Capa:
Cleber Luiz

Composição:
Interciência

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

L854m

Lopes, Luís
Manual de Progressões / Luís Lopes. – Rio de Janeiro: Interciência, 1998
126p.

ISBN: 85-7193-003-1

Contém exercícios
Complementa a obra: Manual de seqüências e séries / Luís Lopes
Inclui bibliografia

1. Progressões (Matemática). I. Título.

98-0241 CDD 512.93
CDU 512.9

Nesta obra, o gênero masculino é empregado a título epiceno.

Obra inteiramente composta pelo autor com TEX, PICTEX e AMS-TEX.
TEX is a trademark of the American Mathematical Society.
AMS-TEX is the TEX macrosystem of the American Mathematical Society.

EDITORA INTERCIÊNCIA LTDA.
Av. Pres. Vargas, 435/604 - Centro - Rio de Janeiro - RJ - 20077–900
Tel.: (021)242-2861 - Fax: (021)242-7787
e-mail: inter@home.cybernet.com.br

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Ao Fred *(in memoriam)*, amigo
e companheiro de muitas horas de estudo.

APRESENTAÇÃO

Este livro foi escrito pensando no leitor que estuda o assunto pela primeira vez e naquele que gostaria de encontrar num só volume uma coletânea de definições e fórmulas que são obtidas somente após consultas a diversas obras diferentes.

O volume é dividido em duas partes distintas. Na primeira parte, expõem-se os resultados mais importantes, freqüentemente encontrados na literatura do assunto, e na segunda propõem-se cento e seis exercícios. Os exercícios foram escolhidos de modo que o leitor seja capaz de resolvê-los aplicando os conceitos e resultados apresentados na primeira parte do volume. Desta forma, o leitor poderá verificar seus conhecimentos e dificuldades. Ocasionalmente alguns exercícios, como os 56º, 94º e 102º exigirão mais do leitor e servirão para o desenvolvimento e introdução de novos resultados.

As soluções completas e detalhadas de todos os exercícios encontram-se ao final do volume. Assim, o estudante e o professor à procura de exemplos e exercícios terão farto material à sua disposição.

O autor

PREFÁCIO

Este manual foi escrito com o objetivo de servir a todo tipo de leitor. O leitor que já estudou os temas aqui tratados utilizará o manual quando precisar se lembrar de uma definição ou de uma fórmula; para tal, ele terá somente que consultar as partes teóricas do volume (capítulos I a VI) ou olhar os exercícios propostos. O leitor que estuda o assunto pela primeira vez deve ler este manual com o apoio de um livro-texto. *Este manual foi escrito para suportar e aprofundar os temas tratados previamente por um livro-texto.*

Nossa experiência como estudante e professor nos ensinou que a melhor maneira de assimilar um assunto é através da resolução de exercícios—e muitos! Nós constatamos que os livros-texto não fornecem as *soluções* dos exercícios propostos e freqüentemente nem mesmo as respostas. O estudante se vê assim frustrado nos seus esforços de compreensão, pois nunca pode estar certo do seu raciocínio se pensa que resolveu um exercício corretamente ou então, após passar um certo tempo tentando resolvê-lo, permanece sem conhecer a solução do "quebra-cabeça". Neste manual, nossa preocupação maior foi de apresentar uma solução completa e detalhada a todos os exercícios propostos.

Este manual apresentará, no começo, de uma maneira bem concisa, todas as noções e fórmulas que nós consideramos as mais importantes e que são normalmente encontradas na literatura do assunto. Nós proporemos, em seguida, cento e seis exercícios, de modo que o leitor possa aplicar os diversos conceitos introduzidos previamente. Os exercícios seguem uma certa ordem de dificuldade mas nosso objetivo principal foi de grupá-los por assuntos. Em cada grupo eles são colocados de maneira que um resultado obtido num exercício possa vir a ser aplicado, como resultado parcial, num exercício posterior. As soluções dos exercícios encontram-se no final do volume, juntamente com a bibliografia e as referências.

