Esta amostra não contém as
soluções dos exercícios propostos.
Para adquirir este livro do Prof. Luís Lopes,
com suas soluções detalhadas, visite o site
http://www.escolademestres.com/qedtexte

MANUAL

DE

SEQÜÊNCIAS E SÉRIES

VOLUME 2

LUÍS LOPES

MANUAL
DE
SEQÜÊNCIAS E SÉRIES
VOLUME 2

Luís Lopes

QED TEXTE

Composição:
Obra inteiramente composta pelo autor com TEX e $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX.
TEX is a trademark of the American Mathematical Society.
$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX is the TEX macrosystem of the American Mathematical Society.

Capa:
Luiz Cavalheiros

CIP-Brasil. Catalogação na fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

L854m
v.2

Lopes, Luís de Barros Rodrigues, 1953–.
Manual de seqüências e séries, v. 2
/ Luís Lopes. – Rio de Janeiro : L. Lopes, 2005.
180p. :

Contém exercícios propostos e resolvidos.

Inclui bibliografia.

ISBN 85-901503-5-6

1. Seqüências (Matemática). 2. Séries (Matemática).
I. Título.

CDD_515.24
CDU_517.52

Nesta obra, o gênero masculino é empregado a título epiceno.

Depósito legal na Biblioteca Nacional - segundo trimestre 2005

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Luís Lopes
Praia de Botafogo, 440 Sala 2401
Botafogo Rio de Janeiro RJ
22250–040
Fax: (0XX21) 2536 6318
Email: `qed_texte@hotmail.com`

A Regina & Walter *(in memoriam)*,
meus primeiros mestres.

PREFÁCIO

Há treze anos publicamos um pequeno manual (Edição Vols. 1–2) contendo partes deste Volume 2 e do Volume 1. Desde então continuamos procurando outros exercícios e estudando e aperfeiçoando as técnicas para resolvê-los. Tendo coletado e resolvido um grande número de exercícios, todos interessantes e muitos pouco conhecidos, achamos que é chegado o momento de apresentá-los ao leitor. O leitor poderá resolver — ou entender a solução — a maioria deles possuindo somente conhecimentos pré-universitários ou universitários elementares. Para os exercícios mais difíceis sugerimos a consulta em paralelo das referências [23], [30] e [54]; e para um estudo realmente profundo, contando inclusive com recursos computacionais, de [45].

A estrutura do primeiro trabalho (Edição Vols. 1–2) foi mantida: capítulos (e não mais seções) 1 e 2 introduzem as definições e resultados teóricos que precisamos conhecer para resolver os exercícios do capítulo 3. Neste capítulo e no seguinte residem as principais mudanças em relação ao primeiro trabalho: a escolha dos exercícios foi profundamente alterada, tanto no tipo quanto na quantidade. Assim, foram retiradas (passaram a fazer parte, juntamente com muitas outras, do Volume 1) todas as séries cujos somandos não contêm os números (coeficientes) binomiais e propostas muitas outras, totalizando 121, envolvendo somente estes números.

Como conseqüência dessas mudanças, o capítulo 4 — soluções — também foi bastante modificado e nele encontramos agora diversas técnicas para calcular o valor de uma série cujo somando é formado por um ou dois números binomiais (as chamadas séries combinatórias). Finalmente, a bibliografia encontra-se muito mais completa e atual.

Não poderíamos deixar de registrar e agradecer a colaboração dos professores Cecil Rousseau, Eduardo Wagner e Nicolau Corção Saldanha. Professor Wagner nos enviou a solução do exercício 40 e professor Saldanha a primeira solução do 44. Acreditamos que o leitor apreciará estas contribuições.

Quanto ao Professor Rousseau (da Universidade de Memphis, Tennessee, Estados Unidos), devemos dizer que ele foi mais do que um colaborador, foi quase um co-autor. Além do envio de referências bibliográficas e de alguns exercícios, como os de números 72 e 97, e suas respectivas soluções, professor Rousseau nos ajudou, direta ou indiretamente, em praticamente todas as soluções dos últimos 35 exercícios. Esta obra beneficiou-se muitíssimo da sua participação, como poderá o leitor facilmente constatar; esclareço ainda que, como não nos conhecemos pessoalmente, tudo isso foi feito via correio eletrônico. A ele a minha mais profunda gratidão.

Gostaríamos de continuar coletando material interessante sobre o assunto mas para isso teremos que contar com a ajuda dos leitores: escreva-nos para o email

`qed_texte@hotmail.com`

com seus problemas e soluções e, quem sabe, não teríamos uma segunda edição deste Volume 2?

Luís Lopes

Rio de Janeiro, RJ
Maio, 2005

APRESENTAÇÃO (Edição Vols. 1–2)

É sempre gratificante poder introduzir um trabalho de um ex-aluno. O autor do "Manual de Seqüências e Séries" foi meu aluno na disciplina de pós-graduação Programação Inteira na Universidade de Montreal há dez anos atrás, salientando-se, pelo seu talento, na turma. Sem nenhuma dúvida, Luís Lopes traz uma nova maneira para o acompanhamento e aperfeiçoamento dos estudos de seqüências e séries para aqueles envolvidos no aprendizado do conteúdo das disciplinas de cálculo, probabilidade, combinatória e computação.

Este manual introduz, através de muitos exercícios com soluções, as seqüências e séries mais utilizadas, dando ênfase às séries finitas tão úteis aos problemas probabilísticos, combinatórios e computacionais. Um vestibulando tendo a matemática como um dos exames principais, não terá dificuldades em acompanhar os resultados expostos neste texto.

Devo salientar aos leitores a maneira muito construtiva utilizada pelo autor ao introduzir as técnicas de diferenças finitas de grande utilidade não só no estudo das séries mas também nos métodos de cálculo numérico e de soluções aproximadas de equações diferenciais.

Nelson Maculan
Professor titular de otimização
Universidade Federal do Rio de Janeiro

PREFÁCIO (Edição Vols. 1–2)

Este manual foi escrito com o objetivo de servir a todo tipo de leitor. O leitor que já estudou os temas aqui tratados utilizará o manual quando precisar se lembrar de uma definição ou de uma fórmula; para tal ele terá somente que consultar as partes teóricas do volume (seções I, II e IV) ou olhar os problemas propostos. O leitor que estuda o assunto pela primeira vez deve ler este manual com o apoio de uma obra didática. *Este manual foi escrito para suportar e aprofundar os temas tratados previamente por uma obra didática.*

Nossa experiência como estudante e professor nos ensinou que a melhor maneira de assimilar um assunto é através da resolução de exercícios — e muitos! Nós constatamos que as obras didáticas não fornecem as *soluções* aos problemas propostos e freqüentemente nem mesmo as respostas. O estudante se vê assim frustrado nos seus esforços de compreensão pois nunca pode estar certo do seu raciocínio se pensa que resolveu um exercício corretamente ou então, após passar um certo tempo tentando resolvê-lo, permanece sem conhecer a solução do "quebra-cabeça". Neste manual, nossa preocupação maior foi de apresentar uma solução completa e detalhada a todos os problemas propostos.

Nós estudaremos aqui somente as seqüências e séries finitas, exceção feita para algumas séries especiais como a geométrica e a binomial. O volume contém, entretanto, material suficiente para servir como um primeiro contato ao estudo das séries infinitas. Outra limitação diz respeito ao domínio das séries estudadas: trataremos somente de séries pertencendo ao domínio dos números reais.

Este manual está organizado em quatro seções:

i) na primeira seção, trataremos das definições e fórmulas relativas às seqüências e séries aritméticas, geométricas, harmônicas e aritmético-geométricas. Terminando esta seção, mostraremos a seqüência de Fibonacci e as séries binomial, de potências (ou inteira) e telescópica.

ii) na segunda seção apresentaremos, de uma maneira bem concisa, a teoria das diferenças finitas. Utilizaremos esta teoria para avaliar as somas de séries tais como $\sum_{i=1}^{n} i^2$ e $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)(i+2)(i+3)}$.

iii) a terceira seção contém noventa e cinco exercícios e suas soluções. Os exercícios foram escolhidos a fim de que o leitor possa aplicar as diversas fórmulas e noções introduzidas nas seções I) e II).

iv) a quarta seção apresenta alguns resultados de caráter geral como a fórmula de somação de Euler-Maclaurin.

Os exercícios seguem uma certa ordem de dificuldade mas nosso objetivo principal foi de grupá-los por assuntos. Em cada grupo eles são colocados de maneira que um resultado obtido num exercício possa vir a ser aplicado, como resultado parcial, num exercício posterior. O símbolo ♠, colocado ao lado do número que identifica o exercício, indicará que a solução encontrada alcança ou ultrapassa o comprimento de uma página.

Nós consultamos diversas obras para redigir as partes teóricas deste manual. A relação completa das referências encontra-se no fim do volume.

Diversas definições da seção I e quase todos os exercícios deste manual provêm dos livros *Algèbre et Trigonométrie* por J. Vincent Robison, McGraw-Hill, 1967 e *Single-Variable Calculus* por R. A. Adams, Addison-Wesley, 1990. Queremos agradecer a estes dois editores por permitirem suas reproduções nesta publicação.

Agradecemos igualmente a Lucie Bibeau por seus comentários e sugestões.

Luís Lopes

Rio de Janeiro, RJ
Abril, 1992

CONTEÚDO

Prefácio vii

Apresentação (Edição Vols. 1–2) ix

Prefácio (Edição Vols. 1–2) xi

Capítulo

I Seqüências e Séries 1

1) Seqüência aritmética 1
2) Série aritmética 1
3) Média aritmética 1
4) Seqüência geométrica 2
5) Série geométrica 2
6) Série geométrica infinita 2
7) Média geométrica 2
8) Seqüência harmônica 3
9) Série harmônica 3
10) Média harmônica 3
11) Seqüência aritmético-geométrica 4
12) Série aritmético-geométrica 4
13) Série aritmético-geométrica infinita 4
14) Série hipergeométrica 4
15) Seqüência de Fibonacci 5
16) Série binomial 6
17) Série de potências 9
18) Série telescópica 11

II Diferenças Finitas **12**

III Exercícios **15**

IV Soluções **30**

Bibliografia e Referências **165**

CAPÍTULO I

SEQÜÊNCIAS E SÉRIES

1) Seqüência aritmética

A seqüência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é uma *seqüência aritmética* se, e somente se, existe uma constante r tal que

$$a_i - a_{i-1} = r, \qquad \forall i > 1. \tag{1}$$

Designamos habitualmente uma seqüência aritmética por *progressão aritmética* (ou PA, para abreviar).

