já estudou os temas aqui tratados utilizará o manual quando precisar se lembrar de uma definição ou de uma fórmula; para tal ele terá somente que consultar as partes teóricas do volume (capítulos I a V) ou olhar os exercícios propostos. O leitor que estuda o assunto pela primeira vez deve ler este manual com o apoio de um livro-texto. *Este manual foi escrito para suportar e aprofundar os temas tratados previamente por um livro-texto.*

Nossa experiência como estudante e professor nos ensinou que a melhor maneira de assimilar um assunto é através da resolução de exercícios—e muitos! Nós constatamos que os livros-texto não fornecem as *soluções* dos exercícios propostos e freqüentemente nem mesmo as respostas. O estudante se vê assim frustrado nos seus esforços de compreensão pois nunca pode estar certo do seu raciocínio se pensa que resolveu um exercício corretamente ou então, após passar um certo tempo tentando resolvê-lo, permanece sem conhecer a solução do "quebra-cabeça". Neste manual, nossa preocupação maior foi de apresentar uma solução completa e detalhada a todos os exercícios propostos.

Este manual apresentará, no começo, de uma maneira bem concisa, todas as noções e fórmulas que nós consideramos as mais importantes e que são normalmente encontradas na literatura do assunto. Nós proporemos, em seguida, cento e trinta exercícios, muitos dos quais subdivididos em outros três, a fim de que o leitor possa aplicar os diversos conceitos introduzidos previamente. Os exercícios seguem uma certa ordem de dificuldade mas nosso objetivo principal foi de grupá-los por assuntos. Em cada grupo eles são colocados de maneira que um resultado obtido num exercício possa vir a ser aplicado, como resultado parcial, num exercício posterior. As soluções dos exercícios encontram-se no final do volume, juntamente com a bibliografia e referências.

Finalmente, queremos agradecer ao professor Eduardo Wagner pela recomendação e fornecimento de publicações úteis e interessantes, entre as quais destacamos [15] de onde tiramos diversos exercícios; e a Lucie Bibeau por seu apoio e sugestões.

Luís Lopes

Rio de Janeiro, RJ
Março, 1999

CONTEÚDO

CAPÍTULO I

FUNÇÃO EXPONENCIAL

1) Definição da função exponencial

Seja a um número real tal que $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ $(0 < a \neq 1)$. Chama-se *função exponencial* de base a à função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$ que associa a cada número real x o *único* número real a^x. Temos então:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto f(x) = y = a^x. \end{aligned}$$

O contradomínio (ou conjunto de chegada) da função exponencial é o conjunto dos números reais positivos pois, como $a > 0$, então $y = a^x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplos de funções exponenciais:

$$y = 2^x; \qquad y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x; \qquad y = (\sqrt{2})^x.$$

Todas as funções acima são funções exponenciais; entretanto, a função exponencial que tem por base o número irracional e, definido como $e = \lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x$, é tão mais importante que as outras que quando falamos função exponencial, sem maiores detalhes, na realidade estamos nos referindo à função $y = e^x$.

Mostra-se que (ver [1] ou [24], por exemplo)

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 2,718281\ldots.$$

2) Gráfico da função exponencial

A figura 1 mostra o gráfico da função exponencial para diversas bases diferentes.

CAPÍTULO II

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1) Definição de logaritmo

Seja a um número real tal que $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ $(0 < a \neq 1)$. Chama-se *logaritmo*, na base a, do número real *positivo* b, ao expoente (único) c que se deve dar à base a fim de que a potência obtida seja igual a b. Representa-se por $c = \log_a b$ e lê-se c é o logaritmo de b na base a.

