Capa:
Cleber Luiz

Composição:
Interciência

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

L854m

Lopes, Luís
Manual de indução matemática / Luís Lopes. – Rio de Janeiro: Interciência, 1998
132p.

Contém exercícios
Inclui bibliografia
ISBN: 85-7193-013-9

1. Indução (Matemática) - Problemas, questões, exercícios. I. Título.

99-0356 CDD 511.2
CDU 510.24

Nesta obra, o gênero masculino é empregado a título epiceno.

Obra inteiramente composta pelo autor com TEX, PICTEX e AMS-TEX.

EDITORA INTERCIÊNCIA LTDA.
Av. Pres. Vargas, 435/604 - Centro - Rio de Janeiro - RJ - 20077–900
Tel.: (021)242-2861 - Fax: (021)242-7787
e-mail: `inter@home.cybernet.com.br`

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Ao meu irmão Gilberto,
incentivador e inspirador
das minhas atividades de autor e editor.

APRESENTAÇÃO

Este livro foi escrito pensando no leitor que estuda o assunto pela primeira vez e naquele que gostaria de encontrar num só volume uma coletânea de definições e fórmulas que são obtidas somente após consultas a diversas obras diferentes.

O volume é dividido em duas partes distintas. Na primeira parte, propõem-se cento e treze exercícios. Os exercícios foram escolhidos a fim de apresentar-se fórmulas e teoremas importantes encontrados em análise, álgebra, teoria dos números e análise combinatória. Além disso, servirão, muitas vezes, como motivação para o desenvolvimento e introdução de novos resultados e proposições.

As soluções completas e detalhadas de todos os exercícios encontram-se em seguida e formam a segunda parte. Assim, o estudante e o professor, à procura de exemplos e exercícios, terão farto material à sua disposição.

O autor

PREFÁCIO

Este manual foi escrito com o objetivo de servir a todo tipo de leitor. O leitor à vontade com os temas aqui tratados utilizará o manual quando precisar se lembrar de uma definição ou de uma fórmula; para tal, ele terá somente que consultar os exercícios propostos e suas soluções. O leitor que estuda o assunto pela primeira vez deve ler este manual com o apoio dos livros-texto que tratam da matemática discreta (ver [9], [12], [19], [21] e [31], por exemplo), da álgebra (ver [8] ou [30]) e do cálculo (ver [1] ou [22]). *Este manual foi escrito para suportar e aprofundar os temas tratados previamente por um livro-texto.*

O método ou princípio conhecido sob o nome de *indução matemática* é utilizado quando queremos provar a validade de uma afirmação (na forma de um teorema ou equação), sobre um inteiro n, que suspeitamos ser verdadeira para todos os inteiros maiores que ou iguais a um certo inteiro inicial n_0. Não apresentaremos os fundamentos lógicos do princípio. O leitor interessado neste aspecto é referido a [1], [3], [8], [14] ou [33], por exemplo, ou às obras didáticas que abordam a matemática discreta.

Nossa experiência como estudante e professor nos ensinou que a melhor maneira de assimilar um assunto é através da resolução de exercícios — e muitos! Nós constatamos que os livros-texto não fornecem as *soluções* dos exercícios propostos e, freqüentemente, nem mesmo as respostas. O estudante se vê assim frustrado nos seus esforços de compreensão, pois nunca pode estar certo do seu raciocínio se pensa que resolveu um exercício corretamente ou então, após passar um certo tempo tentando resolvê-lo, permanece sem conhecer a solução do “quebra-cabeça”. Neste manual, nossa preocupação maior foi de apresentar uma solução completa e detalhada a todos os exercícios propostos.

Os cento e treze exercícios deste manual foram cuidadosamente escolhidos e exigirão do leitor conhecimentos em álgebra, análise e teoria dos números. Os exercícios seguem uma certa ordem de dificuldade mas nosso objetivo principal foi de grupá-los por assuntos. Em cada grupo eles são colocados de maneira que um resultado obtido num exercício possa vir a ser aplicado, como resultado parcial, num exercício posterior. As soluções dos exercícios encontram-se em seguida e, no final do volume, a bibliografia e as referências.

Agradecemos a Lucie Bibeau por seu apoio e sugestões.

Luís Lopes

Rio de Janeiro, RJ
Março, 1999

CONTEÚDO

CAPÍTULO I

SEQÜÊNCIA DE FIBONACCI

A seqüência de Fibonacci é definida pela seguinte equação de recorrência (ou em diferenças):

$$F_{i+2} = F_{i+1} + F_i, \quad \text{para } i \geq 0 \tag{$*$}$$

com

$$F_0 = 0 \quad \text{e} \quad F_1 = 1.$$

Assim, obtém-se a seqüência $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\}$.