A constante r é a *razão* da PA.

O termo de ordem n da PA é

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \qquad n \geq 1. \tag{2}$$

2) Série aritmética

Designamos por *série aritmética* a soma dos n termos de uma PA e a representamos por S_n.

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}. \tag{3}$$

3) Média aritmética

Designamos por *meios aritméticos* os termos situados entre dois termos não consecutivos de uma progressão aritmética. Calcular a média aritmética b de dois números a e c equivale a inserir um meio aritmético entre a e c.

$$b = \frac{a + c}{2}.$$

A média aritmética A de n números a_i é

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \tag{4}$$

4) Seqüência geométrica

A seqüência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é uma *seqüência geométrica* se, e somente se,

a) $a_i \neq 0 \ \forall i$;
b) existe uma constante $q \neq 0$ tal que

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = q, \qquad \forall i > 1. \tag{5}$$

Designamos habitualmente uma seqüência geométrica por *progressão geométrica* (ou PG, para abreviar).

A constante q é a *razão* da PG.

O termo de ordem n da PG é

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \qquad n \geq 1. \tag{6}$$

5) Série geométrica

Designamos por *série geométrica* a soma dos n termos de uma PG e a representamos por S_n.

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \begin{cases} na_1 & \text{se } q = 1; \\ a_1 & \text{se } q = -1 \text{ e } n \text{ é ímpar;} \\ 0 & \text{se } q = -1 \text{ e } n \text{ é par.} \end{cases}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} = \frac{a_1 - qa_n}{1-q} \qquad \text{se } q \neq 1. \tag{7}$$

6) Série geométrica infinita

Se, em (7), $-1 < q < 1$ (ou seja, $|q| < 1$) e $n \to \infty$, temos:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q}\right) = \frac{a_1}{1-q}.$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \qquad |q| < 1. \tag{8}$$

7) Média geométrica

Designamos por *meios geométricos* os termos situados entre dois termos não consecutivos de uma progressão geométrica. Calcular a média geométrica b de dois números a e c *possuindo o mesmo sinal* equivale a inserir um meio geométrico entre a e c.

$$b = (\pm)\sqrt{ac},$$

onde o sinal a ser usado é o sinal comum a a e c.

A média geométrica G de n números a_i $(a_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n)$ é

$$G = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}. \tag{9}$$

8) Seqüência harmônica

A seqüência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é uma *seqüência harmônica* se, e somente se,

$$\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right\}$$

é uma seqüência aritmética.

Designamos habitualmente uma seqüência harmônica por *progressão harmônica* (ou PH, para abreviar).

A seqüência

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$$

é um exemplo de uma seqüência harmônica.

9) Série harmônica

Designamos por *série harmônica* a soma dos n termos de uma seqüência harmônica e a representamos por S_n. A série

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

é um exemplo de uma série harmônica.

10) Média harmônica

Designamos por *meios harmônicos* os termos situados entre dois termos não consecutivos de uma progressão harmônica. Calcular a média harmônica b de dois números a e c *possuindo o mesmo sinal* equivale a inserir um meio harmônico entre a e c.

$$b = \frac{2ac}{a+c}.$$

A média harmônica H de n números a_i $(a_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n)$ é

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right). \tag{10}$$

Sejam n números a_i $(a_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n)$. Temos a relação

$$H \leq G \leq A \quad \text{e} \quad H = G = A \iff a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

Para duas demonstrações diferentes e aplicações importantes e interessantes deste resultado, ver [33] e [35]. Ver também [36] para uma interpretação geométrica destas e outras médias, tais como as médias contra-harmônica e quadrática, além da definição da média aritmético-geométrica.

11) Seqüência aritmético-geométrica

A seqüência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é uma *seqüência aritmético-geométrica* se, e somente se, podemos escrever seus termos como

$$a_i = \big(a_1 + (i-1)r\big)q^{i-1}, \qquad \forall i \geq 1, \tag{11}$$

onde r $(r \neq 0)$ e q $(q \neq 0$ e $1)$ são constantes.

Designamos habitualmente uma seqüência aritmético-geométrica por *progressão aritmético-geométrica*.

12) Série aritmético-geométrica

Designamos por *série aritmético-geométrica* a soma dos n termos de uma progressão aritmético-geométrica e a representamos por S_n.

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq\big(1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n\big)}{(1-q)^2} \qquad (q \neq 0 \text{ e } 1). \tag{12}$$

13) Série aritmético-geométrica infinita

Se, em (12), $-1 < q < 1$ (ou seja, $|q| < 1$) e $n \to \infty$, temos:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}, \qquad |q| < 1. \tag{13}$$

14) Série hipergeométrica

Sejam $k, n \in \mathbb{Z}^+$, $a, b, c, x \in \mathbb{R}$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ e $(u)_k$ a notação de Pochhammer para o fatorial ascendente, ou seja,

$$(u)_k = u(u+1)\cdots(u+k-1), \qquad (u)_0 = 1.$$

A série hipergeométrica $F(a, b; c; x)$ é dada por

$$F(a, b; c; x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(a)_k (b)_k}{k!(c)_k} x^k = \sum_{k\geq 0} t_k x^k. \tag{14}$$

Observe que $t_0 = 1$ e que

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(k+a)(k+b)}{(k+c)(k+1)}x.$$

Na teoria (ver [2], [3] e [23]) das séries hipergeométricas $F(a,b;c;x)$ é chamada de 2-F-1 com base x e é representada por

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} a\,,b \\ c \end{matrix}\,;\,x\right].$$

Esta série converge em geral para $|x| < 1$, mas converge também se ela é finita, o que acontece se a ou b é um inteiro negativo.

Um teorema de Chu-Vandermonde ([3], [25]) diz que uma série 2-F-1 com base 1 finita é somável, ou seja, possui uma forma fechada. Assim,

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} a\,,-n \\ c \end{matrix}\,;\,1\right] = \frac{(c-a)_n}{(c)_n}, \qquad n \geq 0;\ c \neq 0,-1,-2,\ldots .$$

A demonstração deste resultado encontra-se no exercício 107; aplicações ou casos particulares dele formam os exercícios 108–111.

Considere agora a série hipergeométrica $F(a,1;c;1)$. Sabe-se que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k}{(c)_k} = \sum_{k=0}^{n} t_k$$

possui uma forma fechada, dada por

$$S_n(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{(n\alpha+\beta)t_n - \gamma t_1 + \alpha + \beta - \gamma}{\alpha+\beta-\gamma},$$

onde

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{\alpha k+\beta}{\alpha k+\gamma},$$

$t_0 = 1$, $\alpha,\beta \neq 0$ e $\alpha+\beta \neq \gamma$.

A demonstração e aplicações deste resultado encontram-se nos exercícios 124–127 de [37].

15) Seqüência de Fibonacci

Os termos da seqüência de Fibonacci satisfazem a seguinte equação de recorrência:

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, \qquad \text{para } \ i \geq 2 \ \text{ e com } F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

Obtemos então

$$\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots\}.$$

Resolvendo-se a equação de recorrência (ver [35], por exemplo) e pondo $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ e $\hat{\phi} = (1-\sqrt{5})/2$, obtemos a fórmula, somente em função de i, para o termo geral F_i:

$$F_i = \frac{\sqrt{5}}{5}(\phi^i - \hat{\phi}^i).$$

16) Série binomial

Se $r = n$ é um inteiro positivo, o desenvolvimento de $(a+b)^r$ terá $n+1$ termos e é válido para todo a, b.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \\ + \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}a^{n-i}b^i + \cdots + \frac{n}{1!}ab^{n-1} + b^n, \qquad \forall a, b. \qquad (15)$$

A fórmula (15) é chamada de *fórmula do binômio*. Uma outra maneira de escrever a fórmula do binômio é

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \\ + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n, \qquad \forall a, b. \qquad (16)$$

Os coeficientes $\binom{n}{i}$, chamados de *coeficientes do binômio*, são dados por

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n^{(i)}}{i!},$$

onde, por definição, $0! = 1$, $i! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot i$, $n^{(i)} = n(n-1)\cdots(n-i+1)$ e $n^{(0)} = 1$.

Observações:

i) Define-se $\binom{n}{i} = 0$ para i inteiro < 0.

ii) Observe que $\binom{n}{i} = 0$ para $i > n$, i e n inteiros ≥ 0. Isto porque o fator 0 aparecerá sempre no numerador de $\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$.

iii) Observe que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ para i e n inteiros ≥ 0.

iv) Valores particulares para $\binom{n}{i}$, n inteiro ≥ 0: $\binom{0}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

Propriedades dos coeficientes do binômio

Os coeficientes do binômio possuem muitas propriedades interessantes. Entre elas, destacamos (para as demonstrações, ver as soluções dos exercícios correspondentes):†

a) $\displaystyle \binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$;

Nota: esta propriedade conduz ao triângulo de Pascal.

† Estas são apenas algumas das propriedades que os coeficientes do binômio possuem. Para uma relação mais completa ver [22] e [47], por exemplo, e para um estudo mais profundo e teórico das propriedades, [23], [30], [45] e [54].

b) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n;$

c) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0;$

d) $\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\binom{m+2}{m}+\cdots+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1};$

e) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=2^{n-1};$

f) $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1};$

g) $1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1};$

h) $1\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}n\binom{n}{n}=0;$

i) $\binom{m}{0}\binom{n}{p}+\binom{m}{1}\binom{n}{p-1}+\cdots+\binom{m}{p}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{p};$

j) $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n},$

onde i, m, n e p representam números inteiros positivos.

Se colocamos $a = 1$ e $b = x$ em (15) ou (16), obtemos:

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+nx^{n-1}+x^n$$

$$(1+x)^n = 1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^i, \qquad \forall x.$$

Se r é um número real, o desenvolvimento de $(1+x)^r$ terá um número infinito de termos, além de precisarmos limitar os valores de x a um intervalo de convergência. O desenvolvimento toma a forma

$$(1+x)^r = 1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$(1+x)^r = 1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-i+1)}{i!}x^i \qquad (-1<x<1). \tag{17}$$

Esta última série é chamada de *série binomial*.