Este manual é o complemento do *Manual de Seqüências e Séries* (referência [13]), do mesmo autor. Naquela obra apresentamos o operador diferença, os polinômios fatoriais e a função antidiferença, conceitos amplamente utilizados no capítulo II e em diversos exercícios deste manual. Ainda em [13], propomos alguns problemas introdutórios sobre as progressões aritméticas, geométricas e aritmético-geométricas. Recomendamos portanto ao leitor inexperiente ou desconhecedor dos conceitos assinalados a leitura prévia de [13].

Finalmente, queremos agradecer ao professor Eduardo Wagner pela recomendação e fornecimento de publicações úteis e interessantes, entre as quais destacamos [18] de onde tiramos diversos exercícios, e a Lucie Bibeau por seu apoio e sugestões.

Luís Lopes

Rio de Janeiro, RJ
Janeiro, 1998

CONTEÚDO

Prefácio . . . . **vii**

Capítulo

I Progressões aritméticas **1**

1) Definição 1

2) Classificação das progressões aritméticas . . . 1

3) Fórmula do termo geral 2

4) Interpolação aritmética 3

5) Média aritmética 3

6) Termos eqüidistantes dos extremos 3

7) Propriedades das progressões aritméticas . . . 4

8) Soma dos termos de uma progressão aritmética finita 5

II Progressões aritméticas de ordem superior . . **7**

1) Introdução 7

2) Definição 7

3) Fórmula do termo geral 8

4) Soma dos termos de uma progressão aritmética de ordem k finita 12

5) Soma das potências de grau k dos termos de uma progressão aritmética finita 13

III Progressões harmônicas 17

1) Definição 17

2) Classificação das progressões harmônicas . . . 17

3) Fórmula do termo geral 18

4) Interpolação harmônica 18

5) Média harmônica 19

IV Progressões geométricas 21

1) Definição 21

2) Classificação das progressões geométricas . . . 21

3) Fórmula do termo geral 23

4) Interpolação geométrica 24

5) Média geométrica 24

6) Propriedades das progressões geométricas . . . 24

7) Produto dos termos de uma progressão geométrica finita 26

8) Soma dos termos de uma progressão geométrica finita 27

9) Soma dos termos de uma progressão geométrica infinita 28

V Progressões aritmético-geométricas 31

1) Definição 31

2) Classificação das progressões aritmético-geométricas 31

3) Soma dos termos de uma progressão aritmético-geométrica finita 32

4) Soma dos termos de uma progressão aritmético-geométrica infinita 33

5) Média aritmético-geométrica 34

VI Considerações sobre as médias **39**
1) Generalidades 39
2) Construções geométricas 41
3) Aplicações 45
4) Médias contra-harmônica e quadrática 47
VII Exercícios **49**
VIII Soluções **59**
Bibliografia e Referências **123**

CAPÍTULO I

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

1) Definição

Progressão aritmética — PA — é uma seqüência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ de números $\{a_i\}$, denominados termos, na qual a diferença entre cada termo a_i e o seu antecedente a_{i-1} é um valor constante chamado razão. Assim,

$$a_i - a_{i-1} = r \quad \forall i > 1, \tag{1}$$

onde r é a razão da PA.

Exemplos:

a) $\{1, 5, 9, 13\}$ $\quad (r = 4)$;

b) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\}$ $\quad (r = 0)$;

c) $\{\sqrt{2}, \sqrt{2} - 4, \sqrt{2} - 8, \ldots\}$ $\quad (r = -4)$.

2) Classificação das progressões aritméticas

As progressões aritméticas, quanto ao número de termos, podem ser:

a) finitas, se possuem um número finito de termos.

Exemplo: $\{1, 5, 9, 13\}$.

b) infinitas, se possuem um número infinito de termos.

Exemplo: $\{\sqrt{2}, \sqrt{2} - 4, \sqrt{2} - 8, \ldots\}$.

As progressões aritméticas formadas só por números reais podem ser:

a) crescentes, se cada termo a_i é maior que seu antecedente a_{i-1}.