Assim, segundo a definição e a representação, podemos escrever então:

$$\log_a b = c \iff a^c = b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \ \text{ e } \ a \neq 1.$$

Exemplos:

i) $\log_5 25 = 2$ pois $5^c = 5^2 \therefore c = 2$.

ii) $\log_{625} 25 = 0{,}5$ pois $625^c = 5^2 \Longrightarrow 5^{4c} = 5^2 \therefore c = 0{,}5$.

iii) $\log_{0,2} 25 = -2$ pois $\left(\frac{1}{5}\right)^c = 5^2 \Longrightarrow 5^{-c} = 5^2 \therefore c = -2$.

iv) $\log_2 8 = 3$ pois $2^c = 2^3 \therefore c = 3$.

v) $\log_4 8 = 1{,}5$ pois $4^c = 8 \Longrightarrow 2^{2c} = 2^3 \therefore c = 1{,}5$.

2) Propriedades dos logaritmos

Como conseqüência da definição, os logaritmos possuem as seguintes propriedades $(0 < a, b, c$ e $a \neq 1)$:

i) $\log_a 1 = 0$ pois $a^0 = 1$.

ii) $\log_a a = 1$ pois $a^1 = a$.

iii) $\log_a b = \log_a c \iff b = c$ pois $b = a^{x_1} = a^{x_2} = c \iff x_1 = x_2$.

iv) $\log_a a^r = r$, para $r \in \mathbb{R}$.

CAPÍTULO III

LOGARITMOS DECIMAIS

1) Partes inteiras de um número real

A todo número real x podemos associar dois números inteiros chamados *piso* e *teto*.

Definição: chama-se *piso* ("floor" em inglês) de um número real x ao maior número inteiro menor que ou igual a x.

Definição: chama-se *teto* ("ceiling" em inglês) de um número real x ao menor número inteiro maior que ou igual a x.

Notação: empregamos a seguinte notação:

$$\lfloor x \rfloor = \text{piso de } x;$$
$$\lceil x \rceil = \text{teto de } x.$$

Portanto, o piso e o teto de um número real x são os inteiros definidos pelas desigualdades

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1. \tag{8}$$

Observação: em obras mais antigas, encontrávamos a notação $[x]$ para representar tanto o piso quanto o teto de x, com ênfase para o piso.

Os seguintes exemplos e igualdades são facilmente verificáveis:

$$\begin{array}{rrrr}
\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1; & \lceil\sqrt{2}\rceil = 2; & \lfloor-\sqrt{2}\rfloor = -2; & \lceil-\sqrt{2}\rceil = -1; \\
\lfloor\pi\rfloor = 3; & \lceil\pi\rceil = 4; & \lfloor-\pi\rfloor = -4; & \lceil-\pi\rceil = -3; \\
\lfloor\tfrac{1}{2}\rfloor = 0; & \lceil\tfrac{1}{2}\rceil = 1; & \lfloor-\tfrac{1}{2}\rfloor = -1; & \lceil-\tfrac{1}{2}\rceil = 0;
\end{array}$$

CAPÍTULO IV

CONCEITO DE LOGARITMOS ATRAVÉS DE PROGRESSÕES

1) Logaritmos e progressões

Vamos introduzir esta seção apresentando dois problemas:

1º) se os números positivos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ são termos de uma progressão geométrica (PG) de razão q, qual a relação entre seus logaritmos?

Como $x_1, x_2, x_3, \ldots$ formam uma PG, de razão q, podemos escrever $x_2 = x_1 q$ e $x_3 = x_1 q^2$. Seja a uma base logarítmica qualquer. Tomando logaritmos, na base a, de x_1, x_2 e x_3, vem:

$$\begin{aligned} s &= \log_a x_1 \\ t &= \log_a x_2 = \log_a x_1 q = \log_a x_1 + \log_a q \\ u &= \log_a x_3 = \log_a x_1 q^2 = \log_a x_1 + 2\log_a q. \end{aligned}$$

Assim, os logaritmos dos números $x_1, x_2, x_3, \ldots$, numa base a qualquer, formam uma progressão aritmética de razão $r = \log_a q$.

2º) os logaritmos na base a dos números positivos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ formam uma progressão aritmética (PA) de razão r. Qual a relação entre os números $x_1, x_2, x_3, \ldots$?