Se $r=-1$, resulta:

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1);$$

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1).$$

Se $r=-1$ e x é substituído por $x/2$ na igualdade (17), temos:

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{1+\dfrac{x}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots \qquad (-2 < x < 2).$$

Se substituímos 1 por 2 e $x/2$ por $-x$ na igualdade anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}(2-x)^{-1} = \frac{1}{2-x} = \left[2\left(1-\frac{x}{2}\right)\right]^{-1} &= \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots\right) \qquad (-2 < x < 2).\end{aligned}$$

Se substituímos x por $x/2$ na igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned}\left(2-\frac{x}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2-\dfrac{x}{2}} = \left[2\left(1-\frac{x}{4}\right)\right]^{-1} &= \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{x}{4}\right)^3+\cdots\right) \qquad (-4 < x < 4).\end{aligned}$$

Estes três últimos desenvolvimentos nos levam a escrever

$$(a-bx)^{-1} = \frac{1}{a-bx} = \left[a\left(1-\frac{bx}{a}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{a}\left(1-\frac{bx}{a}\right)^{-1}$$

$$(a-bx)^{-1} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{bx}{a}+\left(\frac{bx}{a}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^3+\cdots\right) \qquad (b^2x^2 < a^2);$$

$$(a+bx)^{-1} = \frac{1}{a+bx} = \left[a\left(1+\frac{bx}{a}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{bx}{a}\right)^{-1}$$

$$(a+bx)^{-1} = \frac{1}{a}\left(1-\frac{bx}{a}+\left(\frac{bx}{a}\right)^2-\left(\frac{bx}{a}\right)^3+\cdots\right) \qquad (b^2x^2 < a^2).$$

E generalizando,

$$(a-bx)^r = \left[a\left(1-\frac{bx}{a}\right)\right]^r = a^r\left(1-\frac{bx}{a}\right)^r =$$
$$= a^r\left(1 - r\left(\frac{bx}{a}\right) + \frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{bx}{a}\right)^2 - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\left(\frac{bx}{a}\right)^3 + \cdots\right)$$
$$(b^2x^2 < a^2); \qquad (18)$$

$$(a+bx)^r = \left[a\left(1+\frac{bx}{a}\right)\right]^r = a^r\left(1+\frac{bx}{a}\right)^r =$$
$$= a^r\left(1 + r\left(\frac{bx}{a}\right) + \frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\left(\frac{bx}{a}\right)^3 + \cdots\right)$$
$$(b^2x^2 < a^2). \qquad (19)$$

Para $a = 1$, $b = 1$, $r = 1/2$ e $x^2 < 1$, temos:

$$(1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots$$
$$= 1 - \sum_{k\geq 0}\frac{2}{k+1}\binom{2k}{k}\left(\frac{-x}{4}\right)^{k+1} = 1 - \sum_{k\geq 0} 2C_k\left(\frac{-x}{4}\right)^{k+1};$$

$$(1-x)^{1/2} = \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots$$
$$= 1 - \sum_{k\geq 0}\frac{2}{k+1}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^{k+1} = 1 - \sum_{k\geq 0} 2C_k\left(\frac{x}{4}\right)^{k+1},$$

onde C_k é o k-ésimo número de Catalan.
Para $a = 1$, $b = 1$, $r = -1/2$ e $x^2 < 1$, temos:

$$(1+x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{-x}{4}\right)^k;$$

$$(1-x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Podemos escrever as séries binomiais na forma equivalente

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots, \qquad (20)$$

onde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ são constantes conhecidas chamadas de *coeficientes da série.*

17) Série de potências

Por uma série de potências (ou série inteira) de x entende-se uma série da forma mostrada na igualdade (20).

Teorema 1.1: (ver [27] ou [46], por exemplo) *Toda série de potências tem um intervalo de convergência* $(-\mathcal{R}, \mathcal{R})$ *tal que a série converge absolutamente*† *quando* $|x| < \mathcal{R}$ *e diverge quando* $|x| > \mathcal{R}$.

O número $\mathcal{R}$ pode ser 0, um número positivo finito, ou ∞ (situação em que a série converge para todo x). O número $\mathcal{R}$ é chamado de *raio de convergência* da série de potências.

Nota: quando $\mathcal{R}$ é um número positivo finito, a série pode convergir ou divergir em cada um dos valores extremos $x = \mathcal{R}$, $x = -\mathcal{R}$. Esses valores devem ser estudados separadamente, para cada série.

Para o caso da série binomial $(1 + x)^r$, em $x = 1$ a série converge se $r > -1$ e diverge se $r \leq -1$. Ainda para $x = 1$, a série converge absolutamente se $r > 0$. Em $x = -1$, a série converge absolutamente se $r > 0$ e diverge se $r < 0$.

Teorema 1.2: (ver [27] ou [46], por exemplo) *Pode-se derivar uma série de potências termo a termo dentro do intervalo de convergência; ou seja, se*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \qquad (-\mathcal{R} < x < \mathcal{R}),$$

então f *é derivável no intervalo* $(-\mathcal{R}, \mathcal{R})$ *e*

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \qquad (-\mathcal{R} < x < \mathcal{R}).$$

Teorema 1.3: (ver [27] ou [46], por exemplo) *Pode-se integrar uma série de potências termo a termo dentro do intervalo de convergência; ou seja, se*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \qquad (-\mathcal{R} < x < \mathcal{R}),$$

então f *é integrável em qualquer subintervalo fechado de* $(-\mathcal{R}, \mathcal{R})$. *Se* $|x| < \mathcal{R}$, *então*

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots .$$

† Dizemos que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \qquad (*)$$

converge absolutamente se a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots, \qquad (**)$$

formada com os valores absolutos dos seus termos, converge. Se a série $(*)$ converge e a série $(**)$ diverge, dizemos que a série $(*)$ *converge condicionalmente*. Qualquer série absolutamente convergente, converge.

18) Série telescópica

Seja a série $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$.

Já que $f(i) = \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$, podemos escrever S_n como

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Se $n \to \infty$, $\quad S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ é um exemplo de uma série telescópica. Elas são chamadas assim porque as somas S_n se reduzem a uma expressão simples quando decompomos seu termo geral $f(i)$ numa soma de duas ou mais frações (ou termos).

Finalmente, lembramos algumas operações elementares com séries:

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{m\le i\le n} x_i = 0 \quad \text{se } n < m; \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{onde } c \text{ é uma constante;} \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \quad \text{onde } c \text{ é uma constante;} \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i; \tag{24}$$

$$x\sum_{i=0}^{n} x^i = \sum_{i=1}^{n+1} x^i = \sum_{i=0}^{n} x^{i+1}; \tag{25}$$

$$\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n} x^i = \sum_{i=1}^{n} x^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i; \tag{26}$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n} x^i = \sum_{i=1}^{n} ix^{i-1}. \tag{27}$$

CAPÍTULO II

DIFERENÇAS FINITAS

Neste capítulo, apresentaremos somente as definições e fórmulas que serão necessárias para calcular algumas séries no próximo capítulo. Para um tratamento mais completo do assunto, ver [28], [41] e [55].

Vamos usar a seguinte notação:

$$f(x_i) = f_i \quad \text{e} \quad x_i = x_0 + i, \qquad i = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \qquad \text{(primeira diferença);}$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \qquad \text{(segunda diferença);}$$

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i \qquad (n \text{ inteiro positivo});$$

$$\Delta^n f_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f_{i+n-j}.$$

O símbolo Δ representa o operador diferença.

O operador Δ possui as seguintes propriedades, duas das quais (igualdades (28) e (29)) são características dos operadores lineares:

i) $\Delta(f_i \pm g_i) = (f_{i+1} \pm g_{i+1}) - (f_i \pm g_i) = \Delta f_i \pm \Delta g_i;$ (28)

ii) $\Delta(cf_i) = c\Delta f_i$ (c é uma constante); (29)

iii) $\Delta^m(\Delta^n f_i) = \Delta^{m+n} f_i$ (m, n são inteiros positivos); (30)

iv) $\Delta(f_i g_i) = f_{i+1}\Delta g_i + g_i \Delta f_i = g_{i+1}\Delta f_i + f_i \Delta g_i.$ (31)

Definimos agora os polinômios fatoriais

$$(x)^{(n)} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

e

$$(x)^{-(n)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{1}{(x+n)^{(n)}}.$$

Seguem duas fórmulas muito importantes:

$$\Delta(x)^{(n)} = (x+1)^{(n)} - (x)^{(n)} = n(x)^{(n-1)} \tag{32}$$

e

$$\Delta(x)^{-(n)} = (x+1)^{-(n)} - (x)^{-(n)} = -n(x)^{-(n+1)}. \tag{33}$$

Seja $p_n(x)$ o polinômio

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Podemos exprimir $p_n(x)$ em função dos polinômios fatoriais.

$$p_n(x) = r_0 + r_1(x)^{(1)} + r_2(x)^{(2)} + \cdots + r_n(x)^{(n)},$$

onde os r_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ são os restos das seguintes divisões:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= r_0 + xq_0(x) \\ q_0(x) &= r_1 + (x-1)q_1(x) \\ q_1(x) &= r_2 + (x-2)q_2(x) \\ \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ q_{n-1}(x) &= r_n. \end{aligned}$$

Evidentemente, $r_0 = a_0$ e $r_n = a_n$. E temos também (para a demonstração, ver exercício 56)

$$\Delta^j p_n(0) = j!\, r_j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Definição: $\Delta^{-1}p(x)$ é uma (um polinômio) *antidiferença* do polinômio $p(x)$ se

$$\Delta\big(\Delta^{-1}p(x)\big) = p(x). \tag{34}$$

Exemplo: calcular uma antidiferença de $p(i) = i^3$.
Exprimamos $p(i)$ em função dos polinômios fatoriais. Efetuando as divisões mencionadas, obtemos os restos r_0 ($r_0 = 0$), r_1 ($r_1 = 1$), r_2 ($r_2 = 3$) e r_3 ($r_3 = 1$). Escrevemos $p(i)$ como

$$p(i) = 1(i)^{(1)} + 3(i)^{(2)} + 1(i)^{(3)}.$$

Utilizando as fórmulas (28), (29), (32) e (34), encontramos $\Delta^{-1}p(i)$.

$$\Delta^{-1}p(i) = \frac{1}{2}(i)^{(2)} + (i)^{(3)} + \frac{1}{4}(i)^{(4)} + c,$$

onde c é uma constante arbitrária pois $\Delta c = c - c = 0$.