Exemplo: $\{1, 5, 9, 13\}$.

CAPÍTULO II

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR

1) Introdução

Considere as seqüências $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$, $B = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ e $C = \{1, 3, 19, 61, 141, 271, \ldots\}$. Formemos as seqüências $D = \{d_i\}$, $E = \{e_i\}$ e $F = \{f_i\}$, onde $d_i = a_{i+1} - a_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$, $e_i = b_{i+1} - b_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$ e $f_i = c_{i+1} - c_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$. Obtemos $D = \{2, 2, 2, 2, \ldots\}$, $E = \{3, 5, 7, 9, \ldots\}$ e $F = \{2, 16, 42, 80, 130, \ldots\}$. Formemos as seqüências $G = \{g_i\}$ e $H = \{h_i\}$, onde $g_i = e_{i+1} - e_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$ e $h_i = f_{i+1} - f_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$. Obtemos $G = \{2, 2, 2, \ldots\}$ e $H = \{14, 26, 38, 50, \ldots\}$. Formemos a seqüência $J = \{j_i\}$, onde $j_i = h_{i+1} - h_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$. Obtemos $J = \{12, 12, 12, \ldots\}$.

Vemos que D é uma PA estacionária, obtida após uma operação de diferença entre os termos da seqüência original A; G é uma PA estacionária, obtida após duas operações de diferença entre os termos da seqüência original B; J é uma PA estacionária, obtida após três operações de diferença entre os termos da seqüência original C.

2) Definição

PA de 1ª ordem ou simplesmente PA é uma seqüência de números tais que, após uma operação de diferença entre termos consecutivos da seqüência, obtemos uma PA estacionária.

PA de 2ª ordem ou PA de ordem 2 é uma seqüência de números tais que, após uma operação de diferença entre termos consecutivos da seqüência, obtemos uma PA de 1ª ordem.

PA de 3ª ordem ou PA de ordem 3 é uma seqüência de números tais que, após uma operação de diferença entre termos consecutivos da seqüência, obtemos uma PA de 2ª ordem.

Generalizando, PA de k-ésima ordem ou PA de ordem k é uma seqüência de números tais que, após uma operação de diferença entre termos consecutivos da seqüência, obtemos uma PA de ordem $k-1$; dito de outra maneira, temos uma PA de ordem k se, após k operações de diferença entre termos consecutivos das seqüências geradas, obtemos uma PA estacionária. Assim, A é uma PA de 1ª ordem, B é uma PA de 2ª ordem e C é uma PA de 3ª ordem.

3) Fórmula do termo geral

Teorema 2.1: *A condição necessária e suficiente para que uma seqüência* $\{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\}$ *seja uma progressão aritmética de ordem* k *é que seu termo geral* a_i *seja um polinômio de grau* k *em* i.

Demonstração:

Para facilitar a compreensão da demonstração para o caso da PA de ordem k, começaremos supondo que a seqüência $\{a_i\}$ é uma PA de ordem 2.

Primeira parte: a condição é necessária ($\Longrightarrow$)

De fato, se a seqüência $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é uma PA de ordem 2, então as diferenças $b_1, b_2, \ldots, b_i = a_{i+1} - a_i, \ldots, b_{n-1}$ entre os termos consecutivos de $\{a_i\}$ formam uma PA de razão $r \neq 0$.

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= b_1 \\ a_3 - a_2 &= b_2 \\ a_4 - a_3 &= b_3 \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_n - a_{n-1} &= b_{n-1}. \end{aligned}$$

Somando membro a membro essas $n-1$ igualdades, vem:

$$a_n - a_1 = \frac{(b_1 + b_{n-1})(n-1)}{2}.$$

Mas $b_{n-1} = b_1 + (n-2)r$. Logo,

$$a_n = a_1 + \frac{[2b_1 + (n-2)r](n-1)}{2}$$

e

$$a_i = a_1 + \frac{[2b_1 + (i-2)r](i-1)}{2},$$

que é um polinômio do 2º grau em i.