Como $\log_a x_1, \log_a x_2, \log_a x_3, \ldots$ formam uma PA, de razão r, podemos escrever:

$$\begin{aligned} &\log_a x_2 = \log_a x_1 + r = \log_a x_1 + \log_a a^r = \log_a x_1 a^r \\ &\log_a x_2 = \log_a x_1 a^r \Longrightarrow x_2 = x_1 a^r \\ &\log_a x_3 = \log_a x_1 + 2r = \log_a x_1 + \log_a a^{2r} = \log_a x_1 a^{2r} \\ &\log_a x_3 = \log_a x_1 a^{2r} \Longrightarrow x_3 = x_1 a^{2r} = x_1 (a^r)^2. \end{aligned}$$

Assim, os números $x_1, x_2, x_3, \ldots$ são termos de uma progressão geométrica de razão $q = a^r$.

CAPÍTULO V

CONCEITO DE LOGARITMOS ATRAVÉS DE ÁREAS

1) Logaritmos e áreas

O conceito de logaritmos pode também ser desenvolvido a partir da seguinte definição:

Definição: o logaritmo *natural* de um número $a \in \mathbb{R},\ a \geq 1$, é igual à área da figura plana delimitada pela reta horizontal $y = 0$ (ou eixo x das abscissas), pela hipérbole $y = 1/x$ e pelas retas verticais $x = 1$ e $x = a$; o logaritmo *natural* de um número $a \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1$, é igual ao *simétrico* da área da figura plana delimitada pela reta horizontal $y = 0$ (ou eixo x das abscissas), pela hipérbole $y = 1/x$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = 1$.

Os autores que desenvolvem o estudo dos logaritmos a partir da definição tradicional $x = \log_a y \iff y = a^x$, normalmente não mencionam as dificuldades teóricas importantes que aparecem quando queremos justificar o significado de $y = a^x$ para x irracional (ver [21], por exemplo). A teoria dos logaritmos desenvolvida a partir da definição geométrica que acabamos de apresentar possui muitas vantagens, uma delas sendo a de evitar aquelas dificuldades.

Ao leitor interessado pelo estudo dos logaritmos (e exponenciais) segundo este tratamento—dito moderno—, recomendamos a leitura de [1] e [15]. Evidentemente, como pode ser visto nestas referências, todas as propriedades dos logaritmos que foram estabelecidas segundo o tratamento tradicional são preservadas segundo o tratamento moderno.

A figura 6 nos ajuda a visualizar a definição geométrica de $\ln a$ para $a \geq 1$.

CAPÍTULO VI

EXERCÍCIOS

Exercício 1) Resolver as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{3x-1} = 32$;

b) $\left(\sqrt[5]{4}\right)^x = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$;

c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 2{,}25$.

Exercício 2) Resolver as seguintes equações exponenciais:

a) $\dfrac{\left(3^{2x-7}\right)^3}{9^{x+1}} = \left(3^{3x-1}\right)^4$;

b) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$;

c) $4^x - 2^x = 56$.

Exercício 3) Resolver as seguintes equações exponenciais:

a) $3^{x^2-15} = 9^x$;

b) $2^{x-3} + 2^{x-1} + 2^{x+1} + 2^{x+3} = 42{,}5$;

c) $3^{x-1} + 3^{1-x} = 10 \cdot 3^{-1}$.

Exercício 4) Resolver as seguintes equações exponenciais:

a) $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$;

b) $3^{x^2+1/x^2} = \dfrac{81}{3^{x+1/x}}$;

c) $4^{x^2+2} - 3 \cdot 2^{x^2+3} = 160$.

Exercício 125) Para $0 < x < 1$, mostre que

$$\frac{1+x}{1-x} > e^{2x}.$$

Sugestão: seja $f(x) = (1+x)/(1-x) - e^{2x}$. Mostre que $f(0) = 0$ e $f'(x) > 0$ para $0 < x < 1$. Conclua que $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$.

Observação: este exercício foi reproduzido de [23].