Teorema 2.1: *Se $F(i)$ é uma antidiferença de $f(i)$, então*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(i) = F(n+1) - F(1). \tag{35}$$

Demonstração:

Da definição de $F(i)$, vem:

$$\begin{array}{rcl}
f(1) = & \Delta F(1) & = F(2) - F(1)\\
f(2) = & \Delta F(2) & = F(3) - F(2)\\
f(3) = & \Delta F(3) & = F(4) - F(3)\\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\
f(n-1) = & \Delta F(n-1) & = F(n) - F(n-1)\\
f(n) = & \Delta F(n) & = F(n+1) - F(n)\\
\hline
\end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta F(i) = F(n+1) - F(1). \qquad \blacksquare$$

É claro que todas as séries para as quais poderemos empregar este teorema serão séries telescópicas.

Exemplo: calcular o valor de $S_n^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} i^3$.

$$S_n^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} \left[(i)^{(1)} + 3(i)^{(2)} + (i)^{(3)}\right] = \left[\frac{1}{2}(i)^{(2)} + (i)^{(3)} + \frac{1}{4}(i)^{(4)}\right]_{i=1}^{i=n+1}$$

$$S_n^{(3)} = \frac{1}{2}(n+1)^{(2)} + (n+1)^{(3)} + \frac{1}{4}(n+1)^{(4)} - \frac{1}{2}(1)^{(2)} - (1)^{(3)} - \frac{1}{4}(1)^{(4)}$$

$$S_n^{(3)} = \frac{(n+1)n}{2} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} - 0 - 0 - 0$$

$$S_n^{(3)} = n(n+1)\frac{2 + 4n - 4 + n^2 - 3n + 2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \tag{36}$$

Observações:

i) a igualdade (36) nos permite concluir que

$$S_n^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2 = \left[S_n^{(1)}\right]^2.$$

ii) como $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(i) = F(n+1) - F(1)$, a igualdade (36) nos permite conjecturar que se $f(i) = i^3$, então $F(i) = [(i-1)i/2]^2$. Verificando nossa conjectura, vem:

$$\Delta F(i) = F(i+1) - F(i) = \frac{i^2(i+1)^2}{4} - \frac{(i-1)^2 i^2}{4} = i^3 = f(i).$$

Assim, nossa conjectura revelou-se verdadeira.

CAPÍTULO III

EXERCÍCIOS

Em todos os exercícios, i, j, k, l, m, n e p denotam números inteiros.

Exercício 1) Mostre que $\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$.

Exercício 2) Mostre que

a) $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ para $n \geq 0$;

b) $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$ para $n \geq 1$.

Sugestão: utilize a igualdade (15).

Exercício 3) Mostre que

a) $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$ para $n \geq 0$;

b) $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} i\binom{n}{i} = 0$ para $n \geq 2$.

Sugestões: utilize os resultados do exercício anterior; $i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$.

Exercício 4) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (-4)^i \binom{n+i}{2i} = (-1)^n(2n+1).$$

Sugestão: mostre que $S_{n+1} + 2S_n + S_{n-1} = 0$.

Exercício 5) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} 2^i \binom{n}{i} = 1.$$

Sugestão: mostre que $S_{n+1} - S_n = 0$.

Exercício 6) Mostre que $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^{i-1} \binom{n-i}{i-1} 2^{n-2i+1} = n$,

onde $\lfloor u \rfloor$ ($u \in \mathbb{R}$) denota a parte inteira de u (para mais detalhes sobre esta definição—função piso—, ver [33]).

Sugestão: mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n-i}{i-1} 2^{n-2i+1}$, ou seja, S_n não se altera se substituímos $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ por n. Utilize depois indução (ver [35] para muitos exemplos) ou mostre que $S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1} = 0$.

Exercício 7) Mostre, para $n \geq 0$ e $x \neq -1/4$, que

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} x^i = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2} \right)^{n+1} \right],$$

onde $\lfloor u \rfloor$ ($u \in \mathbb{R}$) denota a parte inteira de u.

Sugestão: utilize as idéias do exercício anterior.

Exercício 8) Mostre, para $n > 0$, que

$$S_n(x) = \sum_{i<n} \binom{n-i}{i} \frac{n}{n-i} x^i = \left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2} \right)^n.$$

Sugestão: utilize o resultado do exercício anterior.

Exercício 9) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_i = F_{2n},$$

onde F_i é o i-ésimo termo da seqüência de Fibonacci.

Sugestão: observe os valores de $1+\phi$, ϕ^2, $1+\hat{\phi}$ e $\hat{\phi}^2$, onde ϕ e $\hat{\phi}$ são dados no capítulo 1, item 15.

Exercício 10) Mostre que

a) $S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$ para $n \geq 1$;

b) $S_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$ para $n \geq 1$.

Exercício 11) Mostre, para $n \geq 0$, que $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{n}{2i}}{2i+1} = \frac{2^n}{n+1}$.

Exercício 12) Mostre, para $m \geq 0$, que $S_n(m) = \displaystyle\sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

Exercício 13) Mostre, para $n \geq 2$, que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i}\binom{n}{i+2} = \frac{(2n)!}{(n-2)!(n+2)!}.$$

Exercício 14) Mostre que

a) $S_p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \binom{m}{i}\binom{n}{p-i} = \binom{m+n}{p}$;

b) $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Sugestão: $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$.

Exercício 15) Mostre, para $m \geq 0$, que

$$S_n(m) = \sum_{i \geq 0} i\binom{m}{i}\binom{n}{i} = n\binom{m+n-1}{m-1}.$$

Exercício 16) Mostre que $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}^2 = n\binom{2n-1}{n}$.

Exercício 17) Mostre que $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i}\binom{n}{i} = \binom{m+n}{m}$.

Exercício 18) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n(l,m) = \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{l+i}\binom{n}{i} = \binom{m+n}{l+n}.$$

Exercício 19) Mostre, para $n \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, que

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} i\binom{n+1}{i}\binom{x}{i} = (n+1)\binom{n+x}{n+1}.$$

Exercício 20) Mostre, para $n \geq 1$, que $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left[\frac{n-2i}{n}\binom{n}{i}\right]^2 = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

Exercício 21) Mostre que $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i}\binom{m-i}{n-i} = \binom{m}{n}2^n$.

Exercício 22) Mostre que $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{i+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Exercício 23) Mostre que $S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{i+1}\binom{n}{i}}{i+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

Exercício 24) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i\binom{n}{i}}{\binom{n}{i-1}} = \binom{n+1}{2}$.

Exercício 25) Mostre que $P_n = \frac{\binom{n+1}{0}\binom{n+1}{1}\binom{n+1}{2}\cdots\binom{n+1}{n}\binom{n+1}{n+1}}{\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}} = \frac{(n+1)^n}{n!}$.

Exercício 26) Mostre que

$$P_n = \left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]\cdots\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right] = \frac{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}(n+1)^n}{n!}.$$

Exercício 27) Mostre que $S_n = \sum_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i} = (n+1)n2^{n-2}$.

Exercício 28) Mostre que $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}x^i = nx(1+x)^{n-1}$.

Exercício 29) Mostre que $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}x^i = n(n-1)x^2(1+x)^{n-2}$.

Exercício 30) Mostre que $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i}x^i = nx(1+nx)(1+x)^{n-2}$.

Exercício 31) Mostre que, para $n \geq 2$,

a) $S_n = \binom{n}{1} + 3\binom{n}{3} + 5\binom{n}{5} + \cdots = n2^{n-2}$;

b) $S_n = 2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{4} + 6\binom{n}{6} + \cdots = n2^{n-2}$.

Exercício 32) Mostre que, para $n \geq 2$,

$$S_n = \binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n} = 0.$$

Exercício 33) Mostre que, para $n \geq 3$,

$$S_n = \binom{n}{1} - 2^2\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}n^2\binom{n}{n} = 0.$$

Exercício 34) Mostre que, para $n \geq 0$,

$$S_n = \frac{1}{2}\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \frac{1}{4}\binom{n}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercício 35) Mostre que, para $n \geq 2$, $S_n = \binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} - \cdots = 0$.

Exercício 36) Mostre que, para $n \geq 0$, $S_n = \sum_{i\geq 1} \frac{(-1)^i \binom{n}{i-1}}{\sum_{1\leq j\leq i} j} = -\frac{2}{n+2}$.

Exercício 37) Mostre que $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\binom{a}{n-i}\binom{b}{i} = \frac{an}{a+b}\binom{a+b}{n}$.

Exercício 38) Mostre que, para $n \geq 0$, $S_n = \sum_{i=0}^{n} [i^3 - (n-i)^3]\binom{n}{i}^3 = 0$.

Exercício 39) Mostre que, para $n \geq 1$, $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{1+ix}{(1+nx)^i} = 0$.

Exercício 40) Mostre que $S = \sum_{i=0}^{8} (-1)^i \binom{10}{i}\binom{10}{8-i} = \binom{10}{4}$.

Sugestão: $(x-1)^{10}(x+1)^{10} = (x^2-1)^{10}$.

Exercício 41) Mostre que, para $n \geq 0$, $S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n-i}{n-i} 2^i = 2^{2n}$.

Exercício 42) Mostre que, para $n \geq p \geq 1$, $x \neq 0$ e $x \neq 1$,

$$S_{n,p}(x) = \sum_{i=0}^{n-p} \binom{n}{i}(x-1)^{n-p-i} = \sum_{i=0}^{n-p} \binom{p+i-1}{i} x^{n-p-i}.$$

Sugestão: mostre que os dois somatórios representam o mesmo polinômio—quociente de x^n por $(x-1)^p$.

Exercício 43) Mostre que, para $n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=n}^{2n-1} \binom{i-1}{n-1} 2^{1-i} = 1$.

Sugestão: utilize a igualdade $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ $(n, i \geq 0)$.

Exercício 44) Mostre que, para $n \geq 1$, $S_n = 1 - \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{5}\binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{2i+1}\binom{n}{i} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$.

Sugestão: utilize o método de indução e mostre que $S_{k+1} = \frac{2(k+1)}{2(k+1)+1} S_k$. Lembre-se que $\binom{k}{0} - \binom{k}{1}x^2 + \binom{k}{2}x^4 - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} x^{2k} = (1-x^2)^k$ e que $\int_0^1 (-1)^i \binom{k}{i} x^{2i}\, dx = (-1)^i \frac{1}{2i+1}\binom{k}{i}$.

Exercício 45) Mostre, para $m \geq 0$, que $S_n(m) = \sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}$.

Exercício 46) Mostre, para $m \geq 0$, que $S_n(m) = \sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{i} = \binom{m+n+1}{m+1}$.

Exercício 47) Mostre, para $k \geq 0$, que $S_n(k) = \sum_{i=0}^{n} i \binom{k+i-1}{i} = k \binom{k+n}{k+1}$.

Exercício 48) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n(m,x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{x-j}{m} = \binom{x-n}{m-n},$$

onde $m \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{C}$.

