Esta amostra não contém as
soluções dos exercícios propostos.
Para adquirir este livro do Prof. Luís Lopes,
com suas soluções detalhadas, visite o site
http://www.escolademestres.com/qedtexte

MANUAL

DE

SEQÜÊNCIAS E SÉRIES

VOLUME 1

LUÍS LOPES

MANUAL
DE
SEQÜÊNCIAS E SÉRIES
VOLUME 1

Luís Lopes

QED TEXTE

Composição:
Obra inteiramente composta pelo autor com TEX e $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX.
TEX is a trademark of the American Mathematical Society.
$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX is the TEX macrosystem of the American Mathematical Society.

Capa:
Luiz Cavalheiros

CIP-Brasil. Catalogação na fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

L854m
v.1

Lopes, Luís de Barros Rodrigues, 1953–.
Manual de seqüências e séries, v. 1
/ Luís Lopes. – Rio de Janeiro : L. Lopes, 2005.
180p. :

Contém exercícios propostos e resolvidos.

Inclui bibliografia.

ISBN 85-901503-4-8

1. Seqüências (Matemática). 2. Séries (Matemática).
I. Título.

CDD_515.24
CDU_517.52

Nesta obra, o gênero masculino é empregado a título epiceno.

Depósito legal na Biblioteca Nacional - segundo trimestre 2005

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Luís Lopes
Praia de Botafogo, 440 Sala 2401
Botafogo Rio de Janeiro RJ
22250–040
Fax: (0XX21) 2536 6318
Email: `qed_texte@hotmail.com`

A Walter *(in memoriam)* & Regina,
meus primeiros mestres.

PREFÁCIO

Há treze anos publicávamos um pequeno manual (Edição Vols. 1–2) contendo partes deste Volume 1 e do Volume 2. Desde então continuamos procurando outros exercícios e estudando e aperfeiçoando as técnicas para resolvê-los. Tendo coletado e resolvido um grande número de exercícios, todos interessantes e muitos pouco conhecidos, achamos que é chegado o momento de apresentá-los ao leitor.

A estrutura da primeira edição foi mantida: capítulos (e não mais seções) 1 e 2 introduzem as definições e resultados teóricos que precisamos conhecer para resolver os exercícios do capítulo 3. Neste capítulo e no seguinte residem as principais mudanças em relação à Edição Vols. 1–2: a escolha dos exercícios foi profundamente alterada, tanto em qualidade quanto em quantidade. Assim, foram retirados os exercícios sobre progressões aritmética e geométrica que são tradicionalmente apresentados nos livros didáticos (farão parte da segunda edição de nosso Manual de Progressões), bem como aqueles envolvendo os números (coeficientes) binomiais. Aliás, salientamos que as séries envolvendo números binomiais tornaram-se objeto de um estudo tão aprofundado que escrevemos o Volume 2 com 121 exercícios totalmente dedicados a elas.

Como conseqüência dessas mudanças, o capítulo 4 — soluções — também foi bastante modificado e nele encontramos agora diversas técnicas para calcular o valor de uma série. Capítulo 5 teria ficado sem alteração se não fosse pela apresentação mais rigorosa da soma da série harmônica usando a constante de Euler. Finalmente, a bibliografia encontra-se muito mais completa e atual; e a esse respeito, recomendamos a leitura conjunta deste volume e [17], [29], [35] e [37].

Não poderíamos deixar de registrar e agradecer a colaboração de Cecil Rousseau. Professor Rousseau (da Universidade de Memphis, Tennessee, Estados Unidos) nos enviou os exercícios com as respectivas soluções das Competições Putnam aqui mostrados, além das soluções de diversos outros. Em particular, destacamos as soluções dos exercícios 83, 146, 147 e 175. Esta obra beneficiou-se muitíssimo da sua participação, como poderão os leitores facilmente constatar.

Gostaríamos de continuar coletando material interessante sobre o assunto mas para isso teremos que contar com a ajuda dos leitores: escreva-nos para o email

`qed_texte@hotmail.com`

com seus problemas e soluções e, quem sabe, não teríamos uma segunda edição deste Volume 1?

Luís Lopes

Rio de Janeiro, RJ
Maio, 2005

APRESENTAÇÃO (Edição Vols. 1–2)

É sempre gratificante poder introduzir um trabalho de um ex-aluno. O autor do "Manual de Seqüências e Séries" foi meu aluno na disciplina de pós-graduação Programação Inteira na Universidade de Montreal há dez anos atrás, salientando-se, pelo seu talento, na turma. Sem nenhuma dúvida, Luís Lopes traz uma nova maneira para o acompanhamento e aperfeiçoamento dos estudos de seqüências e séries para aqueles envolvidos no aprendizado do conteúdo das disciplinas de cálculo, probabilidade, combinatória e computação.

Este manual introduz, através de muitos exercícios com soluções, as seqüências e séries mais utilizadas, dando ênfase às séries finitas tão úteis aos problemas probabilísticos, combinatórios e computacionais. Um vestibulando tendo a matemática como um dos exames principais, não terá dificuldades em acompanhar os resultados expostos neste texto.

Devo salientar aos leitores a maneira muito construtiva utilizada pelo autor ao introduzir as técnicas de diferenças finitas de grande utilidade não só no estudo das séries mas também nos métodos de cálculo numérico e de soluções aproximadas de equações diferenciais.

Nelson Maculan
Professor titular de otimização
Universidade Federal do Rio de Janeiro

PREFÁCIO (Edição Vols. 1–2)

Este manual foi escrito com o objetivo de servir a todo tipo de leitor. O leitor que já estudou os temas aqui tratados utilizará o manual quando precisar se lembrar de uma definição ou de uma fórmula; para tal ele terá somente que consultar as partes teóricas do volume (seções I, II e IV) ou olhar os problemas propostos. O leitor que estuda o assunto pela primeira vez deve ler este manual com o apoio de uma obra didática. *Este manual foi escrito para suportar e aprofundar os temas tratados previamente por uma obra didática.*

Nossa experiência como estudante e professor nos ensinou que a melhor maneira de assimilar um assunto é através da resolução de exercícios — e muitos! Nós constatamos que as obras didáticas não fornecem as *soluções* aos problemas propostos e freqüentemente nem mesmo as respostas. O estudante se vê assim frustrado nos seus esforços de compreensão pois nunca pode estar certo do seu raciocínio se pensa que resolveu um exercício corretamente ou então, após passar um certo tempo tentando resolvê-lo, permanece sem conhecer a solução do "quebra-cabeça". Neste manual, nossa preocupação maior foi de apresentar uma solução completa e detalhada a todos os problemas propostos.

Nós estudaremos aqui somente as seqüências e séries finitas, exceção feita para algumas séries especiais como a geométrica e a binomial. O volume contém, entretanto, material suficiente para servir como um primeiro contato ao estudo das séries infinitas. Outra limitação diz respeito ao domínio das séries estudadas: trataremos somente de séries pertencendo ao domínio dos números reais.

Este manual está organizado em quatro seções:

i) na primeira seção, trataremos das definições e fórmulas relativas às seqüências e séries aritméticas, geométricas, harmônicas e aritmético-geométricas. Terminando esta seção, mostraremos a seqüência de Fibonacci e as séries binomial, de potências (ou inteira) e telescópica.

ii) na segunda seção apresentaremos, de uma maneira bem concisa, a teoria das diferenças finitas. Utilizaremos esta teoria para avaliar as somas de séries tais como $\sum_{i=1}^{n} i^2$ e $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)(i+2)(i+3)}$.

iii) a terceira seção contém noventa e cinco exercícios e suas soluções. Os exercícios foram escolhidos a fim de que o leitor possa aplicar as diversas fórmulas e noções introduzidas nas seções I) e II).

iv) a quarta seção apresenta alguns resultados de caráter geral como a fórmula de somação de Euler-Maclaurin.

Os exercícios seguem uma certa ordem de dificuldade mas nosso objetivo principal foi de grupá-los por assuntos. Em cada grupo eles são colocados de maneira que um resultado obtido num exercício possa vir a ser aplicado, como resultado parcial, num exercício posterior. O símbolo ♠, colocado ao lado do número que identifica o exercício, indicará que a solução encontrada alcança ou ultrapassa o comprimento de uma página.

Nós consultamos diversas obras para redigir as partes teóricas deste manual. A relação completa das referências encontra-se no fim do volume.

Diversas definições da seção I e quase todos os exercícios deste manual provêm dos livros *Algèbre et Trigonométrie* por J. Vincent Robison, McGraw-Hill, 1967 e *Single-Variable Calculus* por R. A. Adams, Addison-Wesley, 1990. Queremos agradecer a estes dois editores por permitirem suas reproduções nesta publicação.

Agradecemos igualmente a Lucie Bibeau por seus comentários e sugestões.

Luís Lopes

Rio de Janeiro, RJ
Abril, 1992

CONTEÚDO

CAPÍTULO I

SEQÜÊNCIAS E SÉRIES

1) Seqüência aritmética

A seqüência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é uma *seqüência aritmética* se, e somente se, existe uma constante r tal que

$$a_i - a_{i-1} = r, \qquad \forall i > 1. \tag{1}$$

Designamos habitualmente uma seqüência aritmética por *progressão aritmética* (ou PA, para abreviar).

A constante r é a *razão* da PA.

O termo de ordem n da PA é

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \qquad n \geq 1. \tag{2}$$

2) Série aritmética

Designamos por *série aritmética* a soma dos n termos de uma PA e a representamos por S_n.

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}. \tag{3}$$

3) Média aritmética

Designamos por *meios aritméticos* os termos situados entre dois termos não consecutivos de uma progressão aritmética. Calcular a média aritmética b de dois números a e c equivale a inserir um meio aritmético entre a e c.

$$b = \frac{a+c}{2}.$$

A média aritmética A de n números a_i é

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \tag{4}$$

4) Seqüência geométrica

A seqüência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é uma *seqüência geométrica* se, e somente se,

a) $a_i \neq 0 \ \forall i$;

b) existe uma constante $q \neq 0$ tal que

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = q, \qquad \forall i > 1. \tag{5}$$

Designamos habitualmente uma seqüência geométrica por *progressão geométrica* (ou PG, para abreviar).

A constante q é a *razão* da PG.

O termo de ordem n da PG é

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \qquad n \geq 1. \tag{6}$$

5) Série geométrica

Designamos por *série geométrica* a soma dos n termos de uma PG e a representamos por S_n.

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \begin{cases} na_1 & \text{se } q = 1; \\ a_1 & \text{se } q = -1 \text{ e } n \text{ é ímpar;} \\ 0 & \text{se } q = -1 \text{ e } n \text{ é par.} \end{cases}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} = \frac{a_1 - q a_n}{1-q} \qquad \text{se } q \neq 1. \tag{7}$$

6) Série geométrica infinita

Se, em (7), $-1 < q < 1$ (ou seja, $|q| < 1$) e $n \to \infty$, temos:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q}\right) = \frac{a_1}{1-q}.$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \qquad |q| < 1. \tag{8}$$

7) Média geométrica

Designamos por *meios geométricos* os termos situados entre dois termos não consecutivos de uma progressão geométrica. Calcular a média geométrica b de dois números a e c *possuindo o mesmo sinal* equivale a inserir um meio geométrico entre a e c.

$$b = (\pm)\sqrt{ac},$$

onde o sinal a ser usado é o sinal comum a a e c.

A média geométrica G de n números a_i $(a_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n)$ é

$$G = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}. \tag{9}$$

8) Seqüência harmônica

A seqüência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é uma *seqüência harmônica* se, e somente se,

$$\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right\}$$

é uma seqüência aritmética.

Designamos habitualmente uma seqüência harmônica por *progressão harmônica* (ou PH, para abreviar).

A seqüência

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$$

é um exemplo de uma seqüência harmônica.