Exercício 126) Para $0 < x < e$, mostre que

$$(e+x)^{e-x} > (e-x)^{e+x}.$$

Sugestão: seja $f(x) = (e-x)\ln(e+x) - (e+x)\ln(e-x)$. Mostre que $f(x) > 0$ para $0 < x < e$. Conclua que $(e+x)^{e-x} > (e-x)^{e+x}$ para $0 < x < e$.

Observação: este exercício foi reproduzido de [23].

Exercício 127) Para $0 < \alpha < \pi/4$, mostre que

$$\cos\alpha^{\cos\alpha} > \sin\alpha^{\sin\alpha}.$$

Observação: este exercício e sua solução foram reproduzidos de [32].

Exercício 128) Para x, $y > 0$, mostre que

$$x^x + y^y \geq x^y + y^x,$$

com igualdade se, e somente se, $x = y$.

Observação: este exercício e sua solução foram reproduzidos de [22].

Exercício 129) Para a, b, $c > 1$ e $r > 0$, mostre que

$$S = (\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geq 3 \cdot 2^r,$$

com igualdade se, e somente se, $a = b = c$.

Sugestão: utilize o resultado $A \geq G$ do exercício 120 para mostrar que $\log_a bc \geq [2(\ln b \cdot \ln c)^{1/2}]\big/ \ln a$.

Observação: este exercício e sua solução foram reproduzidos de [8].

Exercício 130) Para $x > 0$, mostre que são verdadeiras as desigualdades a) e b) abaixo:

a) $\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{x+2}{x+1} > \dfrac{1}{x(x+2)} > \dfrac{1}{x+2}\ln\dfrac{x+1}{x}$;

b) $\ln\dfrac{x+3}{x+2}\ln\dfrac{x+1}{x} > \ln^2\dfrac{x+2}{x+1}$.

Observação: este exercício foi reproduzido de [5]. O autor não foi capaz de resolver a parte b) e ficaria muito grato se algum leitor lhe enviasse uma solução para que a mesma apareça em edições futuras da obra.

CAPÍTULO VII

SOLUÇÕES

Exercício 1)

a) $2^{3x-1} = 32$

$$2^{3x-1} = 2^5 \Longrightarrow 3x - 1 = 5 \therefore x = 2.$$

b) $\left(\sqrt[5]{4}\right)^x = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$

$$\begin{aligned} 4^{x/5} &= 8^{-1/2} \\ 2^{2x/5} &= 2^{-3/2} \Longrightarrow \frac{2x}{5} = -\frac{3}{2} \therefore x = -\frac{15}{4}. \end{aligned}$$

c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 2{,}25$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^x &= 1{,}5^2 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x &= \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \therefore x = -2. \end{aligned}$$

Exercício 2)

a) $\dfrac{\left(3^{2x-7}\right)^3}{9^{x+1}} = \left(3^{3x-1}\right)^4$

Exercício 130)

a) sabemos que $\frac{y}{1+y} < \ln(1+y) < y$ para $-1 < y \neq 0$.

a1) coloquemos $y = \frac{1}{1+x}$ para $x > 0$. Temos:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{1+x}\right) > \frac{1/(1+x)}{1 + [1/(1+x)]}$$
$$\ln\frac{x+2}{x+1} > \frac{1}{x+2} \Longrightarrow \frac{1}{x}\ln\frac{x+2}{x+1} > \frac{1}{x(x+2)}.$$

a2) coloquemos $y = \frac{1}{x}$ para $x > 0$. Temos:

$$\frac{1}{x} > \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$
$$\frac{1}{x} > \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \Longrightarrow \frac{1}{x(x+2)} > \frac{1}{(x+2)}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right). \quad \blacksquare$$

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

[1] Adams, R., *Single-Variable Calculus*, Addison-Wesley, 1990.

[2] Bailey, D.H., "Numerical Results on the Transcendence of Constants Involving π, e, and Euler's Constant", *Mathematics of Computation*, **50**, 1988, pp. 275–281.

[3] *Crux Mathematicorum*, **21**, # 7, September 1995, p. 224.

[4] Fisher, R.C. et Ziebur, A.D., *Algèbre et Trigonométrie*, Éditions Beauchemin, Montréal, 1966.