Exercício 49) Mostre que $S_n(k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{k}{i} = (-1)^n \binom{k-1}{n}$,

onde $k \geq 1$ e $n \geq 0$.

Exercício 50) Mostre que $S_n(a) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{a}{n-i} = \binom{a-1}{n}$,

onde $a \in \mathbb{R}$ e $n \geq 0$.

Exercício 51) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n(k,l,m) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{m}{i-k} \binom{n-i}{l} = (-1)^k \binom{n-k-m}{n-k-l},$$

onde $k \geq 0$ e $l \geq 0$.

Sugestão: utilize a igualdade $\binom{n}{m} = (-1)^{n-m} \binom{-(m+1)}{n-m}$ para $m \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$.

Exercício 52) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n(k,l,m) = \sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{k} \binom{n-i}{l} = \binom{m+n+1}{k+l+1},$$

onde $k \geq m \geq 0$ e $l \geq 0$.

Sugestão: utilize a igualdade $\binom{n}{m} = (-1)^{n-m} \binom{-(m+1)}{n-m}$ para $m \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$.

Exercício 53) Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{23i^2+21i+4}{2i^2+3i+1} \binom{3i}{i} = 2\left[\binom{3(n+1)}{n+1} - 3\right]$.

Exercício 54) Mostre, para $n \geq 0$, que $S_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{j} = 3^n$.

Exercício 55) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n+1} \binom{n+1}{j} \binom{n}{i} = 2^{2n} - 1.$$

Sugestão: utilize a igualdade $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_i a_j = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)^2 + \sum_{i=0}^{n} a_i^2\right]$.

Exercício 56) Sejam $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ os termos de uma progressão aritmética de ordem k (ver [36] para mais detalhes sobre este conceito). Mostre que

$$S_n^{[k]} = \sum_{i=1}^{n} a_i = \Delta^k a_1 \binom{n}{k+1} + \Delta^{k-1} a_1 \binom{n}{k} + \cdots + \Delta^2 a_1 \binom{n}{3} + \Delta a_1 \binom{n}{2} + a_1 \binom{n}{1}.$$

Sugestão: seja $p(x)$ um polinômio de grau m em x. Mostre que podemos escrever $p(x)$ como:

$$p(x) = \Delta^m p(0) \frac{(x)^{(m)}}{m!} + \Delta^{m-1} p(0) \frac{(x)^{(m-1)}}{(m-1)!} + \cdots + \Delta^2 p(0) \frac{(x)^{(2)}}{2!} + \Delta p(0)(x)^{(1)} + p(0).$$

Exercício 57) Mostre que

$$S = 12^7 - \binom{6}{1} 13^7 + \binom{6}{2} 14^7 - \binom{6}{3} 15^7 + \cdots + \binom{6}{6} 18^7 = 15 \cdot 7!\,.$$

Sugestão: defina o operador E tal que $Ef(i) = f(i+1)$; então, $E^2 f(i) = E[Ef(i)] = Ef(i+1) = f(i+2)$ e $E^n f(i) = f(i+n)$. Lembre-se também que $\Delta^n f(i) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(i+n-j)$ (para a prova, ver [23] ou [35]) e conclua que $\Delta^n = (E-1)^n$.

Exercício 58) Mostre que $S_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(-1)^i}{x+i} = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Exercício 59) Mostre que $S_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(-1)^i}{\binom{x+i}{i}} = \frac{x}{x+n}$.

Exercício 60) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(-4)^i}{\binom{2i}{i}} = \frac{1}{1-2n}.$$

Exercício 61) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (a_0 + a_1 i + \cdots + a_n i^n) = (-1)^n n! a_n.$$

Sugestão: utilize a identidade $\Delta^n f(j) = (E-1)^n f(j)$, demonstrada em [23] e [35].

Exercício 62) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (x-i)^n = n!\,.$$

Sugestão: utilize o resultado do exercício anterior.

Exercício 63) Mostre, para $n \geq 1$ e $p \geq 0$, que $S_n(p) = -\binom{n}{1}\binom{p}{n} +$
$\binom{n}{2}\binom{2p}{n} - \cdots + (-1)^n \binom{pn}{n} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}\binom{pi}{n} = (-p)^n.$

Sugestão: utilize o resultado do exercício 61.

Exercício 64) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n(l,m) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}\binom{m+i}{l} = (-1)^n \binom{m}{l-n}.$$

Sugestão: utilize a fórmula de somação por partes.

Exercício 65) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n(m) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i} \binom{n}{i}\binom{m+i}{i} = \binom{m}{n}.$$

Sugestão: faça $m = x \in \mathbb{R}$ e utilize o resultado dos exercícios 14 e 46.

Exercício 66) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i+1}\binom{n+i}{2i}\binom{2i}{i} = \binom{n-1}{n}.$$

Sugestões:

i) $\binom{l}{m}\binom{m}{i} = \binom{l}{i}\binom{l-i}{m-i}$;

ii) utilize o resultado do exercício 64.

Exercício 67) Mostre, para $n > 0$, que

$$S_n(m) = \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i+1}\binom{n+i}{m+2i}\binom{2i}{i} = \binom{n-1}{m-1},$$

onde $m > 0$.

Sugestão: utilize o resultado do exercício 52.

Exercício 68) Mostre, para m e n inteiros, que

$$S_m(n) = \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}(nr - (r+s)k) = (m+1)(n-m)\binom{r}{m+1}\binom{s}{n-m}.$$

Sugestão: se $f(k)$ é o somando, mostre que $F(k) = k(n+1-k)\binom{r}{k}\binom{s}{n+1-k}$, onde $F(k)$ é uma antidiferença de $f(k)$.

Exercício 69) Se $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$, mostre que

$$S_n = \binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{n} = H_n.$$

Exercício 70) Se $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$, mostre que

$$S_n = \frac{\binom{n}{1}}{1\cdot 2} - \frac{\binom{n}{2}}{2\cdot 3} + \frac{\binom{n}{3}}{3\cdot 4} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\binom{n}{n}}{n(n+1)} = H_{n+1} - 1.$$

Exercício 71) Se $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$, mostre que

$$S_n = 1 - \frac{\binom{n}{1}}{2^2} + \frac{\binom{n}{2}}{3^2} - \frac{\binom{n}{3}}{4^2} + \cdots + (-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}H_{n+1}.$$

Exercício 72) A série

$$S(m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{(k+m)!e^k}$$

converge para todo m inteiro positivo. Mostre que $S(m) = P_m(e)$, onde $P_m(e)$ é um polinômio em e de grau m com coeficientes racionais.

Sugestão: utilize a seguinte igualdade: $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$. Então,

$$e^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-k)^i}{i!} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(-k)^{i-k}}{(i-k)!}.$$

Observação: este exercício e sua solução foram reproduzidos do site <www.siam.org/journals/problems>.

Exercício 73) Mostre que

$$\sum_{k=0}^{995} \frac{(-1)^k}{1991-k}\binom{1991-k}{k} = \frac{1}{1991}.$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [39].

Exercício 74) Mostre, para $n \geq 1$, que

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{2k}2^k = 2^{n-1} + \cos\frac{n\pi}{2}.$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [51].

Exercício 75) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{2k}2^{n-k} = \frac{1+2^{2n+1}}{3}.$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [54].

Exercício 76) Considere, para $n \geq 0$, a seqüência

$$S_n = \binom{n}{0}^{-1} + \binom{n}{1}^{-1} + \binom{n}{2}^{-1} + \cdots + \binom{n}{n}^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Mostre que S_n é uma seqüência limitada estritamente decrescente e que $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 2$.

Observação: este exercício foi reproduzido de [21].

Exercício 77) Mostre que

$$S_n = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots = \sum_{j\ge 0}(-1)^j\binom{n}{2j} = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Exercício 78) Mostre que

$$S_n(\alpha) = \sum_{j\ge 0}\binom{n}{j}\sin\Big(\alpha + \frac{j\pi}{2}\Big) = 2^{n/2}\sin\Big(\alpha + \frac{n\pi}{4}\Big).$$

Exercício 79) Mostre que $S_n(\alpha) = \sum_{j\ge 0}\binom{n}{j}\sin j\alpha = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}$.

Exercício 80) Mostre, para $n \ge 0$, que

$$S_n = \binom{n}{1} - 3\binom{n}{3} + 3^2\binom{n}{5} - 3^3\binom{n}{7} + \cdots = \frac{\sqrt{3}}{3}2^n\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Exercício 81) Mostre, para $n \ge 0$, que

$$S_n = \binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{3^2}\binom{n}{5} - \frac{1}{3^3}\binom{n}{7} + \cdots = \Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)^{n-1}2^n\sin\frac{n\pi}{6}.$$

Exercício 82) Mostre que

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots = \sum_{j\ge 0}\binom{n}{3j} = \frac{1}{3}\Big(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\Big).$$

Exercício 83) Mostre que

$$S_n = \binom{n}{0} - \binom{n}{3} + \binom{n}{6} - \cdots = \sum_{j\ge 0}(-1)^j\binom{n}{3j} = \frac{2}{3}\sqrt{3}^n\cos\frac{n\pi}{6}.$$

Exercício 84) Mostre, para $m > 0$, que

$$S_n(m) = \binom{n}{0} + \binom{n}{m} + \binom{n}{2m} + \cdots = \sum_{j\ge 0}\binom{n}{jm} = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\Big(2\cos\frac{l\pi}{m}\Big)^n\cos\frac{ln\pi}{m}.$$

Exercício 85) Dado que $0 \le k < m$, mostre que $S_n(k,m) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+m} +$

$$\binom{n}{k+2m} + \cdots = \sum_{j\ge 0}\binom{n}{k+jm} = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\Big(2\cos\frac{l\pi}{m}\Big)^n\cos\frac{l(n-2k)\pi}{m}.$$

Exercício 86) Mostre, para $n \ge 1$, que

$$S_n = \binom{n}{1} - \binom{n}{4} + \binom{n}{7} - \cdots = \sum_{j\ge 0}(-1)^j\binom{n}{3j+1} = \frac{2}{3}\sqrt{3}^n\sin\frac{(n+1)\pi}{6}.$$

Exercício 87) Mostre que

$$S_n = \sum_{j\ge 0}\binom{n}{3j}2^{n-3j} = \sum_{j\equiv 0\,(\mathrm{mod} 3)}\binom{n}{j}2^{n-j} = \frac{3^n + 2\cdot 3^{n/2}\cos(n\pi/6)}{3}.$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [39].