9) Série harmônica

Designamos por *série harmônica* a soma dos n termos de uma seqüência harmônica e a representamos por S_n. A série

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

é um exemplo de uma série harmônica.

10) Média harmônica

Designamos por *meios harmônicos* os termos situados entre dois termos não consecutivos de uma progressão harmônica. Calcular a média harmônica b de dois números a e c *possuindo o mesmo sinal* equivale a inserir um meio harmônico entre a e c.

$$b = \frac{2ac}{a+c}.$$

A média harmônica H de n números a_i $(a_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n)$ é

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right). \tag{10}$$

Sejam n números a_i $(a_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n)$. Temos a relação

$$H \le G \le A \quad \text{e} \quad H = G = A \iff a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

Para duas demonstrações diferentes e aplicações importantes e interessantes deste resultado, ver [33] e [35]. Ver também [36] para uma interpretação geométrica destas e outras médias, tais como as médias contra-harmônica e quadrática, além da definição da média aritmético-geométrica.

11) Seqüência aritmético-geométrica

A seqüência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é uma *seqüência aritmético-geométrica* se, e somente se, podemos escrever seus termos como

$$a_i = \big(a_1 + (i-1)r\big)q^{i-1}, \qquad \forall i \ge 1, \tag{11}$$

onde r $(r \ne 0)$ e q $(q \ne 0$ e $1)$ são constantes.

Designamos habitualmente uma seqüência aritmético-geométrica por *progressão aritmético-geométrica*.

12) Série aritmético-geométrica

Designamos por *série aritmético-geométrica* a soma dos n termos de uma progressão aritmético-geométrica e a representamos por S_n.

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq\big(1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n\big)}{(1-q)^2} \qquad (q \ne 0 \text{ e } 1). \tag{12}$$

13) Série aritmético-geométrica infinita

Se, em (12), $-1 < q < 1$ (ou seja, $|q| < 1$) e $n \to \infty$, temos:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}, \qquad |q| < 1. \tag{13}$$

Para a prova, ver [36].

14) Série hipergeométrica

Sejam $k, n \in \mathbb{Z}^+$, $a, b, c, x \in \mathbb{R}$, $c \ne 0, -1, -2, \ldots$ e $(u)_k$ a notação de Pochhammer para o fatorial ascendente, ou seja,

$$(u)_k = u(u+1)\cdots(u+k-1), \qquad (u)_0 = 1.$$

A série hipergeométrica $F(a, b; c; x)$ é dada por

$$F(a, b; c; x) = \sum_{k\ge 0} \frac{(a)_k (b)_k}{k!(c)_k} x^k = \sum_{k \ge 0} t_k x^k. \tag{14}$$

Observe que $t_0 = 1$ e que

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(k+a)(k+b)}{(k+c)(k+1)}x.$$

Na teoria (ver [2], [17] e [44]) das séries hipergeométricas $F(a,b;c;x)$ é chamada de 2-F-1 com base x e é representada por

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} a\,,b \\ c \end{matrix}\;;\;x\right].$$

Esta série converge em geral para $|x| < 1$, mas converge também se ela é finita, o que acontece se a ou b é um inteiro negativo.

Um teorema de Chu-Vandermonde ([2], [20]) diz que uma série 2-F-1 com base 1 finita é somável, ou seja, possui uma forma fechada. Assim,

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} a\,,\,-n \\ c \end{matrix}\;;\;1\right] = \frac{(c-a)_n}{(c)_n}, \qquad n \geq 0;\; c \neq 0, -1, -2, \ldots.$$

A demonstração e aplicações deste resultado encontram-se nos exercícios 107–111 de [37].

Considere agora a série hipergeométrica $F(a,1;c;1)$. Sabe-se que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k}{(c)_k} = \sum_{k=0}^{n} t_k$$

possui uma forma fechada, dada por

$$S_n(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{(n\alpha+\beta)t_n - \gamma t_1 + \alpha + \beta - \gamma}{\alpha+\beta-\gamma},$$

onde

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{\alpha k + \beta}{\alpha k + \gamma},$$

$t_0 = 1$, $\alpha, \beta \neq 0$ e $\alpha + \beta \neq \gamma$.

A demonstração e aplicações deste resultado encontram-se nos exercícios 124–127.

15) Seqüência de Fibonacci

Os termos da seqüência de Fibonacci satisfazem a seguinte equação de recorrência:

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, \qquad \text{para } \; i \geq 2 \; \text{ e com } F_0 = 0,\; F_1 = 1.$$

Obtemos então

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\}.$$

Resolvendo-se a equação de recorrência (ver [35], por exemplo) e pondo $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ e $\hat{\phi} = (1-\sqrt{5})/2$, obtemos a fórmula, somente em função de i, para o termo geral F_i:

$$F_i = \frac{\sqrt{5}}{5}(\phi^i - \hat{\phi}^i).$$

16) Série binomial

Se $r = n$ é um inteiro positivo, o desenvolvimento de $(a+b)^r$ terá $n+1$ termos e é válido para todo a, b.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \\ + \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}a^{n-i}b^i + \cdots + \frac{n}{1!}ab^{n-1} + b^n, \qquad \forall a, b. \tag{15}$$

A fórmula (15) é chamada de *fórmula do binômio*. Uma outra maneira de escrever a fórmula do binômio é

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \\ + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n, \qquad \forall a, b. \tag{16}$$

Os coeficientes $\binom{n}{i}$, chamados de *coeficientes do binômio*, são dados por

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{(n)^{(i)}}{i!},$$

onde, por definição, $0! = 1$, $i! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot i$, $(n)^{(i)} = n(n-1)\cdots(n-i+1)$ e $(n)^{(0)} = 1$.

Observações:

i) Define-se $\binom{n}{i} = 0$ para i inteiro < 0.

ii) Observe que $\binom{n}{i} = 0$ para $i > n$, i e n inteiros ≥ 0. Isto porque o fator 0 aparecerá sempre no numerador de $\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$.

iii) Observe que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ para i e n inteiros ≥ 0.

iv) Valores particulares para $\binom{n}{i}$, n inteiro ≥ 0: $\binom{0}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

Propriedades dos coeficientes do binômio

Os coeficientes do binômio possuem muitas propriedades interessantes. Entre elas, destacamos (para as demonstrações, ver [37]):

a) $$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1};$$

Nota: esta propriedade conduz ao triângulo de Pascal.

b) $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n;$$

c) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0;$

d) $\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1};$

e) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1};$

f) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1};$

g) $1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1};$

h) $1\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} n\binom{n}{n} = 0;$

i) $\binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \cdots + \binom{m}{p}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{p};$

j) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n},$

onde i, m, n e p representam números inteiros positivos.

Estas são apenas algumas das propriedades que os coeficientes do binômio possuem. Para uma relação mais completa ver [16] e [47] e para um estudo mais profundo e teórico das propriedades, [17], [29], [37], [44] e [51].

Se colocamos $a = 1$ e $b = x$ em (15) ou (16), obtemos:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + nx^{n-1} + x^n$$
$$(1+x)^n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i, \qquad \forall x.$$

Se r é um número real, o desenvolvimento de $(1+x)^r$ terá um número infinito de termos, além de precisarmos limitar os valores de x a um intervalo de convergência. O desenvolvimento toma a forma

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$(1+x)^r = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-i+1)}{i!}x^i \qquad (-1 < x < 1). \tag{17}$$

Esta última série é chamada de *série binomial*.

Se $r=-1$, resulta:

$$(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots \qquad (-1<x<1);$$

$$(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots \qquad (-1<x<1).$$

Se $r=-1$ e x é substituído por $x/2$ na igualdade (17), temos:

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{1+\dfrac{x}{2}}=1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots \qquad (-2<x<2).$$

Se substituímos 1 por 2 e $x/2$ por $-x$ na igualdade anterior, obtemos:

$$(2-x)^{-1}=\frac{1}{2-x}=\left[2\left(1-\frac{x}{2}\right)\right]^{-1}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots\right) \qquad (-2<x<2).$$

Se substituímos x por $x/2$ na igualdade acima, obtemos:

$$\left(2-\frac{x}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2-\dfrac{x}{2}}=\left[2\left(1-\frac{x}{4}\right)\right]^{-1}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{x}{4}\right)^3+\cdots\right) \qquad (-4<x<4).$$

Estes três últimos desenvolvimentos nos levam a escrever

$$(a-bx)^{-1}=\frac{1}{a-bx}=\left[a\left(1-\frac{bx}{a}\right)\right]^{-1}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{bx}{a}\right)^{-1}$$

$$(a-bx)^{-1}=\frac{1}{a}\left(1+\frac{bx}{a}+\left(\frac{bx}{a}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^3+\cdots\right) \qquad (b^2x^2<a^2);$$

$$(a+bx)^{-1}=\frac{1}{a+bx}=\left[a\left(1+\frac{bx}{a}\right)\right]^{-1}=\frac{1}{a}\left(1+\frac{bx}{a}\right)^{-1}$$

$$(a+bx)^{-1}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{bx}{a}+\left(\frac{bx}{a}\right)^2-\left(\frac{bx}{a}\right)^3+\cdots\right) \qquad (b^2x^2<a^2).$$

E generalizando,

$$(a-bx)^r = \left[a\left(1-\frac{bx}{a}\right)\right]^r = a^r\left(1-\frac{bx}{a}\right)^r =$$
$$= a^r\left(1 - r\left(\frac{bx}{a}\right) + \frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{bx}{a}\right)^2 - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\left(\frac{bx}{a}\right)^3 + \cdots\right)$$
$$(b^2x^2 < a^2); \qquad (18)$$
$$(a+bx)^r = \left[a\left(1+\frac{bx}{a}\right)\right]^r = a^r\left(1+\frac{bx}{a}\right)^r =$$
$$= a^r\left(1 + r\left(\frac{bx}{a}\right) + \frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\left(\frac{bx}{a}\right)^3 + \cdots\right)$$
$$(b^2x^2 < a^2). \qquad (19)$$

Para $a = 1$, $b = 1$, $r = 1/2$ e $x^2 < 1$, temos:

$$(1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots$$
$$= 1 - \sum_{k\geq 0}\frac{2}{k+1}\binom{2k}{k}\left(\frac{-x}{4}\right)^{k+1} = 1 - \sum_{k\geq 0}2C_k\left(\frac{-x}{4}\right)^{k+1};$$
$$(1-x)^{1/2} = \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots$$
$$= 1 - \sum_{k\geq 0}\frac{2}{k+1}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^{k+1} = 1 - \sum_{k\geq 0}2C_k\left(\frac{x}{4}\right)^{k+1},$$

onde C_k é o k-ésimo número de Catalan.

Para $a = 1$, $b = 1$, $r = -1/2$ e $x^2 < 1$, temos:

$$(1+x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{-x}{4}\right)^k;$$
$$(1-x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Podemos escrever as séries binomiais na forma equivalente

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots, \qquad (20)$$

onde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ são constantes conhecidas chamadas de *coeficientes da série.*

17) Série de potências

Por uma série de potências (ou série inteira) de x entende-se uma série da forma mostrada na igualdade (20).

Teorema 1.1: (ver [23] ou [45], por exemplo) *Toda série de potências tem um intervalo de convergência* $(-\mathcal{R}, \mathcal{R})$ *tal que a série converge absolutamente*† *quando* $|x| < \mathcal{R}$ *e diverge quando* $|x| > \mathcal{R}$.

O número $\mathcal{R}$ pode ser 0, um número positivo finito, ou ∞ (situação em que a série converge para todo x). O número $\mathcal{R}$ é chamado de *raio de convergência* da série de potências.

Nota: quando $\mathcal{R}$ é um número positivo finito, a série pode convergir ou divergir em cada um dos valores extremos $x = \mathcal{R}$, $x = -\mathcal{R}$. Esses valores devem ser estudados separadamente, para cada série.