A seqüência de Fibonacci possui diversas propriedades interessantes e, conseqüentemente, encontramo-la em muitos domínios e aplicações. Como exemplo de uma das mais importantes, podemos citar o estudo da complexidade dos algoritmos, como fazem Knuth em [14] e Pitombeira em *Revista do Professor de Matemática* # 24, 1993, Sociedade Brasileira de Matemática (ver [23] para o endereço).

Há tanto a dizer sobre esta seqüência que existe um periódico — *The Fibonacci Quarterly* — dedicado exclusivamente aos célebres números que ela gera e suas aplicações e propriedades. Os exercícios 83 a 90, propostos no capítulo seguinte, são exemplos de somente algumas.

Resolvendo a equação de recorrência ($*$) e utilizando as condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, obtemos uma fórmula explícita para o termo geral F_i em função de i somente. Para resolver ($*$), seguimos [5], [20] ou [39], por exemplo. Assim, devemos ter:

$$x^2 - x - 1 = 0 \therefore \begin{cases} x_1 = (1 + \sqrt{5})/2 \\ x_2 = (1 - \sqrt{5})/2 = 1 - x_1 \end{cases}$$

e

$$F_i = c_1 \Big(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\Big)^i + c_2 \Big(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\Big)^i.$$

As condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ nos dão $c_1 = \sqrt{5}/5$ e $c_2 = -\sqrt{5}/5$.

Colocando $x_1 = \phi$ e $x_2 = \hat{\phi}$, obtém-se, finalmente, a fórmula definitiva para o termo geral da seqüência de Fibonacci:

$$F_i = \frac{\sqrt{5}}{5}(\phi^i - \hat{\phi}^i).$$

CAPÍTULO II

EXERCÍCIOS

Em todos os exercícios, i, j, k, l, m, n e p denotam números inteiros.

Exercício 1) Mostre que $\frac{n^2-3n+4}{2}$ é um número inteiro para todo inteiro n.

Exercício 2) Para $n \geq 1$, mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} i!$ é um número ímpar.

Exercício 3) Para $n \geq 0$, mostre que $a_n = 7^n + 2$ é um número divisível por 3.

Exercício 4) Para $n \geq 0$, mostre que $a_n = 7^n - 1$ é um número divisível por 6.

Exercício 5) Para $n \geq 0$, mostre que $a_n = 2n^3 - 3n^2 + n$ é um número divisível por 6.

Exercício 6) Para $n \geq 0$, mostre que $a_n = 2^{4n} - 1$ é um número divisível por 15.

Exercício 7) Para $n \geq 0$, mostre que $a_n = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ é um número divisível por 17.

Exercício 8) Para $n \geq 0$, mostre que $a_n = 3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n} - 13$ é um número divisível por 64.

Exercício 9) Para $n \geq 0$, mostre que $a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é um número divisível por 133.

Exercício 10) Mostre que a soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

Exercício 107) Para $n \geq 1$, seja $A_n = (a_{ij})$ a matriz de ordem n cujos elementos são $a_{ii} = 0,\ i = 1, \ldots, n;\ a_{ij} = 1,\ j < i = 2, \ldots, n$ e $a_{ij} = -1,\ j > i = 1, \ldots, n-1$. Assim, $A_1 = (0)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule $|A_n|$.

Exercício 108) Mostre que, se $n \geq 1$ e A é uma matriz anti-simétrica (ou hemissimétrica) de ordem $2n$, então $|A| = 0$ ou $|A|$ é o quadrado de um polinômio formado de elementos de A.

Exercício 109) Um torneio de xadrez tem n jogadores. Cada jogador joga uma partida, e uma só, contra todos os outros. Mostre que o número total de partidas do torneio é igual a $(n-1)n/2$.

Exercício 110) Mostre que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $(n-2)180°$.

Exercício 111) Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é igual a $(n-3)n/2$.

Exercício 112) Desenham-se n círculos num plano π de acordo com o seguinte procedimento: todos os círculos cortam-se sempre em dois pontos e três círculos não passam nunca pelo mesmo ponto. Mostre que os círculos dividem o plano π em $n^2 - n + 2$ regiões, incluindo a que é exterior a todos os círculos.

Exercício 113) Dispomos de k cores para colorir os vértices de um polígono convexo de n lados. Sabendo que vértices adjacentes não podem ter a mesma cor, mostre que o número de maneiras para se efetuar esta tarefa é igual a $(k-1)^n + (k-1)(-1)^n$.