CAPÍTULO III

PROGRESSÕES HARMÔNICAS

1) Definição

Progressão harmônica — PH — é uma seqüência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ de números $\{a_i\}$, diferentes de zero e denominados termos, tais que seus *inversos* formam uma progressão aritmética. Portanto,

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\} \text{ é PH} \iff \{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_i}, \ldots, \frac{1}{a_n}\} \text{ é PA.}$$

Exemplos:

a) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}\}$ é PH pois $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ é PA;

b) $\{-\frac{1}{3}, -1, 1, \frac{1}{3}\}$ é PH pois $\{-3, -1, 1, 3\}$ é PA;

c) $\{3, 3, 3, 3, \ldots\}$ é PH pois $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ é PA.

2) Classificação das progressões harmônicas

As progressões harmônicas, quanto ao número de termos, podem ser:

a) finitas, se possuem um número finito de termos.

Exemplo: $\{-\frac{1}{3}, -1, 1, \frac{1}{3}\}$.

b) infinitas, se possuem um número infinito de termos.

Exemplo: $\{3, 3, 3, 3, \ldots\}$.

CAPÍTULO IV

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

1) Definição

Progressão geométrica — PG — é uma seqüência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ de números $\{a_i\}$, diferentes de zero e denominados termos, na qual o quociente entre cada termo a_i e o seu antecedente a_{i-1} é um valor constante chamado razão. Assim,

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = q \quad \forall i > 1, \tag{9}$$

onde q é a razão da PG.

Exemplos:

a) $\{1, 3, 9, 27\} \qquad (q = 3);$

b) $\{1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \ldots\} \qquad (q = \frac{1}{5});$

c) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\} \qquad (q = 1);$

d) $\{2, -4, 8, -16, \ldots\} \qquad (q = -2).$

2) Classificação das progressões geométricas

As progressões geométricas, quanto ao número de termos, podem ser:

a) finitas, se possuem um número finito de termos.

Exemplo: $\{1, 3, 9, 27\}$.

b) infinitas, se possuem um número infinito de termos.

Exemplo: $\{a, a^2, a^3, a^4, \ldots\}$.

CAPÍTULO V

PROGRESSÕES ARITMÉTICO-GEOMÉTRICAS

1) Definição

Progressão aritmético-geométrica — PA-G — é uma seqüência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ de números $\{a_i\}$, diferentes de zero e denominados termos, se, e somente se, podemos escrever seus termos como

$$a_i = [a_1 + (i-1)r]q^{i-1} \quad \forall i \geq 1, \tag{20}$$

onde r $(r \neq 0)$ e q $(q \neq 0, 1)$ são constantes.

Exemplos:

a) $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}\}$, onde $a_i = \frac{2i-1}{2^i} = (i - \frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{i-1} = [\frac{1}{2} + (i-1)](\frac{1}{2})^{i-1}$;

b) $\{2, -\frac{5}{2}, 3, -\frac{7}{2}, 4, \ldots\}$, onde $a_i = (-1)^{i-1}\frac{1}{2}(i+3) = [2 + (i-1)\frac{1}{2}](-1)^{i-1}$;

c) $\{1, 2x, 3x^2, 4x^3, \ldots\}$, onde $a_i = ix^{i-1} = [1 + (i-1)]x^{i-1}$.

2) Classificação das progressões aritmético-geométricas

As progressões aritmético-geométricas, quanto ao número de termos, podem ser:

a) finitas, se possuem um número finito de termos.

Exemplo: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}\right\}$.

b) infinitas, se possuem um número infinito de termos.

Exemplo: $\{1, 2x, 3x^2, 4x^3, \ldots\}$.