[5] *Gazeta Matematică*, Anul CI Nr.2, Februarie 1996, Bucareste, Romênia.

[6] Groza, V.S., *A Survey of Mathematics Elementary Concepts and their Historical Development*, Holt, Rinehart and Winston, 1968.

[7] Guelli, C.A., Iezzi, G. e Dolce, O., *Álgebra I*, Editora Moderna, São Paulo, 1970.

[8] Honsberger, R., *From Erdös to Kiev*, The Dolciani Mathematical Expositions #17, p. 151, The Mathematical Association of America, 1996.

[9] Hudson, R.G., *Manual do Engenheiro*, Editora Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1967.

[10] Kaplan, W., *Cálculo Avançado*, Volume II, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1972.

[11] Knopp, K., *Infinite Sequences and Series*, Dover Publications, 1956.

[12] Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series*, Dover Publications, 1990.

[13] Knuth, D.E., "Euler's Constant to 1271 Places", *Mathematics of Computation*, **16**, 1962, pp. 275–281.

[14] Knuth, D.E., *The Art of Computer Programming*, Volume 1, Addison-Wesley, 1973.

[15] Lima, E.L., *Logaritmos*, IMPA-VITAE, 1991, Sociedade Brasileira de Matemática, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, RJ 22460-320.

[16] Lopes, L., *Manual de Indução Matemática*, Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1999.

[17] Lopes, L., *Manual de Progressões*, Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1998.

[18] Lopes, L., *Manual de Seqüências e Séries*, Editora Didática e Científica, 1992.

[19] Lopes, L., *Manuel de Dérivées*, QED Texte, Boucherville, Canadá, 1996.

[20] Luenberger, D.G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1973.

[21] Marsden, J.E., and Hoffman, M.J., *Elementary Classical Analysis*, W.H. Freeman, 1993.

[22] *Mathematics Magazine*, **70**, # 3, June 1997, p. 225, The Mathematical Association of America.

[23] Mitrinović, D.S., *Elementary Inequalities*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, The Netherlands, 1964.

[24] Piskounov, N., *Calcul Différentiel et Intégral*, Tome I, Éditions Mir, 1976.

[25] Piskounov, N., *Calcul Différentiel et Intégral*, Tome II, Éditions Mir, 1976.

[26] *Revista do Professor de Matemática* # 6, 1975, p. 55, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[27] Robison, J.V., *Algèbre et Trigonométrie*, McGraw-Hill, Montréal, 1967.

[28] Shklarsky, D.O., Chentzov, N.N., and Yaglom, I.M., *The USSR Olympiad Problem Book*, W.H. Freeman, 1962.

[29] Spiegel, M.R., *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, Coleção Schaum, McGraw-Hill, 1973.

[30] Sweeney, D.W., "On the Computation of Euler's Constant", *Mathematics of Computation*, **17**, 1963, pp. 170–178.

[31] *The American Mathematical Monthly*, **97**, 1990, pp. 65–67, The Mathematical Association of America.

[32] *The American Mathematical Monthly*, **101**, 1994, p. 690, The Mathematical Association of America.

[33] Wagner, E., "Duas médias", *Revista do Professor de Matemática* # 18, 1991, pp. 43–47, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[34] Wylie, Jr., C.R., *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, 1960.

Suas observações e descobertas

Aos nossos leitores

O autor gostaria de conhecer sua opinião sobre a apresentação e o conteúdo deste manual. Escrevam para:

Luís Lopes
A/C Maurice B. Vincent
Avenida das Américas, 1155 Sala 504
Barra da Tijuca Rio de Janeiro
RJ 22631–000

E-mail: vincent@unisys.com.br

Escrevam para o editor ou para o endereço acima para encomendar outros exemplares e títulos ou propor novos problemas que gostariam de ver numa outra edição.

Manuais já publicados

1 Trigonometria
2 Seqüências e Séries
3 Progressões
4 Funções Exponenciais e Logarítmicas
5 Indução Matemática