CAPÍTULO III

SOLUÇÕES

Exercício 1)

Seja $a_n = n^2 - 3n + 4$. Começamos supondo que $n \geq 0$.

$$\begin{array}{ll} n = 0 & a_0 = 4 \quad \checkmark \\ n = 1 & a_1 = 2 \quad \checkmark \end{array}$$

Supomos agora que a_n é um número inteiro para $n = 1, \ldots, k$. Devemos mostrar que a_{k+1} é também um número inteiro.

$$a_{k+1} = (k+1)^2 - 3(k+1) + 4 = (k^2 - 3k + 4) + 2(k-1).$$

Como $2(k-1)$ é um inteiro e $k^2 - 3k + 4$ é um inteiro também (pela hipótese de indução), concluímos que a_{k+1} é um inteiro.

Se $n < 0$, colocamos $m = -n$ e concluímos, por um procedimento análogo àquele mostrado acima, que $a_m = m^2 + 3m + 4$ é um inteiro para todo $m > 0$. Logo, $n^2 - 3n + 4$ é um número inteiro $\forall n \in \mathbb{Z}$. ■

Exercício 2)

Sejam $S_n = \sum_{i=1}^{n} i!$ e $P(n)$ a proposição: S_n é um número ímpar $\forall n \geq 1$.

$$\begin{array}{lll} n = 1 & S_1 = 1! = 1 & \checkmark \\ n = 2 & S_2 = S_1 + 2! = 3 & \checkmark \end{array}$$

Supomos agora que a proposição $P(n)$ é verdadeira para $n = 2, \ldots, k$. Devemos mostrar que $P(n)$ continua verdadeira para $n = k+1$, isto é, S_{k+1} é um número ímpar.

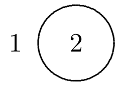
$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} i! = \sum_{i=1}^{k} i! + (k+1)! = S_k + (k+1)!\,.$$

Como S_k é um número ímpar (pela hipótese de indução) e $(k+1)! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (k+1)$ é um número par, segue que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, concluímos que $P(n)$ é verdadeira $\forall n \geq 1$. ■

Exercício 112)

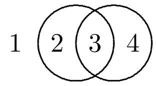
Seja $P(n)$ a proposição: se a_n denota o número de regiões que n círculos, traçados segundo o procedimento dado, dividem o plano π, então $a_n = n^2 - n + 2$.

$n = 1 \quad a_1 = 2$



✓

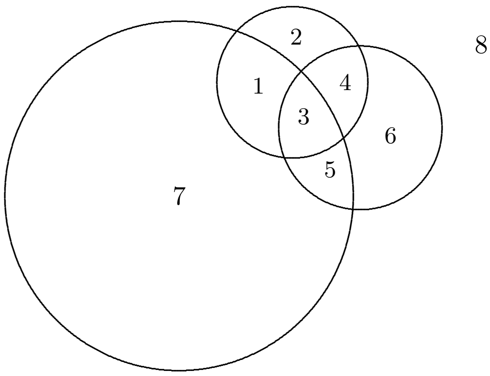
$n = 2 \quad a_2 = 4$



✓

Conseqüentemente, a proposição é verificada para $n = 1$ e $n = 2$. Supomos agora que a proposição $P(n)$ é verdadeira para $n = 1, 2, 3, \ldots, k$. Devemos mostrar que $P(n)$ continua verdadeira para $n = k + 1$, isto é, $a_{k+1} = k^2 + k + 2$.

Ao desenharmos o círculo C_{k+1}, sabemos que ele cortará todos os outros k círculos em dois pontos. Neste momento, devemos observar que C_{k+1} possuirá $2k$ pontos na sua circunferência, para um total de $2k$ arcos. Damos um exemplo para $k = 2$.



Os $2k$ arcos atravessarão $2k$ regiões *já formadas*, dividindo cada uma em duas outras, criando assim $2 \cdot 2k - 2k = 2k$ novas regiões. A participação de C_{k+1} estando encerrada, podemos agora considerar que temos somente k círculos, para um total de a_k regiões. Assim, podemos escrever:

$$a_{k+1} = a_k + 2k = k^2 + k + 2 = (k+1)^2 - (k+1) + 2.$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira e concluímos que $P(n)$ é verdadeira $\forall n \geq 1$. ■

Exercício 113)

Seja $P(n)$ a proposição: se $a_n(k)$ denota o número de possibilidades para colorir, com k cores, os vértices de um polígono convexo de n lados, onde vértices adjacentes não têm a mesma cor, então $a_n(k) = (k-1)^n + (k-1)(-1)^n$. $(*)$