Exercício 88) Mostre, sem usar argumentos combinatórios, que

$$S_n(m) = \sum_{k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_{j\geq 0} \binom{m}{j}\binom{n}{j} 2^j \qquad (m, n \geq 0).$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [39].

Exercício 89) Mostre, sem usar argumentos combinatórios, que

$$S_n(m) = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} \binom{k}{m}\binom{n-k}{k} 2^{n-2k} = \binom{n+1}{2m+1},$$

onde $n \geq m \geq 0$.

Observação: este exercício foi reproduzido de [39].

Exercício 90) Mostre, para $n \geq 1$, que

$$S_n = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{(k+1)!(n-k)!(n-2k)!} = -\binom{2n}{n+2}.$$

Sugestão: a partir da identidade $(1+x)^r = (1-x^2)^r (1-x)^{-r}$, mostre que $\binom{r}{m} = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k}\binom{-r}{m-2k}(-1)^{m+k}$.

Observação: este exercício foi reproduzido de [7].

Exercício 91) Mostre que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} 4^{-k} = (2n+1)\binom{2n}{n} 4^{-n} \qquad (n \geq 0).$$

Sugestão: comece com o seguinte resultado preliminar: para $r \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(r)^{(k)} \left(r - \frac{1}{2}\right)^{(k)} = \frac{(2r)^{(2k)}}{2^{2k}} \qquad (k \geq 0).$$

Exercício 92) Mostre que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k} 4^{-k} = \binom{2n-1}{n-1} 2^{-(n-1)} \qquad (n \geq 1).$$

Sugestão: comece com o seguinte resultado preliminar: para $r \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(r)^{(k)} \left(r - \frac{1}{2}\right)^{(k)} = \frac{(2r)^{(2k)}}{2^{2k}} \qquad (k \geq 0).$$

Exercício 93) Mostre que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n \qquad (n \geq 0).$$

Sugestão: utilize os resultados do exercício 91.

Exercício 94) Mostre que
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = (2n+1)\binom{2n}{n} - 4^n,$$
onde $n \geq 0$.

Sugestão: utilize a teoria das funções geratrizes e as técnicas apresentadas em [54].

Observação: este exercício foi reproduzido de [8].

Exercício 95) Mostre que
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\frac{1}{n-k+1}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{2}{n+2}\binom{2n+1}{n},$$
onde $n \geq 0$.

Observação: este exercício foi reproduzido de [54].

Exercício 96) Calcule o valor de
$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

Sugestão: utilize o desenvolvimento em séries de potência de $(\text{Arcsin}\, x)^2$.

Observação: este exercício foi reproduzido de [14].

Exercício 97) Sejam a, b e c inteiros tais que $a, b \geq 0$ e $a+b \leq c$. Mostre que
$$\frac{\binom{a}{0}}{\binom{c}{b}} + \frac{\binom{a}{1}}{\binom{c}{b+1}} + \frac{\binom{a}{2}}{\binom{c}{b+2}} + \cdots + \frac{\binom{a}{a}}{\binom{c}{b+a}} = \frac{c+1}{(c-a+1)\binom{c-a}{b}}.$$

Sugestão: utilize a função Beta e as idéias do exercício anterior.

Observação: este exercício foi reproduzido das Competições Putnam (1987).

Exercício 98) Mostre, para $m \geq 1$, que
$$S(m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{m+k+1}{m+1}} = \frac{m+1}{m}.$$

Conclua que $S_n(m) = \sum_{k=0}^{n} 1/\binom{m+k+1}{m+1} = \frac{m+1}{m}(1 - 1/\binom{m+n+1}{n+1}))$.

Exercício 99) Mostre que
$$S(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2k}{2^{n+1}\binom{n+k+1}{k}} = 1.$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [16].

Exercício 100) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} \binom{2n-2k+1}{n} = 1.$$

Exercício 101) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2k}{k} 4^{-k} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}.$$

Exercício 102) Mostre, para $n \geq 1$, que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-1-i} \binom{n-1}{j} = 4^{n-1}.$$

Sugestão: mostre que $S_{n+1} - 4S_n = 0$.

Observação: este exercício foi reproduzido de [9].

Exercício 103) Determine, para $n \geq 1$, o valor de

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{i}{i+1} \binom{n+1}{i}.$$

Observação: este exercício e sua solução foram reproduzidos de [10].

Exercício 104) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \binom{2n}{2j} \binom{2n}{2k-1} = 0.$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [11].

Exercício 105) Determine, para $n \geq 2$, o valor de

$$S_n = \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{i} \binom{n}{i-1}.$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [13].

Exercício 106) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+r)^{k-1} (s-k)^{n-k} = \frac{(r+s)^n}{r}.$$

Exercício 107) Mostre, para $n \geq 0$ e $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ que

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(a)_k (-n)_k}{(c)_k k!} = {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a\,,\ -n \\ c \end{matrix} ;\ 1 \right] = \frac{(c-a)_n}{(c)_n},$$

onde $\sum_{k \geq 0} \frac{(a)_k (-n)_k}{(c)_k k!}$ é a série hipergeométrica $F(a, -n; c; 1)$ apresentada no item 14 do capítulo 1.

Observação: a solução deste exercício foi reproduzida de [25].

Exercício 108) Mostre para $n \geq 0$ que

$$S_n(m) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2m}{2k+1}\binom{m-k-1}{n-k} = 2^{2n+1}\binom{m+n}{2n+1}.$$

Sugestão: utilize o resultado do exercício anterior.

Exercício 109) Mostre para $n \geq 0$ que

$$S_n(m) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2m-1}{2k}\binom{m-k-1}{n-k} = 2^{2n}\binom{m+n-1}{2n}.$$

Sugestão: proceda como no exercício anterior.

Exercício 110) Mostre para $n \geq 0$ que

$$S_n(m) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2m-1}{2k+1}\binom{m-k-1}{n-k} = \frac{(2m-1)2^{2n}}{2n+1}\binom{m+n-1}{2n}.$$

Sugestão: proceda como no exercício anterior.

Exercício 111) Mostre para $n \geq 1$ que

$$S_n(m) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2m}{2k}\binom{m-k}{n-k} = \frac{m2^{2n-1}}{n}\binom{m+n-1}{2n-1}.$$

Sugestão: proceda como no exercício anterior.

Exercício 112) Calcule o valor de

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k}.$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [15].

Exercício 113) Mostre, para $n \geq p \geq 0$, que

$$S_n(p) = \sum_{k \geq 0} \binom{2n+1}{2p+2k+1}\binom{p+k}{k} = \binom{2n-p}{p}2^{2n-2p}.$$

Exercício 114) Mostre, para $n \geq p > 0$, que

$$S_n(p) = \sum_{k \geq 0} \binom{2n}{2p+2k}\binom{p+k}{k} = \frac{n}{2n-p}\binom{2n-p}{p}2^{2n-2p}.$$

Exercício 115) Mostre, para $n \geq 0$, $N \geq 1$ e $N \geq 2n$ que

$$S_N(n) := \sum_{k \geq n} \binom{N}{2k}\binom{k}{n} = \frac{2^{N-2n-1}N}{N-n}\binom{N-n}{n}.$$

Observação: este exercício foi reproduzido de [20].

As soluções dos próximos exercícios empregam o método conhecido como "snake oil" (óleo de cobra ou, nossa tradução, remédio para todo mal). Os detalhes deste método podem ser vistos em [54], onde, além disso, o leitor encontrará outros exemplos do uso deste método. Note também que poderíamos empregá-lo em muitos outros exercícios deste volume.

Exercício 116) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2k}{k} 2^{-k} = \begin{cases} \binom{n}{n/2} 2^{-n} & \text{se } n \geq 0 \text{ é par} \\ 0 & \text{se } n \geq 1 \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Exercício 117) Mostre, para $n \in \mathbb{Z}$, que

$$S_n(m) = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k+1} \binom{m+1}{2k+1} \binom{m-2k}{n-k} = \binom{2m+2}{2n+1} \qquad (m \in \mathbb{R}).$$

Exercício 118) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n-k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 1.$$

Sugestão: utilize a série do binômio de Newton na forma $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} x^k = 1/(1-x)^r$.

Exercício 119) Mostre, para $m \geq 0$ e $n \geq 0$, que

$$S_n(m) = \sum_{k \geq 0} \binom{k+m}{k} \binom{n+1}{2k+2m+1} = \binom{n-m}{m} 2^{n-2m}.$$

Sugestão: utilize a série do binômio de Newton na forma $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} x^k = 1/(1-x)^r$.

Exercício 120) Mostre, para $n \geq 0$, que

$$S_n = \sum_{k} (-1)^{n-k} \binom{2n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Sugestão: generalize o problema, calculando $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{m-k}$ e depois colocando $m = n$.

Observação: este exercício, juntamente com a sugestão, foram reproduzidos de [54].

Exercício 121) Mostre, para $n \in \mathbb{Z}$, que

$$\sum_{k} \binom{2n+1}{2k} \binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n} \qquad (m \in \mathbb{R}).$$

CAPÍTULO IV

SOLUÇÕES

Exercício 1)

Seja $\quad A = \binom{n}{i} + \binom{n}{i+1}$.

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}; \qquad \binom{n}{i+1} = \frac{n!}{(i+1)!\,(n-i-1)!}$$

$$A = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} + \frac{n!}{(i+1)!\,(n-i-1)!} = \frac{n!\,(i+1)}{(i+1)!\,(n-i)!} + \frac{n!\,(n-i)}{(i+1)!\,(n-i)!}$$

$$A = \frac{(n+1)n!}{(i+1)!\,(n-i)!} = \frac{(n+1)!}{(i+1)!\,(n-i)!} = \binom{n+1}{i+1}.$$

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}. \quad \blacksquare$$

Observação: os dois próximos resultados poderão ser úteis nas manipulações dos somandos dos exercícios que seguirão:

i) $\binom{n}{i} = \frac{n}{n-i}\binom{n-1}{i} \qquad (i \neq n).$

Demonstração:

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i} = \frac{n}{n-i}\binom{n-1}{n-1-i} = \frac{n}{n-i}\binom{n-1}{i} \qquad (i \neq n) \quad \blacksquare$$

ii) $\binom{n}{i+1} = \frac{n-i}{i+1}\binom{n}{i}.$

Demonstração:

$$\binom{n}{i+1} = \frac{n}{i+1}\binom{n-1}{i} = \frac{n}{i+1}\,\frac{n-i}{n}\binom{n}{i} = \frac{n-i}{i+1}\binom{n}{i} \quad \blacksquare$$

Exercício 2)

a) $S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ para $n \geq 0$.