Para o caso da série binomial $(1 + x)^r$, em $x = 1$ a série converge se $r > -1$ e diverge se $r \leq -1$. Ainda para $x = 1$, a série converge absolutamente se $r > 0$. Em $x = -1$, a série converge absolutamente se $r > 0$ e diverge se $r < 0$.

Teorema 1.2: (ver [23] ou [45], por exemplo) *Pode-se derivar uma série de potências termo a termo dentro do intervalo de convergência; ou seja, se*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \qquad (-\mathcal{R} < x < \mathcal{R}),$$

então f *é derivável no intervalo* $(-\mathcal{R}, \mathcal{R})$ *e*

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \qquad (-\mathcal{R} < x < \mathcal{R}).$$

Teorema 1.3: (ver [23] ou [45], por exemplo) *Pode-se integrar uma série de potências termo a termo dentro do intervalo de convergência; ou seja, se*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \qquad (-\mathcal{R} < x < \mathcal{R}),$$

então f *é integrável em qualquer subintervalo fechado de* $(-\mathcal{R}, \mathcal{R})$. *Se* $|x| < \mathcal{R}$, *então*

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots .$$

† Dizemos que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \qquad (*)$$

converge absolutamente se a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots, \qquad (**)$$

formada com os valores absolutos dos seus termos, converge. Se a série $(*)$ converge e a série $(**)$ diverge, dizemos que a série $(*)$ *converge condicionalmente*. Qualquer série absolutamente convergente, converge.

18) Série telescópica

Seja a série $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$.

Já que $f(i) = \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$, podemos escrever S_n como

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Se $n \to \infty$, $\quad S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ é um exemplo de uma série telescópica. Elas são chamadas assim porque as somas S_n se reduzem a uma expressão simples quando decompomos seu termo geral $f(i)$ numa soma de duas ou mais frações (ou termos).

Finalmente, lembramos algumas operações elementares com séries:

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{m\le i\le n} x_i = 0 \quad \text{se } n < m; \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{onde } c \text{ é uma constante;} \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \quad \text{onde } c \text{ é uma constante;} \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i; \tag{24}$$

$$x\sum_{i=0}^{n} x^i = \sum_{i=1}^{n+1} x^i = \sum_{i=0}^{n} x^{i+1}; \tag{25}$$

$$\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n} x^i = \sum_{i=1}^{n} x^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i; \tag{26}$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n} x^i = \sum_{i=1}^{n} ix^{i-1}. \tag{27}$$

CAPÍTULO II

DIFERENÇAS FINITAS

Neste capítulo, apresentaremos somente as definições e fórmulas que serão necessárias para calcular algumas séries no próximo capítulo. Para um tratamento mais completo do assunto, ver [25], [41] e [52].

Vamos usar a seguinte notação:

$$f(x_i) = f_i \quad \text{e} \quad x_i = x_0 + i, \qquad i = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \qquad \text{(primeira diferença);}$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \qquad \text{(segunda diferença);}$$

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i \qquad (n \text{ inteiro positivo});$$

$$\Delta^n f_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f_{i+n-j}.$$

O símbolo Δ representa o operador diferença.

O operador Δ possui as seguintes propriedades, duas das quais (igualdades (28) e (29)) são características dos operadores lineares:

i) $\Delta(f_i \pm g_i) = (f_{i+1} \pm g_{i+1}) - (f_i \pm g_i) = \Delta f_i \pm \Delta g_i;$ (28)

ii) $\Delta(cf_i) = c\Delta f_i$ (c é uma constante); (29)

iii) $\Delta^m(\Delta^n f_i) = \Delta^{m+n} f_i$ (m, n são inteiros positivos); (30)

iv) $\Delta(f_i g_i) = f_{i+1}\Delta g_i + g_i \Delta f_i = g_{i+1}\Delta f_i + f_i \Delta g_i.$ (31)

Definimos agora os polinômios fatoriais

$$(x)^{(n)} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

e

$$(x)^{-(n)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{1}{(x+n)^{(n)}}.$$

Seguem duas fórmulas muito importantes:

$$\Delta(x)^{(n)} = (x+1)^{(n)} - (x)^{(n)} = n(x)^{(n-1)} \tag{32}$$

e

$$\Delta(x)^{-(n)} = (x+1)^{-(n)} - (x)^{-(n)} = -n(x)^{-(n+1)}. \tag{33}$$

Seja $p_n(x)$ o polinômio

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Podemos exprimir $p_n(x)$ em função dos polinômios fatoriais.

$$p_n(x) = r_0 + r_1(x)^{(1)} + r_2(x)^{(2)} + \cdots + r_n(x)^{(n)},$$

onde os r_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ são os restos das seguintes divisões:

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= r_0 + xq_0(x) \\
q_0(x) &= r_1 + (x-1)q_1(x) \\
q_1(x) &= r_2 + (x-2)q_2(x) \\
\vdots\ & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\
q_{n-1}(x) &= r_n.
\end{aligned}$$

Evidentemente, $r_0 = a_0$ e $r_n = a_n$. E temos também (para a demonstração, ver [37], exercício 56)

$$\Delta^j p_n(0) = j!\, r_j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Definição: $\Delta^{-1}p(x)$ é uma (um polinômio) *antidiferença* do polinômio $p(x)$ se

$$\Delta\big(\Delta^{-1}p(x)\big) = p(x). \tag{34}$$

Exemplo: calcular uma antidiferença de $p(i) = i^3$.
Exprimamos $p(i)$ em função dos polinômios fatoriais. Efetuando as divisões mencionadas, obtemos os restos r_0 $(r_0 = 0)$, r_1 $(r_1 = 1)$, r_2 $(r_2 = 3)$ e r_3 $(r_3 = 1)$. Escrevemos $p(i)$ como

$$p(i) = 1(i)^{(1)} + 3(i)^{(2)} + 1(i)^{(3)}.$$

Utilizando as fórmulas (28), (29), (32) e (34), encontramos $\Delta^{-1}p(i)$.

$$\Delta^{-1}p(i) = \frac{1}{2}(i)^{(2)} + (i)^{(3)} + \frac{1}{4}(i)^{(4)} + c,$$

onde c é uma constante arbitrária pois $\Delta c = c - c = 0$.

Teorema 2.1: *Se $F(i)$ é uma antidiferença de $f(i)$, então*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(i) = F(n+1) - F(1). \tag{35}$$

Demonstração:

Da definição de $F(i)$, vem:

$$\begin{array}{rcl}
f(1) = & \Delta F(1) & = F(2) - F(1) \\
f(2) = & \Delta F(2) & = F(3) - F(2) \\
f(3) = & \Delta F(3) & = F(4) - F(3) \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
f(n-1) = & \Delta F(n-1) & = F(n) - F(n-1) \\
f(n) = & \Delta F(n) & = F(n+1) - F(n)
\end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta F(i) = F(n+1) - F(1). \quad \blacksquare$$

É claro que todas as séries para as quais poderemos empregar este teorema serão séries telescópicas.

Exemplo: calcular o valor de $S_n^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} i^3$.

$$S_n^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} \left[(i)^{(1)} + 3(i)^{(2)} + (i)^{(3)}\right] = \left[\frac{1}{2}(i)^{(2)} + (i)^{(3)} + \frac{1}{4}(i)^{(4)}\right]_{i=1}^{i=n+1}$$

$$S_n^{(3)} = \frac{1}{2}(n+1)^{(2)} + (n+1)^{(3)} + \frac{1}{4}(n+1)^{(4)} - \frac{1}{2}(1)^{(2)} - (1)^{(3)} - \frac{1}{4}(1)^{(4)}$$

$$S_n^{(3)} = \frac{(n+1)n}{2} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} - 0 - 0 - 0$$

$$S_n^{(3)} = n(n+1)\frac{2 + 4n - 4 + n^2 - 3n + 2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \tag{36}$$

Observações:

i) a igualdade (36) nos permite concluir que

$$S_n^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2 = \left[S_n^{(1)}\right]^2.$$

ii) como $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(i) = F(n+1) - F(1)$, a igualdade (36) nos permite conjecturar que se $f(i) = i^3$, então $F(i) = [(i-1)i/2]^2$. Verificando nossa conjectura, vem:

$$\Delta F(i) = F(i+1) - F(i) = \frac{i^2(i+1)^2}{4} - \frac{(i-1)^2 i^2}{4} = i^3 = f(i).$$

Assim, nossa conjectura revelou-se verdadeira.

CAPÍTULO III

EXERCÍCIOS

Em todos os exercícios, i, j, k, l, m, n e p denotam números inteiros.

Exercício 1) Sejam $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ os termos de uma progressão aritmética. Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Exercício 2) Mostre que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = S_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercício 3) Mostre que $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = S_n = \sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$.

Exercício 4) Mostre que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = S_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$.

Exercício 5) Mostre que $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n-3) = S_n = \sum_{i=1}^{n} (4i-3) = n(2n-1)$.

Exercício 6) Sejam $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ os termos de uma progressão geométrica. Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \dfrac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}$ se $q \neq 1$.

Exercício 7) Mostre que $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = S_n = \sum_{i=1}^{n} 2^i = 2(2^n - 1)$.

Exercício 8) Mostre que $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} = S_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2^{i-1}} = \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}}$.

Exercício 9) Sejam $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ os termos de uma progressão aritmético-geométrica. Mostre que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq\big(1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n\big)}{(1-q)^2},$$

onde $q \neq 1$.

Exercício 10) Mostre que

$$1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + n \times 3^n = S_n = \sum_{i=1}^{n} i3^i = \frac{3}{4}\big((2n-1)3^n + 1\big).$$

Exercício 11) Mostre que $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{n}{2^n} = S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Exercício 12) Mostre que $1 + 3\dfrac{2n+1}{2n-1} + 5\Big(\dfrac{2n+1}{2n-1}\Big)^2 + 7\Big(\dfrac{2n+1}{2n-1}\Big)^3 + \cdots +$

$$(2n-1)\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^{n-1} = S_n = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^{i-1} = n(2n-1).$$

Exercício 13) Mostre que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = S_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercício 14) Mostre que

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = S_n = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.$$

Exercício 15) Mostre que

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = S_n = \sum_{i=1}^{n}(2i)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

Exercício 16) Mostre que $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = S_n^{(3)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercício 17) Mostre que

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3 = S_n = \sum_{i=1}^{n}(2i)^3 = 2n^2(n+1)^2.$$

Exercício 18) Mostre que

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = S_n = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

Exercício 19) Mostre que $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercício 20) Mostre que $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

Exercício 21) Seja $S_n^{(k)} = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = \sum_{i=1}^{n} i^k$, ou seja, $S_n^{(k)}$ denota a soma da k-ésima potência dos n primeiros números naturais. Então, $S_n^{(0)} = n$ e, como visto em exercícios anteriores, $S_n^{(1)} = n(n+1)/2$, $S_n^{(2)} = n(n+1)(2n+1)/6$ e $S_n^{(3)} = [n(n+1)]^2/4 = [S_n^{(1)}]^2$. Mostre que

$$\binom{k+1}{1} S_n^{(k)} + \binom{k+1}{2} S_n^{(k-1)} + \cdots + \binom{k+1}{k} S_n^{(1)} + \binom{k+1}{k+1} S_n^{(0)} = (n+1)^{k+1} - 1.$$

Assim, temos uma fórmula recorrente que permite calcular $S_n^{(k)}$ conhecidos $S_n^{(k-1)}, S_n^{(k-2)}, \ldots, S_n^{(1)}, S_n^{(0)}$.

Sugestão: na identidade $(x+1)^{k+1} \equiv \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^{k+1-i}$, ponha sucessivamente $x = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Exercício 22) Mostre que $3[S_n^{(2)}]^2 = S_n^{(3)} + 2S_n^{(5)}$ e $2[S_n^{(3)}]^2 = S_n^{(5)} + S_n^{(7)}$.