Considerando que o polígono de n lados é convexo, ele possui n vértices também. Para $n = 3$, a fórmula nos dá $a_3(k) = (k-1)^3 - (k-1) = (k-1)[(k-1)^2 - 1] = (k-1)(k^2 - 2k) = k(k-1)(k-2)$. Como, para o triângulo, o vértice V_1 pode ser colorido de k cores, o vértice V_2 de $k-1$ cores e o vértice V_3 de $k-2$ cores, temos $a_3(k) = k(k-1)(k-2)$. Assim, a proposição é verdadeira para $n = 3$ (observe que a fórmula é válida para $n = 2$ vértices, já que $a_2(k) = k(k-1)$, mas neste caso temos somente um único lado).

Supomos agora que a proposição $P(n)$ é verdadeira para $n = 3, 4, 5, \ldots, l$. Devemos mostrar que $P(n)$ continua verdadeira para $n = l+1$, isto é, $a_{l+1}(k) = (k-1)^{l+1} + (k-1)(-1)^{l+1}$.

Com $n = 3, 4, 5, \ldots, l$ vértices, temos $a_l(k)$ possibilidades. Quando o vértice V_{l+1} é acrescentado, formamos o polígono $V_1V_2 \ldots V_{l+1}$. Para colorir V_1, temos k cores; para V_2, $k-1$ cores; para V_3, $k-1$ cores e assim sucessivamente. Executando sistematicamente este procedimento, todos os vértices terão uma cor diferente do anterior e, ao final, teremos $k(k-1)^l$ possibilidades; *entretanto, V_{l+1} é adjacente a V_1 e devemos retirar os casos onde V_1 e V_{l+1} têm a mesma cor.* E quantos há? Não sabemos, mas se V_1 e V_{l+1} têm a mesma cor, estes vértices, vistos do vértice V_l, são *idênticos* e podem então se reduzir a um só (pense bem!). Encontramo-nos assim com l vértices, para os quais temos $a_l(k)$ possibilidades. Então, a participação de V_{l+1} estando encerrada, podemos escrever:

$$a_{l+1}(k) = k(k-1)^l - a_l(k)$$

$$a_{l+1}(k) = k(k-1)^l - (k-1)^l - (k-1)(-1)^l$$

$$a_{l+1}(k) = (k-1)(k-1)^l + (k-1)(-1)^{l+1}$$

$$a_{l+1}(k) = (k-1)^{l+1} + (k-1)(-1)^{l+1}.$$

Logo, $P(l+1)$ é verdadeira e concluímos que $P(n)$ é verdadeira $\forall n \geq 2$ (vértices). ■

Observação: para obter a fórmula $(*)$, tivemos que resolver a equação de recorrência $a_{n+1}(k) + a_n(k) = k(k-1)^n$. Poderíamos ter seguido as técnicas apresentadas em [39] para resolvê-la; entretanto, observando que a seqüência $b_n(k) = a_n(k) + a_{n+1}(k)$ forma uma progressão geométrica de razão $q = k-1$, procederemos da seguinte maneira (observe a astúcia):

$$a_{n+1}(k) + a_n(k) = k(k-1)^n \tag{I}$$

$$a_n(k) + a_{n-1}(k) = k(k-1)^{n-1} \tag{II}$$

$$(k-1)a_n(k) + (k-1)a_{n-1}(k) = k(k-1)^n \tag{III}$$

Subtraindo a equação (III) da equação (I), obtemos:

$$a_{n+1}(k) + (2-k)a_n(k) + (1-k)a_{n-1}(k) = 0. \tag{†}$$

A equação (†) é uma equação de recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes cuja equação auxiliar ou característica é (ver [5] ou [20], por exemplo):

$$\alpha^2 + (2-k)\alpha + (1-k) = 0.$$

As raízes são $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = k - 1$ e a solução $a_n(k)$ é $a_n(k) = c_2(k-1)^n + c_1(-1)^n$. Como $a_{n+1}(k) + a_n(k) = k(k-1)^n$, resulta $kc_2 = k \therefore c_2 = 1$. O valor $c_1 = k - 1$ é obtido sabendo-se que $a_2(k) = k(k-1)$.

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

[1] Adams, R., *Single-Variable Calculus*, Addison-Wesley, 1990.

[2] Ayres Jr., F., *Matrices: Cours et Problèmes*, Série Schaum, McGraw-Hill, 1984.