CAPÍTULO VI

CONSIDERAÇÕES SOBRE AS MÉDIAS

1) Generalidades

Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, n números positivos. Definimos as médias aritmética (A), geométrica (G) e harmônica (H) desses n números da seguinte maneira:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$$
$$G = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n}$$
$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}\Big).$$

Demonstramos, em [15] e [16], que $H \leq G \leq A$ e $H = G = A$ se, e somente se, $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

Sejam agora dois números positivos x e y, onde $x \leq y$. Então:

$$A = \frac{x+y}{2}$$
$$G = \sqrt{xy}$$
$$H = \frac{2xy}{x+y}$$

e $G^2 = AH$, ou seja, a média geométrica de x e y é a média geométrica das médias aritmética e harmônica.

Considerando somente x e y, além das três médias já mencionadas podemos definir a média aritmético-geométrica e a média heroniana. No capítulo anterior, vimos a definição da média aritmético-geométrica. A média heroniana, aqui representada pelo símbolo $\mathcal{H}$, é definida como

$$\mathcal{H} = \frac{x + y + \sqrt{xy}}{3}.$$

CAPÍTULO VII

EXERCÍCIOS

Exercício 1) São dados os números l, m e n (inteiros, positivos e distintos). Na PA em que $a_l = m$ e $a_m = l$, determine o termo a_n.

Exercício 2) Calcule o 131º termo da seqüência $1, 2, 7, 8, 13, 14, \ldots$.

Exercício 3) Calcule a razão da PA em que $a_8 = 18$ e r, a_2 e a_4 formam, nesta ordem, outra PA.

Exercício 4) Determine o maior valor que pode ter a razão de uma PA que admita 32, 227 e 942 como termos.

Exercício 5) Os números 4, 139 e 409 são termos de uma PA de razão máxima. Calcule o termo seguinte a 409.

Exercício 6) Considere uma PA infinita de números naturais. Mostre que todos os termos da PA não podem ser números primos, a não ser que a PA tenha todos os termos iguais.

Observação: este exercício foi reproduzido de [20].

Exercício 7) Calcule a soma de todas as frações irredutíveis com denominador 3 compreendidas entre os inteiros positivos a e b.

Exercício 8) As somas dos n primeiros termos de duas PAs estão na razão

$$\frac{7n+1}{4n+27}.$$

Determine a razão entre seus sétimos termos.

Exercício 9) A razão entre as somas dos n primeiros termos de duas PAs é, para todo n natural, igual a

$$\frac{2n-3}{7n-2}.$$

Determine a razão entre seus vigésimos termos.

CAPÍTULO VIII

SOLUÇÕES

Exercício 1)

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_l = a_1 + (l-1)r \therefore a_1 = m - (l-1)r$$

$$a_m = a_1 + (m-1)r \Longrightarrow l = m - (l-1)r + (m-1)r \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow l - m = -(l-m)r \therefore r = -1 \Longrightarrow a_1 = l + m - 1$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Longrightarrow a_n = l + m - 1 - n + 1 = l + m - n.$$

Exercício 2)

a_{131} é o $\left(\dfrac{130}{2} + 1\right)^{\underline{o}}$ termo da seqüência $1, 7, 13, \ldots$.

$$a_1 = 1$$

$$r = 6$$

$$a_{66} = 1 + (66-1)6 = 391.$$

Exercício 3)

Na PA $\{a_i\}$ de razão r, podemos escrever:

$a_8 = a_1 + 7r \Longrightarrow a_1 = a_8 - 7r \therefore a_1 = 18 - 7r$

$a_2 = a_1 + \ \ r \Longrightarrow a_2 = 18 - 6r$

$a_4 = a_1 + 3r \Longrightarrow a_4 = 18 - 4r$

Na PA $\{r, a_2, a_4\}$, podemos escrever:

$$2a_2 = r + a_4$$

$$2(18 - 6r) = r + 18 - 4r \Longrightarrow 18 = 9r \therefore r = 2.$$

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

[1] Almkvist, G. and Berndt, B., "Gauss, Landen, Ramanujan, the Arithmetic-Geometric Mean, Ellipses, π, and the *Ladies Diary*", *The American Mathematical Monthly*, **95**, 1988, pp. 585–608.

[2] "Arithmetic-geometric mean", *The American Mathematical Monthly*, **95**, 1988, pp. 262–263.