Sugestão: calcule de dois modos diferentes a soma dos números que figuram nos quadros 1 e 2 abaixo:

1^2	2^2	3^2	$\ldots$	i^2	$\ldots$	n^2
2^2	4^2	6^2	$\ldots$	$(2i)^2$	$\ldots$	$(2n)^2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i^2	$(2i)^2$	$(3i)^2$	$\ldots$	$(i^2)^2$	$\ldots$	$(in)^2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n^2	$(2n)^2$	$(3n)^2$	$\ldots$	$(ni)^2$	$\ldots$	$(n^2)^2$

Quadro 1

1^3	2^3	3^3	$\ldots$	i^3	$\ldots$	n^3
2^3	4^3	6^3	$\ldots$	$(2i)^3$	$\ldots$	$(2n)^3$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i^3	$(2i)^3$	$(3i)^3$	$\ldots$	$(i^2)^3$	$\ldots$	$(in)^3$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n^3	$(2n)^3$	$(3n)^3$	$\ldots$	$(ni)^3$	$\ldots$	$(n^2)^3$

Quadro 2

Exercício 23) Calcule o vigésimo termo da seqüência na qual para todo n inteiro positivo a soma dos n primeiros termos vale $1/n$.

Exercício 24) Determine o valor da expressão

$$f\Big(\frac{1}{2000}\Big)+f\Big(\frac{2}{2000}\Big)+\cdots+f\Big(\frac{1999}{2000}\Big)+f\Big(\frac{2000}{2000}\Big)+f\Big(\frac{2000}{1999}\Big)+\cdots+f\Big(\frac{2000}{1}\Big),$$

supondo que $f(x)=x^2/(1+x^2)$.

Exercício 25) A seqüência $\{a_n\}$, $n\in\mathbb{N}^*$ verifica as relações

$$a_1=\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad a_n=\frac{a_{n-1}}{2na_{n-1}+1}$$

para todo número natural $n>1$. Calcule $a_1+a_2+\cdots+a_{1998}$.

Exercício 26) Mostre que

$$\frac{3}{1\times 2}+\frac{3}{2\times 3}+\frac{3}{3\times 4}+\cdots+\frac{3}{n(n+1)}=S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{i(i+1)}=\frac{3n}{n+1}.$$

Exercício 27) Mostre que

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}=S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+2)}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercício 28) Mostre que $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\dfrac{1}{5\times 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Exercício 29) Mostre que $\dfrac{1}{1\times 4}+\dfrac{1}{4\times 7}+\dfrac{1}{7\times 10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(3i-2)(3i+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

Exercício 30) Mostre que $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Exercício 31) Mostre que $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(i+1)(i+2)(i+3)}=\frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$.

Exercício 32) Mostre que $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2-1/4}=2\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)$.

Exercício 33) Mostre que

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+2)^2}{i(i+4)}=n\Big[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{3(n+3)}+\frac{1}{4(n+4)}\Big].$$

Exercício 34) Mostre que $\dfrac{3}{1\times 2\times 2}+\dfrac{4}{2\times 3\times 2^2}+\dfrac{5}{3\times 4\times 2^3}+\cdots+$

$$\frac{n+2}{n(n+1)2^n}=S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i+2}{i(i+1)2^i}=1-\frac{1}{(n+1)2^n}.$$

Exercício 35) Mostre que † $S_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i^2 = (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} i$.

Exercício 36) Mostre que ‡ $1\cdot1!+2\cdot2!+\cdots+n\cdot n! = S_n = \sum_{i=1}^{n} i\cdot i! = (n+1)!-1$, onde $i! = i(i-1)(i-2)\cdots 2\cdot 1$.

Exercício 37) Mostre que

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} i\log_{2^i} x = n\log_2 x.$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [11].

Exercício 38) Calcule a soma dos n primeiros termos da seguinte seqüência:

$$\left\{\frac{1^2}{1}, \frac{1^2+2^2}{2}, \frac{1^2+2^2+3^2}{3}, \ldots\right\}.$$

Exercício 39) Calcule $S = \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{(2+\pi)^{2i}}$.

Exercício 40) Calcule $S = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-5)^i}{8^{2i}}$.

Exercício 41) Calcule $S_n = \sum_{i=2}^{n}\left(3e^{-i} - \frac{2}{i^2-1}\right)$ e $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Exercício 42) Dê os valores de x e y para os quais podemos desenvolver os binômios $(2-x)^{-1}$ e $(4+y)^{1/2}$ como séries binomiais e obtenha os quatro primeiros termos dos desenvolvimentos.

Exercício 43) Calcule as expressões seguintes com precisão até o terceiro decimal utilizando o desenvolvimento em séries binomiais:

a) $(1{,}01)^5$ **b)** $(1{,}08)^{3/4}$ **c)** $(1{,}05)^{-5}$

Exercício 44) Avalie a raiz principal dos números seguintes com precisão até o terceiro decimal:

a) $\sqrt[5]{31}$ **b)** $\sqrt{1{,}02}$ **c)** $\sqrt[3]{-28}$

Exercício 45) Segundo o teorema de De Moivre, se n é um inteiro positivo, $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, onde $i^2 = -1$. Para $n = 3$, desenvolva o membro da esquerda segundo a igualdade (15). Compare em seguida as partes reais e imaginárias dos membros da esquerda e da direita para estabelecer as identidades de $\cos 3\alpha$ e $\sin 3\alpha$.

Sugestão: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.

† Fonte: The Sixth Canadian Mathematics Olympiad, problema 1, 1974.

‡ Fonte: The First Canadian Mathematics Olympiad, problema 6, 1969.

Exercício 46) Estabeleça as identidades de $\cos 5\alpha$ e $\sin 5\alpha$.

Exercício 47) Mostre, para $x \neq 1$, que

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} ix^i = \frac{x^{n+1}(nx - n - 1) + x}{(x-1)^2}.$$

Calcule, em seguida, $S_n(2)$.

Sugestão: utilize o resultado do exercício 11.

Exercício 48) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} = (n-1)2^n + 1$.

Exercício 49) Mostre, para $|x| < 1$, que

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Sugestão: utilize o método de resolução do exercício 9 ou o resultado do exercício 47.

Exercício 50) Mostre que $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{4^{2i-2}} = \frac{256}{225}$.

Sugestão: utilize o resultado do exercício anterior.

Exercício 51) Calcule a soma da série

$$1 + 2\Big(\frac{1}{5}\Big) + 3\Big(\frac{1}{5}\Big)^2 + \cdots = S = \sum_{i=1}^{\infty} i(0{,}2)^{i-1}.$$

Sugestão: calcule, para $-1 < x < 1$, a soma da série $S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} ix^{i-1}$.

Exercício 52) Calcule a soma da série $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{2^i}$.

Nota: para resolver este exercício, você deve saber como calcular a derivada de um polinômio e também a derivada da divisão de dois polinômios.

Sugestão: calcule, para $|x| < 1$, a soma da série $S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 x^i$.

Exercício 53) Mostre que

$$x^2 + \frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(x+3)^2}{27} + \cdots = S(x) = \frac{3}{2}(x^2 + x + 1).$$

Exercício 54) Calcule a soma da série $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} i^2 x^{n-i}$. Mostre, em seguida, que $S_n(2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 2^{n-i} = 3 \cdot 2^{n+1} - (n^2 + 4n + 6)$.

Nota: para resolver este exercício, você deve saber como derivar funções.

Sugestão: utilize o resultado do exercício 47.

Exercício 55) Mostre que

$$S = 1 \times 3 - 2 \times 4x + 3 \times 5x^2 - 4 \times 6x^3 + \cdots = \frac{x+3}{(1+x)^3} \qquad (-1 < x < 1).$$

Nota: para resolver este exercício, você deve saber como derivar funções.

Sugestão: $x^3 - 2x^4 + 3x^5 - 4x^6 + \cdots = x^3/(1+x)^2$.

Exercício 56) Calcule, para $-1 < x < 1$, a soma da série

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2(i+1)x^{2i} = 2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6 + \cdots.$$

Exercício 57) Calcule, para $-1 < x < 1$, a soma da série

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{i+1}}{i+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Nota: para resolver este exercício, você deve saber como integrar funções.

Sugestão: $\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x)$.

Exercício 58) Calcule, para $-1 < x < 1$, a soma da série

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i+3} = \frac{1}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{6} + \cdots.$$

Sugestão: $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$.

Exercício 59) Mostre, para $2 \leq x < 4$, que

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x-3)^i}{i} = (x-3) + \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(x-3)^3}{3} + \frac{(x-3)^4}{4} + \cdots = -\ln(4-x).$$

Sugestão: observe a resolução dos dois últimos exercícios.

Exercício 60) Calcule, para $-1 < x < 1$, a soma da série

$$S(x) = x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2i-1)}{2^i\, i!\, (2i+1)} x^{2i+1} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}\frac{x^5}{5} + \cdots.$$

Nota: para resolver este exercício, você deve saber como integrar funções.

Sugestão: $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin} x$.

Exercício 61) Calcule, para $-1 < x < 1$, a soma da série

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Nota: para resolver este exercício, você deve saber como integrar funções.

Sugestão: $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} x$.

Exercício 62) Mostre que

$$S = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(2k-1)2k(2k+1)} = \ln 2 - \frac{1}{4}.$$

Exercício 63) Mostre que

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)\frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{2}\ln 12.$$

Exercício 64) Mostre que $S = 2 + \dfrac{5}{2!3} + \dfrac{5\cdot 7}{3!3^2} + \dfrac{5\cdot 7\cdot 9}{4!3^3} + \cdots = 3\sqrt{3}$.

Sugestão: $(1 - bx)^r = 1 - r(bx) + \frac{r(r-1)}{2!}(bx)^2 - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(bx)^3 + \cdots$ para $-1 < bx < 1$.

Para resolver os exercícios envolvendo funções trigonométricas, precisamos conhecer as seguintes identidades:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \tag{37}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta; \tag{38}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \tag{39}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta; \tag{40}$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \tag{41}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha; \tag{42}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{43}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}; \tag{44}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{45}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{46}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta); \tag{47}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta); \tag{48}$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta); \tag{49}$$
$$\sin n\alpha = 2\sin(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-2)\alpha; \tag{50}$$
$$\cos n\alpha = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos(n-2)\alpha. \tag{51}$$

Podemos encontrar as provas para as identidades (37) a (42) em qualquer obra que trata de trigonometria; para as demonstrações das identidades (43) a (51), ver [38].

Exercício 65) Mostre que

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin n\alpha = S_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\sin i\alpha = \frac{\sin n\alpha/2}{\sin\alpha/2}\sin(n+1)\alpha/2.$$

Exercício 66) Mostre que

$$\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha = S_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\sin(2i-1)\alpha = \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}.$$

Exercício 67) Mostre que

$$\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha = S_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\cos(2i-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Exercício 68) Mostre que

$$S_n(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n}\sin(\beta+i\alpha) = \frac{\sin n\alpha/2}{\sin\alpha/2}\sin\{\beta+(n+1)\alpha/2\}.$$

Exercício 69) Mostre que

$$S_n(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n}\cos(\beta+i\alpha) = \frac{\sin n\alpha/2}{\sin\alpha/2}\cos\{\beta+(n+1)\alpha/2\}.$$

Exercício 70) Mostre que $S_n(\alpha) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\cos i\alpha = \dfrac{\sin(n+1/2)\alpha}{2\sin\alpha/2}$.