[3] Borofsky, S., *Elementary Theory of Equations*, The Macmillan Company, 1961.

[4] Bowman, F., *An Introduction to Determinants and Matrices*, The English Universities Press, London, 1962.

[5] Brassard, G. et Bratley, P., *Algorithmique: Conception et Analyse*, Masson, 1987.

[6] Coxeter, H.S.M., *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, 1969.

[7] *Crux Mathematicurum*, Canadian Mathematical Society, **20**, # 1, 1994, p. 10.

[8] Fisher, R.C. et Ziebur, A.D., *Algèbre et Trigonométrie*, Éditions Beauchemin, Montréal, 1966.

[9] Grimaldi, R.P., *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Addison-Wesley, 1994.

[10] *Hungarian Problem Book I*, New Mathematical Library # 11, Random House, New York, 1963.

[11] *Hungarian Problem Book II*, New Mathematical Library # 12, Random House, New York, 1963.

[12] Johnsonbaugh, R., *Discrete Mathematics*, Macmillan Publishing Company, 1993.

[13] Klambauer, G., *Problems and Propositions in Analysis*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics # 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1979.

[14] Knuth, D.E., *The Art of Computer Programming*, Volume 1, Addison-Wesley, 1973.

[15] Lopes, L., *Manual das Funções Exponenciais e Logarítmicas*, Interciência, 1999.

[16] Lopes, L., *Manual de Progressões*, Interciência, 1998.

[17] Lopes, L., *Manual de Seqüências e Séries*, Editora Didática e Científica, 1992.

[18] Lopes, L., *Manual de Trigonometria*, Editora Didática e Científica, 1992.

[19] Morgado, A.C.O., Carvalho, J.B.P., Carvalho, P.C.P. e Fernandez, P., *Análise Combinatória e Probabilidade*, IMPA/VITAE, 1991, Sociedade Brasileira de Matemática, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, RJ 22460-320.

[20] Morgado, A.C.O., Wagner, E. e Zani, S.C., *Progressões e Matemática Financeira*, IMPA/VITAE, 1993, Sociedade Brasileira de Matemática, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, RJ 22460-320.

[21] Niven, I., *Mathematics of Choice*, New Mathematical Library # 15, Random House, New York, 1965.

[22] Piskounov, N., *Calcul Différentiel et Intégral*, Tome I, Éditions Mir, 1976.

[23] *Revista do Professor de Matemática* # 5, 1984, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[24] *Revista do Professor de Matemática* # 11, 1987, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[25] *Revista do Professor de Matemática* # 12, 1988, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[26] *Revista do Professor de Matemática* # 15, 1989, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[27] *Revista do Professor de Matemática* # 32, 1996, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[28] *Revista do Professor de Matemática* # 34, 1997, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[29] *Revista do Professor de Matemática* # 36, 1998, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[30] Robison, J.V., *Algèbre et Trigonométrie*, McGraw-Hill, Montréal, 1967.

[31] Rosen, K.H., *Discrete Mathematics and its Applications*, McGraw-Hill, 1995.

[32] Shklarsky, D.O., Chentzov, N.N., and Yaglom, I.M., *The USSR Olympiad Problem Book*, W.H. Freeman, 1962.

[33] Sominskii, I.S., *The Method of Mathematical Induction*, Blaisdell Publishing Company, 1961.

[34] Steinhaus, H., *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*, Basic Books, Inc., Publishers, New York, 1964.

[35] *The American Mathematical Monthly*, Problem 4130, **52**, 1945, pp. 527–529.

[36] *The Mathematical Gazette*, **80**, # 487, March 1996.

[37] Uspensky, J.V., *Theory of Equations*, McGraw-Hill, 1948.

[38] Wagner, E., *Construções Geométricas*, IMPA/VITAE, 1993, Sociedade Brasileira de Matemática, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, RJ 22460-320.

[39] Wylie, Jr., C.R., *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, 1960.

Suas observações e descobertas

Aos nossos leitores

O autor gostaria de conhecer sua opinião sobre a apresentação e o conteúdo deste manual. Escrevam para:

Luís Lopes
A/C Maurice B. Vincent
Avenida das Américas, 1155 Sala 504
Barra da Tijuca Rio de Janeiro
RJ 22631–000

E-mail: `vincent@unisys.com.br`

Escrevam para o editor ou para o endereço acima para encomendar outros exemplares e títulos ou propor novos problemas que gostariam de ver numa outra edição.

Manuais já publicados

1 Trigonometria
2 Seqüências e Séries
3 Progressões
4 Funções Exponenciais e Logarítmicas
5 Indução Matemática