1ª solução:

Podemos escrever a igualdade (15) como:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = (a+b)^n, \quad \forall a, b. \tag{$*$}$$

Colocando $a = b = 1$ em $(*)$, resulta:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \qquad (n \geq 0). \quad \blacksquare$$

2ª solução:

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{n+1}.$$

Sabemos, pelo exercício anterior, que $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}$. Assim, temos:

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} + \binom{n}{0} + \binom{n}{n}$$

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} + \binom{n}{n}$$

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2S_n$$

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = 2 \implies S_n = k2^n$, ou seja, S_n é o termo geral de uma progressão geométrica de razão $q = 2$.

Pondo $n = 0$, resulta: $S_0 = \binom{0}{0} = 1 = k$. Logo,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \qquad (n \geq 0). \quad \blacksquare$$

---

b) $S_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}$ para $n \geq 1$.

1ª solução:

Colocando $a = 1$ e $b = -1$ em $(*)$, resulta:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0 \qquad (n \geq 1). \quad \blacksquare$$

2ª solução:

Calculando S_1, obtemos $S_1 = 0$. Mostremos agora que $S_n = 0$ para $n \geq 2$. Para $n \geq 1$, podemos escrever:

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n+1}{i} + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1}$$

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] + (-1)^{n+1}$$

$$S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i}$$

$$S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1} - (-1)^{n+1} \binom{n}{n} + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i}$$

$S_{n+1} = S_n - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$. Logo, para $n \geq 1$, temos:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0 \qquad (n \geq 1). \quad \blacksquare$$

Exercício 3)

a) $S_n = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i}$ para $n \geq 1$.

1ª solução:

$$\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} = \binom{n}{0} + S_n \qquad (*)$$

Reescrevemos o membro da esquerda de $(*)$ começando pelo último termo:

$$n\binom{n}{n} + (n-1)\binom{n}{n-1} + (n-2)\binom{n}{n-2} + \cdots + 1\binom{n}{1} + \binom{n}{0} = \binom{n}{0} + S_n (**)$$

Já que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, podemos escrever $(**)$ como:

$$n\binom{n}{0} + (n-1)\binom{n}{1} + (n-2)\binom{n}{2} + \cdots + 1\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{n}{0} + S_n \ (***)$$

Adicionamos $(*)$ e $(***)$:

$\binom{n}{0}+n\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]+\binom{n}{n}=2\binom{n}{0}+2S_n$

$n2^n=2S_n \therefore S_n=n2^{n-1}$.

$$S_n=\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}=n2^{n-1} \qquad (n\geq 0). \quad \blacksquare$$

2ª solução:

Vamos utilizar a fórmula $i\binom{n}{i}=n\binom{n-1}{i-1}$.

$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}=n\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}=n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$.

Colocando $m=n-1$, podemos escrever:

$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}=2^m=2^{n-1}$ (segundo o exercício anterior.)

$$S_n=\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}=n2^{n-1} \qquad (n\geq 0). \quad \blacksquare$$

---

b) $S_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}i\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i\binom{n}{i}$ para $n\geq 2$.

Para n par, $n\geq 2$, temos:

$S_n=1\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+\cdots+(n-1)\binom{n}{n-1}-n\binom{n}{n}$

$S_n=n\binom{n-1}{0}-n\binom{n-1}{1}+\cdots+n\binom{n-1}{n-2}-n\binom{n-1}{n-1}$

$S_n=n\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}$

$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}=0 \qquad (m\geq 1)$ (segundo o exercício anterior.)

$S_n=0$.

Para n ímpar, $n\geq 3$, temos:

$S_n=1\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+\cdots-(n-1)\binom{n}{n-1}+n\binom{n}{n}$

$S_n=n\binom{n-1}{0}-n\binom{n-1}{1}+\cdots-n\binom{n-1}{n-2}+n\binom{n-1}{n-1}$

$S_n = n\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}$

$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i} = 0 \qquad (m \geq 1) \qquad$ (segundo o exercício anterior.)

$S_n = 0.$

Portanto, para n par ou ímpar, temos:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}i\binom{n}{i} = 0 \qquad (n \geq 2). \quad \blacksquare$$

Exercício 4)

$$S_n = \sum_{i=0}^{n}(-4)^i\binom{n+i}{2i}.$$

1ª solução:

$S_n = \sum_{i=0}^{n}(-4)^i\binom{n+i}{n-i} = \sum_{i=0}^{n}(-4)^{n-i}\binom{2n-i}{i}.$

Como feito no exercício 2, calculemos S_{n+1}:

$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1}(-4)^{n+1-i}\binom{2n+2-i}{i}$

$\binom{2n+2-i}{i} = \binom{2n+1-i}{i} + \binom{2n+1-i}{i-1} = \binom{2n-i}{i} + \binom{2n-i}{i-1} +$
$\qquad + \binom{2n-i}{i-1} + \binom{2n-i}{i-2}$

$\binom{2n+2-i}{i} = 2\binom{2n-i}{i-1} + \binom{2n-i}{i} + \binom{2n-i}{i-2}$

$S_{n+1} = 2\sum_{i=0}^{n+1}(-4)^{n+1-i}\binom{2n-i}{i-1} + \sum_{i=0}^{n+1}(-4)^{n+1-i}\binom{2n-i}{i} + \sum_{i=0}^{n+1}(-4)^{n+1-i}\binom{2n-i}{i-2}$

$S_{n+1} = 2\sum_{l=-1}^{n}(-4)^{n-l}\binom{2n-l-1}{l} - 4\sum_{i=0}^{n}(-4)^{n-i}\binom{2n-i}{i} +$
$\qquad + \sum_{l=-2}^{n-1}(-4)^{n-l-1}\binom{2n-2-l}{l}$

$S_{n+1} = 2\sum_{l=0}^{n-1}(-4)^{n-l}\binom{2n-l-1}{l} - 4S_n + \sum_{l=0}^{n-1}(-4)^{n-1-l}\binom{2(n-1)-l}{l}$

$$S_{n+1} = 2\underbrace{\sum_{l=0}^{n-1}(-4)^{n-l}\binom{2n-l-1}{l}}_{\mathcal{S}_n} - 4S_n + S_{n-1}$$

$$S_{n+1} = 2\mathcal{S}_n - 4S_n + S_{n-1}$$

$$\binom{2n-l-1}{l} = \binom{2n-l}{l} - \binom{2n-l-1}{l-1}$$

$$\mathcal{S}_n = \sum_{l=0}^{n-1}(-4)^{n-l}\binom{2n-l}{l} - \sum_{l=0}^{n-1}(-4)^{n-l}\binom{2n-l-1}{l-1}$$

$$\mathcal{S}_n = -1 + \sum_{l=0}^{n}(-4)^{n-l}\binom{2n-l}{l} - \sum_{i=0}^{n-2}(-4)^{n-1-i}\binom{2n-2-i}{i}$$

$$\mathcal{S}_n = -1 + S_n + 1 - \sum_{i=0}^{n-1}(-4)^{n-1-i}\binom{2(n-1)-i}{i} = S_n - S_{n-1}$$

$$S_{n+1} = 2(S_n - S_{n-1}) - 4S_n + S_{n-1} = -(2S_n + S_{n-1}).$$

Acabamos de ver que $S_{n+1} + 2S_n + S_{n-1} = 0$. Resolvendo esta equação em diferenças, obtemos $S_n = (-1)^n(k_1 n + k_0)$. Com os valores iniciais $S_0 = 1$ e $S_1 = -3$, calculamos k_1 ($k_1 = 2$) e k_0 ($k_0 = 1$). Logo,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n}(-4)^i\binom{n+i}{2i} = (-1)^n(2n+1) \qquad (n \geq 0). \quad \blacksquare$$

2ª solução:

Repare que podemos escrever $S_n = \sum_{i=0}^{n}(-4)^i\binom{n+i}{2i}$ como

$$\sum_{i=0}^{n}(-4)^i\binom{n+i}{n-i} = \sum_{i=0}^{n}(-4)^{n-i}\binom{2n-i}{i}.$$

Assim, temos:

$$S_n = (-4)^n\sum_{i=0}^{n}\binom{2n-i}{i}\Big(\frac{-1}{4}\Big)^i.$$

Veremos na observação ii) do exercício 7 que

$$S_{2n}(\text{-}1/4) = \sum_{i=0}^{n}\binom{2n-i}{i}\Big(\frac{-1}{4}\Big)^i = (2n+1)\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2n} = (2n+1)\Big(\frac{1}{4}\Big)^n.$$

Logo,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n}(-4)^i\binom{n+i}{2i} = (-1)^n(2n+1) \qquad (n \geq 0). \quad \blacksquare$$

Exercício 121)

$$\sum_k \binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n} \qquad (m \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}).$$

Usaremos os dois importantes resultados seguintes:

$$\sum_{p\geq 0} \binom{p}{k} x^p = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \qquad (k \geq 0) \qquad (*)$$

$$\sum_k \binom{p}{2k} x^{2k} = \frac{(1+x)^p + (1-x)^p}{2} \qquad \text{(termos pares somente)} \qquad (**)$$

Inicialmente, sejam $k, m, n \geq 0$ e $m \in \mathbb{Z}$. Podemos pensar na soma tanto como $S_n(m)$ quanto $S_m(n)$. Sendo $S_m(n)$, definimos $f_m = \sum_{k\geq 0}\binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n}$ e $F_m(x) = \sum_{m\geq 0} x^{2m} f_m$. Como $S_m(n) = [x^{2m}]F_m(x)$, calculemos $F_m(x)$.

$$\begin{aligned} F_m(x) &= \sum_{m\geq 0} x^{2m} \sum_{k\geq 0}\binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n} = \sum_{k\geq 0}\binom{2n+1}{2k}\sum_{m\geq 0}\binom{m+k}{2n}x^{2m} \\ &= \sum_{k\geq 0}\binom{2n+1}{2k}x^{-2k}\sum_{m\geq 0}\binom{m+k}{2n}(x^2)^{m+k}. \end{aligned}$$

Coloque agora $p = m+k$. Como $m \geq 0$, então $p \geq k$. Assim, vem:

$$F_m(x) = \sum_{k\geq 0}\binom{2n+1}{2k}x^{-2k}\sum_{p\geq k}\binom{p}{2n}(x^2)^p.$$