Exercício 71) Mostre que $q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + q^3\sin 3\alpha + \cdots + q^n\sin n\alpha =$
$$S_n(q,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} q^i\sin i\alpha = \frac{q\sin\alpha - q^{n+1}\sin(n+1)\alpha + q^{n+2}\sin n\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$

Exercício 72) Mostre que $1+q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+q^3\cos 3\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha =$
$$S_n(q,\alpha) = \sum_{i=0}^{n} q^i\cos i\alpha = \frac{q^{n+2}\cos n\alpha - q^{n+1}\cos(n+1)\alpha - q\cos\alpha + 1}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$

Exercício 73) Mostre que

$$S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Nota: para resolver este exercício, você deve saber como integrar funções.

Sugestão: $\int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercício 74) Mostre que

$$S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Nota: para resolver este exercício, você deve saber como integrar funções.

Sugestão: $\int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$.

Exercício 75) Mostre que

$$S = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{7\cdot 9\cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(6i-5)(6i-3)(6i-1)} + \cdots = \frac{1}{16}\ln 3.$$

Nota: para resolver este exercício, você deve saber como integrar funções.

Sugestão: $\int_0^x \frac{1-2t^2+t^4}{1-t^6}\,dt = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Exercício 76) Mostre, para $a > 0$, que

$$S = \frac{1}{1\cdot 2(n+1)} + \frac{1}{2\cdot 3(n+1)^2} + \frac{1}{3\cdot 4(n+1)^3} + \cdots = 1 - \ln\Big(1+\frac{1}{a}\Big)^a.$$

Exercício 77) Mostre que

$$\Big(1-\frac{1}{2^2}\Big)\times\Big(1-\frac{1}{3^2}\Big)\times\Big(1-\frac{1}{4^2}\Big)\times\cdots\times\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big) = P_n = \prod_{i=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{i^2}\Big) = \frac{n+1}{2n}.$$

Exercício 78) Mostre que $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\,n!} = \sqrt{e}$.

Nota: para resolver este exercício, você deve saber como efetuar o produto de Cauchy de duas séries.

Sugestões: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$; mostre que $S^2 = e$.

Exercício 79) Calcule o valor da série

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2 n}{3^m(n3^m + m3^n)}.$$

Sugestão: calcule $2S$, onde S é o valor da série.

Observação: este exercício foi reproduzido das Competições Putnam (1999).

Exercício 80) Calcule o valor da série

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-3k-j-(k+j)^2}.$$

Sugestão: faça $n = j+k$ e inverta a ordem da somação.

Observação: este exercício foi reproduzido das Competições Putnam (1960).

Exercício 81) Mostre que $(x^2+x-1)S_n(x) = x^{n+1}F_{n+1} + x^{n+2}F_n - x$,

onde F_i é um termo da seqüência de Fibonacci e $S_n(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^i F_i$.

Exercício 82) Mostre que

$$S = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{10}\Big)^i F_i = \frac{10}{89}.$$

Exercício 83) Mostre, para $n \geq 2$, que
$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{F_{2^i}} = 3 - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}.$$

Conclua que
$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^i}} = 3 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{7-\sqrt{5}}{2}.$$

Exercício 84) Mostre que $\Delta(f_i g_i) = f_{i+1}\Delta g_i + g_i \Delta f_i = g_{i+1}\Delta f_i + f_i \Delta g_i$.

Para os exercícios 85 a 118, calcule os valores de S_n pelo método sugerido pelo teorema 2.1 (página 13).

Exercício 85) Sejam $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ os termos de uma progressão aritmética. Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

Exercício 86) Mostre que
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = S_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercício 87) Mostre que
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = S_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Exercício 88) Mostre que
$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = S_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

Exercício 89) Mostre que
$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = S_n^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Exercício 90) Mostre que
$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercício 91) Mostre que $\dfrac{1}{1\times 2\times 3} + \dfrac{1}{2\times 3\times 4} + \dfrac{1}{3\times 4\times 5} + \cdots +$
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercício 92) Mostre que, para $k \geq 1$,
$$S_n(k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)\cdots(i+k)} = \frac{1}{k}\Big[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\Big].$$

Exercício 93) Mostre que

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}=S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+2)}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercício 94) Mostre que $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(i+1)(i+2)(i+3)}=\frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$.

Exercício 95) Mostre que $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{3i-1}{i(i+1)(i+3)}=\frac{(19n^2+60n+29)n}{18(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Exercício 96) Mostre que $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\dfrac{1}{5\times 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Exercício 97) Mostre que $\dfrac{1}{1\times 4}+\dfrac{1}{4\times 7}+\dfrac{1}{7\times 10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(3i-2)(3i+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

Exercício 98) Mostre que

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(3i-2)(3i+1)(3i+4)}=\frac{n(3n+5)}{8(3n+1)(3n+4)}.$$

Exercício 99) Mostre que $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2-1/4}=2\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)$.

Exercício 100) Mostre que

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}=S_n=\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^2-1}=\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}.$$

Exercício 101) Mostre que

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+1)^2+1}{(i+1)^2-1}=\frac{n(n+3)(2n+3)}{2(n+2)(n+1)}.$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [10].

Exercício 102) Mostre que $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\cdot i!=(n+1)!-1$,

onde $i!=i(i-1)(i-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=i^{(i)}=i^{(i-1)}$.

Exercício 103) Mostre que $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(i+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$.

Exercício 104) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} (i^2+1)i! = n(n+1)!$.

Exercício 105) Mostre que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (i+1)(i+2)(i+3)(i+8) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+10)}{5}.$$

Exercício 106) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(2i+1) = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}$.

Exercício 107) Mostre que $S_n(q) = \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} = \frac{a_1}{1-q}(1-q^n)$,
onde $q \neq 1$.

Exercício 108) Mostre que $S_n(q) = \sum_{i=1}^{n} i q^{i-1} = \frac{(nq-n-1)q^n+1}{(q-1)^2}$,
onde $q \neq 1$.

Exercício 109) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} \log \frac{i+3}{i+1} = \log \frac{(n+3)(n+2)}{2 \cdot 3}$.

Exercício 110) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} i \log \frac{i+1}{i} = \log \frac{(n+1)^n}{n!}$.

Exercício 111) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2 4^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2}{3} + \frac{(n-1)4^{n+1}}{3(n+2)}$.

Exercício 112) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} 3^{i^2} \left(9^i - \frac{1}{3}\right) = 3^{n^2+2n} - 1$.

Exercício 113) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+2)(i+4)} = \frac{7}{24} - \frac{2n+7}{2(n+3)(n+4)}$.

Exercício 114) Mostre que $S_n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\cos i\alpha}{\cos^i \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\sin n\alpha}{\cos^n \alpha}$,
onde $n \geq 1$ e $\alpha \neq k\pi/2$.

Exercício 115) Mostre que $S_n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \cos i\alpha = \frac{\sin(n+1)\alpha/2 \cos n\alpha/2}{\sin \alpha/2}$,
onde $\alpha \neq 2k\pi$.

Exercício 116) Mostre que $S_n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \sin i\alpha = \frac{\sin(n+1)\alpha/2 \sin n\alpha/2}{\sin \alpha/2}$,
onde $\alpha \neq 2k\pi$.

Exercício 117) Mostre que

$$S_n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} i\cos i\alpha = \frac{(n+1)\sin(n+1/2)\alpha}{2\sin\alpha/2} - \frac{1-\cos(n+1)\alpha}{4\sin^2\alpha/2},$$

onde $\alpha \neq 2k\pi$.

Exercício 118) Mostre que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [39].

Exercício 119) Estabeleça uma fórmula para a soma dos n primeiros termos da série

$1+2+4+4+8+8+8+8+16+16+16+16+16+16+16+16+\cdots,$

onde o 1 ocorre uma vez e, para $k \geq 1$, 2^k ocorre 2^{k-1} vezes.

Observação: este exercício e sua solução foram reproduzidos de [12].

Exercício 120) Estabeleça uma fórmula para a soma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n(n-1)} \frac{1}{[\sqrt{i}\,]},$$

onde $[x]$ denota o número inteiro mais próximo do número real x. Mostre, em seguida, que a fórmula é correta.

Observação: este exercício foi reproduzido de [9].

Exercício 121) Estabeleça uma fórmula para a soma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n(n-1)} \frac{2^{[\sqrt{i}\,]} + 2^{-[\sqrt{i}\,]}}{2^i},$$

onde $[x]$ denota o número inteiro mais próximo do número real x.

Observação: este exercício foi reproduzido das Competições Putnam (2001).

Exercício 122) Mostre que $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i^4+i^2+1} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$.

Exercício 123) Mostre que $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

Exercício 124) Mostre que

$$S_n(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{k=0}^{n} t_k = \frac{(n\alpha+\beta)t_n - \gamma t_1 + \alpha + \beta - \gamma}{\alpha+\beta-\gamma},$$

onde $\dfrac{t_{k+1}}{t_k} = \dfrac{\alpha k+\beta}{\alpha k+\gamma}$, $t_0 = 1$, $\alpha, \beta \neq 0$ e $\alpha+\beta \neq \gamma$.

Observação: este exercício e sua solução foram reproduzidos de [40].

Exercício 125) Mostre que $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(r+sk)[r+s(k+1)]} = \frac{1}{rs}$.

Exercício 126) Mostre que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k+2)(3k+5)(3k+8)} = \frac{1}{240} - \frac{1}{6(3n+5)(3n+8)}$.

Exercício 127) Mostre que, para $l \geq 2$,

$$S_n(l) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+l-1)} = \frac{1}{l-1}\left[\frac{1}{(l-1)!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+l-1)}\right].$$

Exercício 128) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{6^i}{(3^{i+1}-2^{i+1})(3^i-2^i)} = 2 - \frac{1}{(3/2)^{n+1}-1}$.

Observação: este exercício foi reproduzido das Competições Putnam (1984).

Exercício 129) Mostre, para $|x| < 1$, que

$$S(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \frac{8x^8}{1+x^8} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2^k}}{1+x^{2^k}} = \frac{x}{1-x}.$$

Observação: mostre que $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k x^{2^k}}{1+x^{2^k}} = \frac{x}{1-x} - \frac{2^{n+1}x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

Exercício 130) Estabeleça uma fórmula para a soma

$$S_n = \frac{2}{1+3^2} + \frac{2^2}{1+3^4} + \frac{2^3}{1+3^8} + \cdots + \frac{2^n}{1+3^{2^n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{1+3^{2^k}}.$$

Sugestão: obtenha uma antidiferença de $f_k = 2^k/(1+3^{2^k})$.

Exercício 131) Mostre, para $n \geq 1$, que

$$S_n = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \cdots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = \sum_{i=1}^{n} \cos\frac{2i\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

Exercício 132) Mostre, para $n \geq 1$, que

$$S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} = \cot\frac{\pi}{2n}.$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [39].

Exercício 133) Mostre, para $n \geq 2$, que

$$P_n = \cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n} = \prod_{k=2}^{n} \cos\frac{\pi}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}\sin(\pi/2^n)}.$$

Exercício 134) Calcule, para $n \geq 1$, a soma da série

$$S_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sin^3 i\alpha.$$

Sugestão: utilize a igualdade $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

Exercício 135) Calcule, para $n \geq 1$, a soma da série

$$S_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \cos^3 i\alpha.$$

Sugestão: utilize a igualdade $\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$.

Exercício 136) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} \sin^3\left(\frac{x}{3^i}\right) = \frac{3^n}{4} \sin\frac{x}{3^n} - \frac{1}{4}\sin x.$$

Exercício 137) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i} \sin^3(3^i x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4 \cdot 3^n} \sin(3^{n+1}x).$$

Exercício 138) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{3^i} \cos^3(3^i x) = \frac{3}{4}\cos x + (-1)^n \frac{1}{4 \cdot 3^n} \cos(3^{n+1}x).$$

Exercício 139) Calcule, para $n \geq 1$, a soma da série

$$S_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} \tan\frac{\alpha}{2^{i-1}},$$

onde $\alpha \neq k\pi/2$.