[3] Cox, D.A., "The arithmetic-geometric mean of Gauss", *L'Enseignement Mathématique*, **30**, 1984, pp. 275–330.

[4] Eves, H., *Great Moments in Mathematics*, Dolciani Mathematical Expositions, Volume 5, The Mathematical Association of America, 1980.

[5] Guelli, C.A., Iezzi, G. e Dolce, O., *Álgebra I*, Editora Moderna, São Paulo, 1970.

[6] *Hungarian Problem Book II*, New Mathematical Library, # 12, Random House, New York, 1963.

[7] Kaplan, W., *Cálculo Avançado*, Volume II, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1972.

[8] Knopp, K., *Infinite Sequences and Series*, Dover Publications, 1956.

[9] Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series*, Dover Publications, 1990.

[10] Knuth, D.E., *The Art of Computer Programming*, Volume 1, Addison-Wesley, 1973.

[11] Lima, E.L., "Qual é a soma dos ângulos (internos ou externos) de um polígono (convexo ou não)?", *Revista do Professor de Matemática*, **19**, 1991, pp. 31–38, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[12] Lima, E.L., *Meu professor de matemática*, IMPA/VITAE, 1992, Sociedade Brasileira de Matemática, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, RJ 22460-320.

[13] Lopes, L., *Manual de Seqüências e Séries*, Editora Didática e Científica, 1992.

[14] Lopes, L., *Manual de Trigonometria*, Editora Didática e Científica, 1992.

[15] Lopes, L., *Manuel des Fonctions Exponentielles et Logarithmiques*, QED Texte, 1996.

[16] Lopes, L., *Manuel d'Induction*, QED Texte, 1997.

[17] Morgado, A.C.O., Carvalho, J.B.P., Carvalho, P.C.P. e Fernandez, P., *Análise Combinatória e Probabilidade*, IMPA/VITAE, 1991, Sociedade Brasileira de Matemática, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, RJ 22460-320.

[18] Morgado, A.C.O., Wagner, E. e Zani, S.C., *Progressões e Matemática Financeira*, IMPA/VITAE, 1993, Sociedade Brasileira de Matemática, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, RJ 22460-320.

[19] Niven, I., *Maxima and Minima without Calculus*, Dolciani Mathematical Expositions, Volume 6, The Mathematical Association of America, 1979.

[20] *Revista do Professor de Matemática*, **8**, 1986, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[21] *Revista do Professor de Matemática*, **13**, 1988, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[22] *Revista do Professor de Matemática*, **19**, 1991, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[23] *Revista do Professor de Matemática*, **21**, 1992, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[24] *Revista do Professor de Matemática*, **29**, 1995, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[25] Scheid, F., *Theory and Problems of Numerical Analysis*, Schaum's Series, McGraw-Hill, 1988.

[26] Shklarsky, D.O., Chentzov, N.N., and Yaglom, I.M., *The USSR Olympiad Problem Book*, W.H. Freeman, 1962.

[27] Wagner, E., "Duas médias", *Revista do Professor de Matemática*, **18**, 1991, pp. 43–47, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[28] Wagner, E., "A desigualdade de Cauchy-Schwarz", *Revista do Professor de Matemática*, **27**, 1995, pp. 16–20, Sociedade Brasileira de Matemática, Caixa Postal 66281, São Paulo, SP 05315-970.

[29] Wylie, Jr., C.R., *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, 1960.

Suas observações e descobertas

Aos nossos leitores

O autor gostaria de conhecer sua opinião sobre a apresentação e o conteúdo deste manual. Escrever para:

Luís Lopes
A/C Maurice B. Vincent
Avenida das Américas, 1155   Sala 504
Barra da Tijuca   Rio de Janeiro
RJ   22631–000

E-mail: `vincent@unisys.com.br`

Escrevam para o editor ou para o endereço acima para encomendar outros exemplares e títulos ou propor novos problemas que gostariam de ver numa outra edição.

Manuais já publicados

1 Trigonometria
2 Seqüências e Séries
3 Progressões