Repare que podemos escrever $F_m(x)$ como

$$F_m(x) = \sum_{k\geq 0}\binom{2n+1}{2k}x^{-2k}\sum_{p\geq 0}\binom{p}{2n}(x^2)^p$$

pois os termos acrescentados $\left(\sum_{k\geq 0}\binom{2n+1}{2k}x^{-2k}\sum_{p\geq 0}^{k-1}\binom{p}{2n}(x^2)^p\right)$ são nulos.
Continuamos então com o cálculo de $F_m(x)$. Usando $(*)$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} F_m(x) &= \sum_{k\geq 0}\binom{2n+1}{2k}(x^{-1})^{2k}\frac{(x^2)^{2n}}{(1-x^2)^{2n+1}} \\ &= \frac{x^{4n}}{(1-x^2)^{2n+1}}\sum_{k\geq 0}\binom{2n+1}{2k}(x^{-1})^{2k}. \end{aligned}$$

Agora, usando $(**)$, resulta:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x^{4n}}{(1-x^2)^{2n+1}}\Big(\frac{(1+x^{-1})^{2n+1}+(1-x^{-1})^{2n+1}}{2}\Big)\\
&= \frac{x^{2n-1}}{(1-x^2)^{2n+1}}\Big(\frac{(1+x)^{2n+1}-(1-x)^{2n+1}}{2}\Big)\\
&= \frac{1}{2x}\frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}} - \frac{1}{2x}\frac{x^{2n}}{(1+x)^{2n+1}}\\
&= \frac{1}{2x}\sum_{p\geq 0}\binom{p}{2n}x^p - \frac{1}{2x}\sum_{p\geq 0}\binom{p}{2n}(-x)^p\\
&= \frac{1}{2x}\sum_{p\geq 0}\binom{p}{2n}x^p - \frac{1}{2x}\sum_{p\geq 0}(-1)^p\binom{p}{2n}x^p\\
F_m(x) &= \frac{1}{2}\sum_{p\geq -1}\binom{p+1}{2n}x^p - \frac{1}{2}\sum_{p\geq -1}(-1)^{p+1}\binom{p+1}{2n}x^p.
\end{aligned}
$$

Portanto, obtém-se $[x^{2m}]F_m(x)$ facilmente:

$$
[x^{2m}]F_m(x) = \frac{1}{2}\binom{2m+1}{2n} - \frac{1}{2}(-1)^{2m+1}\binom{2m+1}{2n} = \binom{2m+1}{2n}.
$$

Precisamos agora estender a identidade para k, $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{R}$. Como $\binom{p}{k} = 0$ para $k < 0$, podemos escrever:

$$
\sum_k \binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n} \qquad (m \geq 0,\ n \in \mathbb{Z}).
$$

A extensão para $m \in \mathbb{R}$ (e mesmo para $m \in \mathbb{C}$) é feita usando-se o argumento polinomial (ver exercício 14), já que na identidade em questão, cada lado é um polinômio de grau $2n$ em m. Logo,

$$
\sum_k \binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n} \qquad (m \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}). \quad \blacksquare
$$

Observação: esta identidade é conhecida pelo nome de identidade de Graham-Riordan.

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

[1] Adams, R.A., *Single-Variable Calculus*, Addison-Wesley, 1990.

[2] Andrews, G.E., Applications of Basic Hypergeometric Functions, *SIAM Review*, **16**, # 4, 1974, pp. 441–484.

[3] Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R., Special Functions, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, **71**, Cambridge University Press, 1999.

[4] Aubert, P. et Papelier, G., *Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie*, Tome I, Quatorzième Édition, Librairie Vuibert, Paris, 1951.

[5] Brassard, G. et Bratley, P., *Algorithmique: Conception et Analyse*, Masson, 1987.

[6] Conway, J.H. e Guy, R.K., *O Livro dos Números*, Gradiva, 1999.

[7] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **23**, # 3, 1997, p. 183.

[8] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **25**, # 7, 1999, p. 429.

[9] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **26**, # 6, 2000, p. 381.

[10] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **26**, # 7, 2000, p. 440.

[11] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **26**, # 7, 2000, p. 444.

[12] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **26**, # 7, 2000, p. 445.

[13] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **26**, # 8, 2000, p. 497.

[14] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **27**, # 2, 2001, p. 139.

[15] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **27**, # 3, 2001, p. 214.

[16] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **27**, # 4, 2001, p. 268.

[17] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **27**, # 8, 2001, pp. 552–554.

[18] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **28**, # 3, 2002, pp. 187–188.

[19] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **28**, # 4, 2002, pp. 259–260.

[20] *Crux Mathematicorum*, Canadian Mathematical Society, **28**, # 5, 2002, pp. 342–344.

[21] Engel, A., *Problem-solving Strategies*, Springer-Verlag, 1998.

[22] Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M., *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 1965.

[23] Graham, R.L., Knuth, D.E. e Patashnik, O., *Matemática Concreta*, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1995.

[24] *Handbook of Mathematical Functions*, Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, Dover Publications, 1970.

[25] Hirschhorn, M., Some binomial coefficient identities, *The Mathematical Gazette*, **87**, # 509, 2003, pp. 288–291.

[26] Honsberger, R., Mathematical Gems III, *Dolciani Mathematical Expositions*, Volume 9, The Mathematical Association of America, 1985.

[27] Kaplan, W., *Cálculo Avançado*, Volume II, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1972.

[28] Kellison, S.G., *Fundamentals of Numerical Analysis*, Richard D. Irwin, Homewood, Illinois, 1975.

[29] Kitchen, J.W., Jr., *Calculus of One Variable*, Addison-Wesley, 1968.

[30] Knuth, D.E., *The Art of Computer Programming*, Volume 1, Addison-Wesley, 1973.

[31] Larson, L.C., *Problem Solving Through Problems*, Springer-Verlag, 1983.

[32] Lehmer, D.H., Interesting series involving the central binomial coefficient, *The American Mathematical Monthly*, **92**, # 7, 1985, pp. 449–457.

[33] Lopes, L., *Manual das Funções Exponenciais e Logarítmicas*, Interciência, 1999.

[34] Lopes, L. e Morais, E., *Manual de Derivadas*, QED Texte, 2004.

[35] Lopes, L., *Manual de Indução Matemática*, Interciência, 1999.

[36] Lopes, L., *Manual de Progressões*, Interciência, 1998.

[37] Lopes, L., *Manual de Seqüências e Séries*, Volume 1, QED Texte, 2005.

[38] Lopes, L., *Manual de Trigonometria*, Editora Didática e Científica, 1992.

[39] Lozansky, E. and Rousseau, C., *Winning Solutions*, Springer-Verlag, 1996.

[40] Melzak, Z.A., *Companion to Concrete Mathematics*, Volume 1, Wiley, 1973, p. 108.

[41] Miller, K.S., *An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations*, Henry Holt and Company, New York, 1959.

[42] Morgado, A.C.O., Carvalho, J.B.P., Carvalho, P.C.P. e Fernandez, P., *Análise Combinatória e Probabilidade*, IMPA/VITAE, 1991, Sociedade Brasileira de Matemática, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, RJ 22460-320.

[43] Morgado, A.C.O., Wagner, E. e Zani, S.C., *Progressões e Matemática Financeira*, IMPA/VITAE, 1993, Sociedade Brasileira de Matemática, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, RJ 22460-320.

[44] Nogueira, R., *Lições de Análise Combinatória*, Editora Fundo de Cultura, Rio de Janeiro, 1972.

[45] Petkovšek, M., Wilf, H.S., and Zeilberger, D., *A=B*, A K Peters, 1996.

[46] Piskounov, N., *Calcul Différentiel et Intégral*, Tome II, Éditions Mir, 1976.

[47] Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A. and Marichev, O.I., *Integrals and Series, Volume 1: Elementary Functions*, Gordon and Breach Science Publishers, 1988.

[48] Spiegel, M.R., *Cálculo Avançado*, Coleção Schaum, McGraw-Hill, Rio de Janeiro, 1971.

[49] Spiegel, M.R., *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1973.

[50] Staver, Tor B., *Om summasjon av potenser av binomialkoeffisientene*, Norsk Matematisk Tidsskrift, **29**, 1947, pp. 97–103.

[51] *The American Mathematical Monthly*, **104**, # 5, 1997, pp. 466–467.

[52] *The Mathematical Gazette*, **79**, # 484, 1995, pp. 129–132.

[53] *The Mathematical Gazette*, **79**, # 486, 1995, pp. 587–588.

[54] Wilf, H.S., *generatingfunctionology*, Academic Press, 1994.
Web site: http://www.cis.upenn.edu/~wilf/index.html

[55] Wylie, Jr., C.R., *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, 1960.

Suas observações e descobertas

Aos nossos leitores

O autor gostaria de conhecer sua opinião sobre a apresentação e o conteúdo deste manual. Escreva para:

Luís Lopes
Praia de Botafogo, 440 Sala 2401
Botafogo Rio de Janeiro RJ
22250–040

Email: qed_texte@hotmail.com

O mesmo endereço pode ser utilizado para a solicitação de outros exemplares e títulos.

Outras obras já publicadas:

1 Manual das Funções Exponenciais e Logarítmicas
2 Manual de Derivadas (com Eduardo Morais)
3 Manual de Indução Matemática
4 Manual de Progressões
5 Manual de Seqüências e Séries (Volume 1)
6 Manual de Trigonometria

E ainda:

É Divertido Resolver Problemas (com Josimar Silva)

Amostras do conteúdo de todos os títulos estão disponíveis para *download* em:

`<www.escolademestres.com/qedtexte>`

MANUAL

DE

SEQÜÊNCIAS E SÉRIES

VOLUME 2

- Mostre que
$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{1}{2i+1}\binom{n}{i} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$$
e que
$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{k+i-1}{i} = k\binom{k+n}{k+1} \qquad (k\geq 0).$$
- Qual o valor das somas $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\cdots$ e $\binom{n}{1}-\binom{n}{4}+\binom{n}{7}-\cdots$?
- Mostre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n \qquad (n\geq 0).$

Questões como estas são propostas e resolvidas passo a passo neste manual.

Através de exercícios, o autor introduz cento e vinte e uma importantes seqüências e séries envolvendo coeficientes binomiais. Uma vez que as soluções apresentadas são completas e detalhadas, o leitor redescobre o prazer de raciocinar e de fazer novas descobertas a partir dos conhecimentos adquiridos já no nível médio ou pré-universitário.

Voltado para os professores e pesquisadores, o livro certamente também será útil aos estudantes de cálculo, probabilidade, análise combinatória e análise de algoritmos.

www.escolademestres.com/qedtexte **ISBN: 85-901503-5-6**