Exercício 140) Calcule, para $n \geq 1$, a soma da série

$$S_n(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\cos[\alpha + (i-1)\beta]\cos(\alpha + i\beta)}.$$

Sugestão: utilize a igualdade $\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$.

Exercício 141) Calcule, para $n \geq 1$, a soma da série

$$S_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sec i\alpha \sec(i+1)\alpha,$$

onde $\cos i\alpha \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n+1$.

Exercício 142) Mostre, para $n \geq 1$, que

$$S_n(x) = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x,$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $\sin 2^i x \neq 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Sugestão: utilize a igualdade $\frac{1}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$.

Observação: este exercício e sua solução foram reproduzidos de [18].

Exercício 143) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Arctan} \frac{1}{i^2+i+1} = \operatorname{Arctan}(n+1) - \frac{\pi}{4}$.

Sugestão: utilize a igualdade $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

Exercício 144) Mostre que $S_n = \sum_{i=0}^{n} \operatorname{Arccot}(i^2+i+1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccot}(n+1)$.

Conclua que

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Arccot}(i^2+i+1) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercício 145) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Arctan} \frac{2}{i^2} = \frac{3\pi}{4} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n+1}$.

Sugestão: utilize a igualdade $\dfrac{2}{i^2} = \dfrac{\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1}}{1 + \frac{1}{(i-1)(i+1)}}$.

Exercício 146) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Arccos}\Big(1 - \frac{2}{4i^4+1}\Big) = \operatorname{Arctan}\Big(\frac{2n(n+1)}{2n+1}\Big)$.

Conclua que

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Arccos}\Big(\frac{4i^4-1}{4i^4+1}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercício 147) Mostre que $S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\Big(\frac{1}{F_{2k+1}}\Big) = \operatorname{Arctan} F_{2n+2}$, onde F_k é o termo geral da seqüência de Fibonacci.

Exercício 148) Calcule, para $k \geq 1$, a soma da série

$$S_n(k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+k)}.$$

Exercício 149) Mostre, para $n \geq 1$, que

$$S_n = \frac{2}{3} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot (2n+1)} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n+2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot (2n+1)} - 2.$$

Exercício 150) Mostre, para $n \geq 1$, que

$$S_n = \frac{1}{2n}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}\right] = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}.$$

Exercício 151) Mostre, para $x \neq 1$, que

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i!}{(x+i)^{(i)}} = \frac{x}{x-1} - \frac{(n+1)!}{(x-1)(x+n)^{(n)}},$$

onde $(x+i)^{(i)} = (x+1)(x+2)\cdots(x+i)$ e $(x+i)^{(i)} = 1$ para $i = 0$.

Exercício 152) Mostre, para $x \neq -2$, que $S_{n+1}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{i!}{(x+3+i)^{(i+1)}} = \sum\limits_{i=0}^{n} i!(x+2)^{-(i+1)} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{2}{(x+3)(x+4)(x+5)} + \frac{6}{(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)} + \cdots + \frac{n!}{(x+3)(x+4)\cdots(x+3+n)} = \frac{1}{x+2} - \frac{(n+1)!}{(x+2)(x+3)\cdots(x+3+n)}$.

Conclua que $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_{n+1}(x) = 1/(x+2)$ para $x > -2$.

Exercício 153) Se $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ e $H_n^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$, mostre que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{i} = \frac{1}{2}\Big(H_n^2 + H_n^{(2)}\Big).$$

Sugestão: definindo $H_0 = 0$ e utilizando a fórmula de somação por partes, calcule a soma $\mathcal{S}_n = \sum_{i=1}^{n} H_{i-1}/i$.

Exercício 154) Se $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ e $H_n^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$, mostre que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{n+1-i} = H_{n+1}^2 - H_{n+1}^{(2)}.$$

Sugestão: mostre que $S_{n+1} - S_n = 2H_{n+1}/(n+2)$.

Exercício 155) Se $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ e $H_n^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$, mostre que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} H_i H_{n+1-i} = (n+2)\big(H_{n+1}^2 - H_{n+1}^{(2)}\big) - 2(n+1)H_n + 2n.$$

Sugestão: mostre que $S_{n+1} - S_n = H_{n+2}^2 - H_{n+2}^{(2)}$.

Exercício 156) Se $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$, mostre que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} H_i^2 = (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n.$$

Exercício 157) Sabendo que $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ e $\ln \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, mostre que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n-i)} = \frac{2H_{n-1}}{n}.$$

Exercício 158) Sabendo que $H_0 = 0,\ H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j},\ H_n^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$ e $\frac{1}{1-z} \ln \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k z^k$, mostre que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} H_i H_{n-i} = (n+1)\big(H_n^2 - H_n^{(2)}\big) - 2n(H_n - 1).$$

Sugestão: use as igualdades $x = e^{\ln x}$ e $(1-z)^{-(x+1)} = \sum_{k \geq 0} \binom{x+k}{k} z^k$.

Exercício 159) Sabendo que $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$, mostre que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} F_i F_{n-i} = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}.$$

Exercício 160) Considere a expansão em série de potências

$$\frac{1}{1-2x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Prove que, para cada inteiro $n \geq 0$, existe um inteiro m tal que

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_m.$$

Observação: este exercício foi reproduzido das Competições Putnam (1999).

Exercício 161) Mostre que $S = \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.

Sugestão: $\int_0^1 x^p\, dx = \frac{1}{p+1}$.

Exercício 162) Mostre que

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 + \left(1+\frac{2}{n}\right)^5 + \cdots + \left(1+\frac{n}{n}\right)^5\right] = \frac{21}{2}.$$

Sugestão: calcule $\int_1^2 x^5\, dx$.

Exercício 163) Mostre que $S = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) = \ln 2$.

Sugestão: $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = \ln 2$.

Exercício 164) Mostre que $S = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Sugestão: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$.

Exercício 165) Mostre que
$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\sin\frac{t}{n}+\sin\frac{2t}{n}+\cdots+\sin\frac{nt}{n}\Big)=\frac{1-\cos t}{t}.$$

Exercício 166) Mostre que
$$S=\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^3}{4!}+\cdots=5e-1.$$
Sugestão: $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$.

Exercício 167) Mostre que
$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}=15e.$$
Sugestão: $S=S(1)$, onde $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^4\frac{x^n}{n!}$.

Exercício 168) Mostre que
$$S=5+\frac{2\cdot 6}{1!}+\frac{3\cdot 7}{2!}+\frac{4\cdot 8}{3!}+\cdots=13e.$$

Exercício 169) Mostre que
$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n+2)n!}x^n=\frac{1}{2}-\frac{3}{x^2}+\Big(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\Big)e^x.$$

Exercício 170) Mostre que
$$S=1+\frac{1}{4!}+\frac{1}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+3n)!}=\frac{1}{3}\Big[e+\frac{1}{\sqrt{e}}\Big(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big].$$

Exercício 171) Mostre, para $n>2k$, que
$$S_n(k)=\sum_{j=0}^{n-1}\cos^{2k}\frac{2\pi j}{n}=\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}n.$$

Exercício 172) Mostre que
$$S=\sum_{n\geq 0}\Big(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}\Big)=\frac{3\ln 2}{2}.$$

Exercício 173) Mostre que
$$S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\cdots=\frac{3}{2}-\ln 3.$$

Exercício 174) Mostre que
$$S=\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\Big(\gamma-\frac{\ln 2}{2}\Big)\ln 2.$$

Sugestão: use o fato que $\big(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}-\frac{(\ln n)^2}{2}\big)$ é uma seqüência convergente e calcule $S=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}$.

Exercício 175) Seja

$$S = \frac{1}{1} + \frac{2}{2+3} + \frac{3}{4+5+6} + \frac{4}{7+8+9+10} + \frac{5}{11+12+13+14+15} + \cdots.$$

Mostre que

$$S = \pi \coth \pi - 1.$$

CAPÍTULO IV

SOLUÇÕES

Exercício 1)

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + \cdots + [a_1 + (n-2)r] + [a_1 + (n-1)r] \qquad (*)$$

Reescrevendo S_n começando pelo último termo, vem:

$$S_n = [a_1 + (n-1)r] + [a_1 + (n-2)r] + \cdots + (a_1 + r) + a_1 \qquad (**)$$

Adicionando $(*)$ e $(**)$, obtemos:

$$2S_n = [2a_1 + (n-1)r] + [2a_1 + (n-1)r] + \cdots + [2a_1 + (n-1)r]$$

Como há n termos $[2a_1 + (n-1)r]$, resulta:

$$2S_n = n[a_1 + a_1 + (n-1)r].$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}. \quad \blacksquare$$

Exercício 2)

$$S_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} i.$$

$a_1 = 1; \quad a_n = n$

$S_n^{(1)} = \dfrac{n(1+n)}{2}$ (aplicando o resultado do exercício 1.)

$$S_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \blacksquare$$

Exercício 3)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 2i.$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\sum_{i=1}^{n} i = 2S_n^{(1)} = n(n+1) \quad \text{(aplicando o resultado do exercício 2.)}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1). \quad \blacksquare$$

Exercício 4)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1).$$

1ª solução:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = n^2. \quad \blacksquare$$

2ª solução:

$a_1 = 1; \quad a_n = 2n-1$

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2. \quad \blacksquare$$

3ª solução:

Observe que

$1+3+5+\cdots+2n-1 = 1+2+3+\cdots+2n-1+2n-(2+4+6+\cdots+2n)$.

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = \sum_{i=1}^{2n} i - \sum_{i=1}^{n} 2i = \frac{2n(1+2n)}{2} - n(n+1) = n^2.$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2. \quad \blacksquare$$

Exercício 5)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (4i-3).$$

1ª solução:

$a_1 = 1; \quad a_n = 4n-3$

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(1+4n-3)}{2} = n(2n-1). \quad \blacksquare$$

2ª solução:

$$\sum_{i=1}^{n}(4i-3)=\sum_{i=1}^{n}4i-\sum_{i=1}^{n}3=2\sum_{i=1}^{n}2i-3\sum_{i=1}^{n}1=2n(n+1)-3n=n(2n-1).$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(4i-3)=n(2n-1).\quad\blacksquare$$

Exercício 6)

$a_n=a_1q^{n-1}.$

$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}$ $\qquad(*)$

Multiplicando por q os dois membros de $(*)$, vem:

$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^n$ $\qquad(**)$

Subtraindo $(**)$ de $(*)$, obtemos:

$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n.$ $\qquad(***)$

Como $q\neq 1$, podemos dividir os dois membros de $(***)$ por $1-q$. Resulta:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1-qa_n}{1-q}.\quad\blacksquare$$

Exercício 7)

$S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}2^i.$

$a_1=2;\quad q=2$

$S_n=\dfrac{a_1q^n-a_1}{q-1}=\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ (aplicando o resultado do exercício 6.)

$S_n=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}=2(2^n-1).$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}2^i=2(2^n-1).\quad\blacksquare$$

Exercício 8)

$S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}.$

$a_1=1;\quad q=1/2$

$S_n=\dfrac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\dfrac{1-(1/2)^n}{1/2}=2(1-2^{-n})=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}.$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}. \quad \blacksquare$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2.$$

Exercício 9)

$$S_n = a_1 + (a_1 + r)q + (a_1 + 2r)q^2 + \cdots + (a_1 + (n-1)r)q^{n-1}.$$

Observe que podemos escrever S_n como:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}}_{S_0} + rq + rq^2 + rq^2 + rq^3 + rq^3 + rq^3 +$$
$$+ \cdots + \underbrace{rq^{n-1} + rq^{n-1} + \cdots + rq^{n-1}}_{n-1 \text{ termos}}$$

$$S_n = S_0 + r(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1}) + r(q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1}) +$$
$$+ r(q^3 + \cdots + q^{n-1}) + \cdots + r(q^{n-2} + q^{n-1}) + rq^{n-1}$$

$$S_n = S_0 + r\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} q^i}_{S(1)} + r\underbrace{\sum_{i=2}^{n-1} q^i}_{S(2)} + r\underbrace{\sum_{i=3}^{n-1} q^i}_{S(3)} + \cdots + r\underbrace{(q^{n-2} + q^{n-1})}_{S(n-2)} + r\underbrace{(q^{n-1})}_{S(n-1)}$$

$$S_n = S_0 + S(1) + S(2) + S(3) + \cdots + S(n-2) + S(n-1).$$

Utilizaremos a fórmula $\frac{a_1 - q a_n}{1-q}$ para calcular a soma dos termos de uma progressão geométrica porque tal fórmula não depende do número de termos da PG. Temos:

$$S_0 = \frac{a_1 - q a_1 q^{n-1}}{1-q} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S(1) = \frac{rq}{1-q} - \frac{rq^n}{1-q}$$

$$S(2) = \frac{rq^2}{1-q} - \frac{rq^n}{1-q}$$

$$S(3) = \frac{rq^3}{1-q} - \frac{rq^n}{1-q}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$S(n-2) = \frac{rq^{n-2}}{1-q} - \frac{rq^n}{1-q}$$

$$S(n-1) = \frac{rq^{n-1}}{1-q} - \frac{rq^n}{1-q}$$

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n-1} S(i)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} S(i) = \underbrace{\frac{rq}{1-q} + \frac{rq^2}{1-q} + \cdots + \frac{rq^{n-1}}{1-q}}_{S'} - (n-1)\frac{rq^n}{1-q}$$

$$S' = \frac{r}{1-q}\left(\frac{q-q^n}{1-q}\right) = \frac{rq-rq^n}{(1-q)^2}$$

$$S_n = S_0 + S' - (n-1)\frac{rq^n}{1-q}.$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq(1-nq^{n-1}+(n-1)q^n)}{(1-q)^2}. \quad \blacksquare$$

Se $-1 < q < 1$, temos (para a prova, ver [36]):

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \sum_{i=1}^{\infty}(a_1+(i-1)r)q^{i-1} = \frac{a_1}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}, \qquad |q| < 1.$$

Exercício 10)

Observe que $\sum_{i=1}^{n} i3^i = \sum_{i=1}^{n+1} a_i$ se colocamos a_i como:
$a_i = (a_1 + (i-1)r)q^{i-1}$, onde $a_1 = 0$, $r = 1$ e $q = 3$.
Concluímos então que as séries da forma $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} ix^i$ são séries aritmético-geométricas. Utilizando o resultado do exercício 9, temos:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq(1-nq^{n-1}+(n-1)q^n)}{(1-q)^2}.$$

Aplicando aqui esta fórmula, onde $a_1 = 0$, $r = 1$, $q = 3$ e $n = n+1$ (note que a seqüência possui $n+1$ termos), resulta:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i3^i = \frac{3(1-(n+1)3^n+n3^{n+1})}{4}.$$

$$S_n = \frac{3}{4}\big[(2n-1)3^n+1\big]. \quad \blacksquare$$

Exercício 11)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}.$$

Vimos no exercício 10 que séries do tipo $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} ix^i$ são séries aritmético-geométricas com $n+1$ termos e termo geral $a_i = (a_1+(i-1)r)q^{i-1}$, onde $a_1 = 0$, $r = 1$ e $q = x$. Podemos então escrever:

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n} ix^i=\sum_{i=1}^{n+1} a_i=\frac{x(1-(n+1)x^n+nx^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$S_n(1/2)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}=\frac{\frac{1}{2}\Big[1-(n+1)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n+n\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1}\Big]}{\Big(1-\frac{1}{2}\Big)^2}=2\Big[1-\frac{n+2}{2\cdot 2^n}\Big].$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}=2-\frac{n+2}{2^n}. \quad \blacksquare$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(1/2)=S(1/2)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i}=\lim_{n\to\infty}\Big(2-\frac{n+2}{2^n}\Big)=2.$$

Exercício 12)

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^{i-1}=\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Reconhecemos em S_n uma série aritmético-geométrica com n termos e termo geral $a_i=(a_1+(i-1)r)q^{i-1}$, onde $a_1=1$, $r=2$ e $q=\frac{2n+1}{2n-1}$. Podemos então escrever:

$$S_n=\frac{1-\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^n}{1-\frac{2n+1}{2n-1}}+\frac{2\frac{2n+1}{2n-1}\Big[1-n\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^{n-1}+(n-1)\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^n\Big]}{\Big(1-\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^2}$$

$$S_n=\frac{\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^n-1}{\frac{2}{2n-1}}+\frac{2\frac{2n+1}{2n-1}\Big[1-n\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^{n-1}+(n-1)\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^{n-1}\Big]}{\Big(\frac{2}{2n-1}\Big)^2}$$

$$S_n=\frac{\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^n-1}{\frac{2}{2n-1}}+\frac{(2n+1)\Big\{1+\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^{n-1}\Big[n\frac{2n+1}{2n-1}-\frac{2n+1}{2n-1}-n\Big]\Big\}}{\frac{2}{2n-1}}$$

$$S_n=\frac{\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^n-1+(2n+1)\Big\{1-\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^{n-1}\Big[\frac{1}{2n-1}\Big]\Big\}}{\frac{2}{2n-1}}.$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i=\frac{\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^n-1+2n+1-\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big)^n}{\frac{2}{2n-1}}=n(2n-1). \quad \blacksquare$$

Exercício 175)

$$S = \frac{1}{1} + \frac{2}{2+3} + \frac{3}{4+5+6} + \frac{4}{7+8+9+10} + \cdots = \pi \coth \pi - 1.$$

Seja $S = \sum_{k\geq 1} f(k)$, onde $f(k)$ é dada por

$$f(k) = \frac{k}{\sum_{i=k^2/2-k/2+1}^{k^2/2+k/2} i} = \frac{k}{k(k^2+1)/2} = \frac{2}{k^2+1}.$$

Ou seja, $S = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2+1}$. Assim, $S = 2S1$, onde $S1 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$. Sabe-se que (ver fórmula 37.7 de [49])

$$\coth x = \frac{1}{x} + 2x \Big\{ \frac{1}{x^2+\pi^2} + \frac{1}{x^2+4\pi^2} + \frac{1}{x^2+9\pi^2} + \cdots \Big\}. \qquad (*)$$

Colocando $x = \pi$ em $(*)$, resulta:

$$\coth \pi = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \Big\{ \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \cdots \Big\}.$$

Assim, $S1 = (\pi \coth \pi - 1)/2$. Portanto,

$$S = \pi \coth \pi - 1. \quad \blacksquare$$

Observação: o cálculo de $S1$ (ou de $\coth x$) não é elementar. Uma primeira tentativa nesse sentido seria usar a mesma idéia que Euler teve para o cálculo de $\sum_{n\geq 1} 1/n^2 = \pi^2/6$ (ver [15]).

Sejam $P(z)$ e $Q(z)$ dois polinômios, de graus m e n, respectivamente, e $m < n$. Se todas as n raízes—$a_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$—de $Q(z)$ são raízes simples, então a decomposição em frações parciais de $P(z)/Q(z)$ pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} \frac{1}{z - a_k}, \qquad (\dagger)$$

onde $Q'(z) = \frac{d}{dz} Q(z)$.

Demonstração: seja $R(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} \frac{1}{x-a_k}$. $R(x)$ é uma função racional cujo denominador é o produto para k variando entre 1 e n de $(x - a_k)$, ou seja, $Q(x)$. Ao multiplicarmos a soma acima por $Q(x)$, obtemos um polinômio de grau menor que n. Vamos calcular o valor desse polinômio em a_k: como $Q(a_k) = 0$, todos os termos se anulam exceto o termo $\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} \cdot \frac{1}{x-a_k}$. O produto de $Q(x)$ por esse termo é

$$\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} \cdot \frac{Q(x)}{x - a_k}.$$

Como, pela definição de derivada, ($\lim_{x\to a_k}\frac{Q(x)}{x-a_k} = Q'(a_k)$), que não é 0, pois a_k é raiz simples de $Q(x)$, segue que $Q(x)\cdot R(x)$ tende a $P(a_k)$ quando x tende a a_k, para todo k. Isso mostra que $Q(x)\cdot R(x) = P(x)$, pois a diferença entre os dois lados é um polinômio de grau menor que n que se anula nos n pontos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. ■

Observação: esta demonstração nos foi enviada por Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira.

Sabemos que

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$
$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

e que $\sinh z = 0 \iff z = ik\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Colocando

$$P_n(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
$$Q_n(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

temos grau $[P(z)] <$ grau $[Q(z)]$ e $P(z) = Q'(z)$. Como todas as $2n+1$ raízes de $Q_n(z)$ são simples, a igualdade (†) fica

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{z - a_k}.$$

E passando ao limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{z - a_k}$$
$$\coth z = \frac{1}{z} + 2z\Big\{\frac{1}{z^2+\pi^2} + \frac{1}{z^2+4\pi^2} + \frac{1}{z^2+9\pi^2} + \cdots\Big\}. \qquad (‡)$$

A igualdade (‡) representa a expansão de Mittag-Leffler (1846–1927) para $\coth z$. A demontração rigorosa de que a expansão de Mittag-Leffler converge e representa $\coth z$ usa o *teorema do resíduo* e pode ser encontrada em livros de análise complexa como [4]. Em [4] vemos a seguinte generalização, embora somente como exercício:

$$S0(a) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2}\Big(1 + \pi a \coth \pi a\Big), \qquad a \neq 0.$$

CAPÍTULO V

SOMA DA SÉRIE HARMÔNICA

Para concluir este manual, faremos um estudo da série harmônica. As séries harmônicas de ordem p são, por definição, as séries $H_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^p}$, onde $p \in \mathbb{R}$ é uma constante. A série harmônica de ordem 1, ou seja, $H_n^{(1)} = H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ é conhecida como (a) série harmônica simplesmente.

Sabemos que (ver [14], p. 404, por exemplo)

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx < H_n^{(p)} < \int_1^n \frac{1}{x^p} dx + 1. \qquad (*)$$

Deste resultado, deduzimos que:

$\lim_{n\to\infty} H_n^{(p)} = H^{(p)} = +\infty$ se $p \leq 1$ (a série diverge);

$\lim_{n\to\infty} H_n^{(p)} = H^{(p)} < 1 + \frac{1}{p-1}$ se $p > 1$ (a série converge (ver [36]) já que os termos das somas parciais $H_n^{(p)}$ formam uma seqüência monótona crescente limitada).

Escrevamos agora a fórmula de somação de Euler-Maclaurin (ver [17], [25], [29] ou [52], por exemplo):

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx + \frac{1}{2}(f_0 + f_n) + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{2i}}{(2i)!} h^{2i-1} [f_n^{(2i-1)} - f_0^{(2i-1)}], \qquad (**)$$

onde

$f_i = f(x_i)$;
$h = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1, 2 \ldots, n$;

e os B são os números de Bernoulli (ver a solução do exercício 21 para aprender mais sobre estes números—definição e outra aplicação, por exemplo), ou seja,

$$B_0 = 1; \qquad B_1 = -\frac{1}{2}; \qquad B_2 = \frac{1}{6}; \qquad B_4 = -\frac{1}{30}; \qquad B_6 = \frac{1}{42};$$
$$B_8 = -\frac{1}{30}; \qquad B_{10} = \frac{5}{66}; \qquad B_{12} = -\frac{691}{2730}; \qquad B_{14} = \frac{7}{6}; \ \ldots$$
$$B_{2i+1} = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots .$$

Se aplicarmos a equação $(**)$ para o cálculo de $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, teremos:

$$f(x) = \frac{1}{x}; \qquad f'(x) = -x^{-2}; \qquad f'''(x) = -3!x^{-4};$$
$$f^{(5)}(x) = -5!x^{-6}; \qquad f^{(l)}(x) = (-1)^l l! x^{-(l+1)}$$
$$x_0 = 1; \qquad x_n = n; \qquad h = 1.$$

Então,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \int_1^n \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{6}\frac{1}{2}[1 - n^{-2}] - \frac{1}{30}\frac{1}{4}[1 - n^{-4}] + {} + \frac{1}{42}\frac{1}{6}[1 - n^{-6}] - \cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{12}[1 - n^{-2}] - \frac{1}{120}[1 - n^{-4}] + \frac{1}{252}[1 - n^{-6}] - \cdots$$

A série da direita diverge. Com o emprego de testes numéricos, pudemos encontrar uma boa aproximação $\bar{H}_n$ para H_n.
Sejam

$$A = \ln n + \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{12}[1 - n^{-2}] - \frac{1}{120}[1 - n^{-4}]$$

e

$$B = A + \frac{1}{252}[1 - n^{-6}]$$

$$\bar{H}_n = \frac{A + B}{2} = A + \frac{1}{504}[1 - n^{-6}].$$

Se $n = 1000000$, temos $\mathcal{H} = H_{1000000} = \sum_{i=1}^{1000000} \frac{1}{i}$.
Segundo $(*)$, sabemos que

$$\int_1^{1000001} \frac{1}{x}dx < \mathcal{H} < \int_1^{1000000} \frac{1}{x}dx + 1$$

$\ln 1000001 < \mathcal{H} < \ln 1000000 + 1 \implies 13{,}81 < \mathcal{H} < 14{,}82.$

O programa que fizemos para calcular $\mathcal{H}$ nos forneceu o valor 14,392727 e para $\bar{H}_{1000000}$ encontramos 14,392495.

O quadro 1 apresenta os valores de H_n obtidos com o programa e $\bar{H}_n$ para diversos valores de n.

n	H_n	$\bar{H}_n$
5	2,283333	2,283102
10	2,928968	2,928737
50	4,499205	4,498974
100	5,187378	5,187146
500	6,792823	6,792592
1000	7,485471	7,485239
10^4	9,787606	9,787374
10^5	12,090146	12,089915
10^6	14,392727	14,392495
10^9	21,300482	21,300250

Quadro 1: Valores exatos e aproximados para $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Considerações um pouco mais profundas nos permitem escrever (ver [17] ou [29]):

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \epsilon, \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{252n^6}.$$

Nesta fórmula,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \bigl(H_n - \ln n\bigr)$$

é a constante de Euler (ver exercício 174 ou [33] para a demonstração da existência do limite).

Com $\gamma \approx 0{,}57721\,56649$ e para $n \geq 10^6$, podemos usar a seguinte fórmula para o cálculo de H_n:

$$H_n \approx \ln n + 0{,}57721\,56649.$$

Finalmente, podemos utilizar a equação (**) para calcular $S_n^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $k \geq 1$.

Exemplo: calcular $S_n^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} i^4$.

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \int_1^n x^4 dx + \frac{1}{2}(1+n^4) + \frac{1}{6}\frac{1}{2}[4(n^3-1)] - \frac{1}{30}\frac{1}{24}[24(n-1)]$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n^5-1}{5} + \frac{n^4+1}{2} + \frac{n^3-1}{3} - \frac{n-1}{30}$$

$$S_n^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Além das soluções mostradas em [8], [13] e [22] (esta última reproduzida com mais detalhes na observação da solução do exercício 21) o cálculo do caso geral $S_n^{(k)}$ usando $(**)$ pode ser visto em [50] e vale

$$S_n^{(k)} = n^k + \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i n^{k+1-i}.$$

Sugestão para a demonstração: considere a função $f(x) = (x-1)^k$, utilize também os termos associados aos B_i com índices ímpares, ou seja, considere os termos da forma

$$\frac{B_3}{3!}k(k-1)(n-1)^{k-2}; \quad \frac{B_5}{5!}k(k-1)(k-2)(k-3)(n-1)^{k-4}; \ \ldots$$

e proceda como feito no cálculo de H_n.

Valores de $S_n^{(k)}$ para $k=1$ e $k=4$ são dados por

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\ S_n^{(4)} &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}. \end{aligned}$$

Para terminar, damos uma lista da soma de algumas séries infinitas.

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2 \\
&1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} \\
&1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln 2 \\
&1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \\
&1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \\
&\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{24} \\
&1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} \\
&1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12} \\
&1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} \\
&1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}.
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

[1] Adams, R.A., *Single-Variable Calculus*, Addison-Wesley, 1990.

[2] Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R., Special Functions, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, **71**, Cambridge University Press, 1999.

[3] Apostol, T.M., *Calculus*, Volume I, Second Edition, John Wiley & Sons, 1967.

[4] Aramanovich, I.G., Lunts, G.L., and Volkovyskii, L.I., *A Collection of Problems on Complex Analysis*, Dover, 1991.

[5] Ayres Jr., F., *Theory and Problems of First Year College Mathematics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1958.

[6] Bond, R.J. and Keane, W.J., *An Introduction to Abstract Mathematics*, Brooks/Cole, 1999.

[7] Bragg, L., Arctangent Sums, *College Mathematics Journal*, **32**, # 4, 2001, pp. 255–257.

[8] Conway, J.H. e Guy, R.K., *O Livro dos Números*, Gradiva, 1999.

[9] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **20**, # 1, 1994, p. 10.

[10] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **26**, # 3, April 2000, p. 170.

[11] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **26**, # 5, September 2000, p. 300.

[12] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **28**, # 4, May 2002, p. 278.

[13] Dörrie, H., *100 Great Problems of Elementary Mathematics. — Their History and Solutions*, Dover, 1965.

[14] Franklin, P., *Differential and Integral Calculus*, McGraw-Hill, 1953.

[15] Garbi, G.G., *O Romance das Equações Algébricas*, Makron Books, São Paulo, 1997.

[16] Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M., *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 1965.

[17] Graham, R.L., Knuth, D.E. e Patashnik, O., *Matemática Concreta*, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1995.

[18] Greitzer, S.L., *International Mathematical Olympiads 1959–1977*, New Mathematical Library #27, The Mathematical Association of America, 1978.

[19] *Handbook of Mathematical Functions*, Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, Dover Publications, 1970.

[20] Hirschhorn, M., Some binomial coefficient identities, *The Mathematical Gazette*, **87**, # 509, 2003, pp. 288–291.

[21] Honsberger, R., Mathematical Gems III, *Dolciani Mathematical Expositions*, Volume 9, The Mathematical Association of America, 1985.

[22] Ireland, K. and Rosen, M., *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag, 1990.

[23] Kaplan, W., *Cálculo Avançado*, Volume II, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1972.

[24] Kaczor, W.J. and Nowak, M.T., *Problems in Mathematical Analysis I, Real Numbers, Sequences and Series*, Student Mathematical Library (Volume 4), The American Mathematical Society (http://www.ams.org/), 2000.

[25] Kellison, S.G., *Fundamentals of Numerical Analysis*, Richard D. Irwin, Homewood, Illinois, 1975.

[26] Kitchen, J.W., Jr., *Calculus of One Variable*, Addison-Wesley, 1968.

[27] Knopp, K., *Infinite Sequences and Series*, Dover Publications, 1956.

[28] Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series*, Dover Publications, 1990.

[29] Knuth, D.E., *The Art of Computer Programming*, Volume 1, Addison-Wesley, 1973.

[30] Kosmala, W.A.J., *Advanced Calculus: A Friendly Approach*, Prentice Hall, 1998.

[31] Larson, L.C., *Problem Solving Through Problems*, Springer-Verlag, 1983.

[32] Lesko, J., A Series for $\ln k$, *College Mathematics Journal*, **32**, # 2, 2001, pp. 119–122.

[33] Lopes, L., *Manual das Funções Exponenciais e Logarítmicas*, Interciência, 1999.

[34] Lopes, L. e Morais, E., *Manual de Derivadas*, QED Texte, 2004.

[35] Lopes, L., *Manual de Indução Matemática*, Interciência, 1999.

[36] Lopes, L., *Manual de Progressões*, Interciência, 1998.

[37] Lopes, L., *Manual de Seqüências e Séries*, Volume 2, QED Texte, 2005.

[38] Lopes, L., *Manual de Trigonometria*, Editora Didática e Científica, 1992.

[39] Lozansky, E. and Rousseau, C., *Winning Solutions*, Springer-Verlag, 1996.

[40] Menezes, D.L., *Abecedário da Álgebra*, 2º Volume, Sétima Edição, Livraria Nobel, São Paulo, 1970.

[41] Miller, K.S., *An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations*, Henry Holt and Company, New York, 1959.

[42] Morgado, A.C.O., Wagner, E. e Zani, S.C., *Progressões e Matemática Financeira*, IMPA/VITAE, 1993, Sociedade Brasileira de Matemática, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, RJ 22460-320.

[43] Nogueira, R., *Lições de Análise Combinatória*, Editora Fundo de Cultura, Rio de Janeiro, 1972.

[44] Petkovšek, M., Wilf, H.S., and Zeilberger, D., *A=B*, A K Peters, 1996.

[45] Piskounov, N., *Calcul Différentiel et Intégral*, Tome II, Éditions Mir, 1976.

[46] Pólya, G. and Szegő, G., *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer, 1998.

[47] Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A. and Marichev, O.I., *Integrals and Series, Volume 1: Elementary Functions*, Gordon and Breach Science Publishers, 1988.

[48] Spiegel, M.R., *Cálculo Avançado*, Coleção Schaum, McGraw-Hill, Rio de Janeiro, 1971.

[49] Spiegel, M.R., *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1973.

[50] Wilf, H.S., *Mathematics for the Physical Sciences*, John Wiley and Sons, 1962.

[51] Wilf, H.S., *generatingfunctionology*, Academic Press, 1994.
Web site: http://www.cis.upenn.edu/~wilf/index.html

[52] Wylie, Jr., C.R., *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, 1960.

Suas observações e descobertas

Aos nossos leitores

O autor gostaria de conhecer sua opinião sobre a apresentação e o conteúdo deste manual. Escreva para:

Luís Lopes
Praia de Botafogo, 440 Sala 2401
Botafogo Rio de Janeiro RJ
22250–040

Email: qed_texte@hotmail.com

O mesmo endereço pode ser utilizado para a solicitação de outros exemplares e títulos.

Outras obras já publicadas:

1 Manual das Funções Exponenciais e Logarítmicas
2 Manual de Derivadas (com Eduardo Morais)
3 Manual de Indução Matemática
4 Manual de Progressões
5 Manual de Seqüências e Séries (Volume 2)
6 Manual de Trigonometria

E ainda:

É Divertido Resolver Problemas (com Josimar Silva)

Amostras do conteúdo de todos os títulos estão disponíveis para *download* em:

`<www.escolademestres.com/qedtexte>`

MANUAL

DE

SEQÜÊNCIAS E SÉRIES

VOLUME 1

- Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} \sin(\beta + i\alpha) = \frac{\sin n\alpha/2}{\sin \alpha/2} \sin\{\beta + (n+1)\alpha/2\}$$

e que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+2}{i(i+1)2^i} = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}.$$

- Por que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ diverge e $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ converge?

Questões como estas são propostas e resolvidas passo a passo neste manual.

Através de exercícios, o autor apresenta cento e setenta e cinco seqüências e séries interessantes, das quais várias são muito importantes em diferentes aplicações. Uma vez que as soluções apresentadas são completas e detalhadas, o leitor redescobre o prazer de raciocinar e de fazer novas descobertas a partir dos conhecimentos adquiridos já no nível médio ou pré-universitário.

Voltado para os professores e pesquisadores, o livro certamente também será útil aos estudantes de cálculo, probabilidade, análise combinatória e análise de algoritmos.

www.escolademestres.com/qedtexte **ISBN: 85-901503-4-8**